Розглянуто інтегро-диференціальне рівняння теплопровідності та визначено оцінки збіжності розв'язків в умовах релаксування термодинамічної системи. Доведено існування розв'язків задач теплопровідності з урахуванням теплової пам'яті при часах встановлення локальної рівноваги системи на проміжках часу релаксації систем. Визначено умови стійкості розв'язків з урахуванням функцій релаксації

Ключові слова: релаксація, інтегро-диференціальне рівняння, теплова пам'ять, збіжність, час локалізації

Рассмотрено интегро-дифференциальное уравнение теплопроводности и определены оценки сходимости решений в условиях релаксации термодинамической системы. Доказано существование решений задач теплопроводности с учетом тепловой памяти в момент установления локального равновесия системы на промежутках времени релаксации систем. Определены условия устойчивости асимптотических решений с учетом функций релаксации

Ключевые слова: релаксация, интегро-дифференциальное уравнение, тепловая память, сходимость, время локализации

УДК 517.9+536.2:621.078

ОЦІНКА ЗБІЖНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В УМОВАХ РЕЛАКСУВАННЯ СИСТЕМИ

Т. М. Босенко
Кандидат технічних наук
Доцент кафедри диференціальних рівнянь
Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара
пр. Гагаріна, 72, г. Дніпропетровськ, Україна, 49010
E-mail.: boss-ua@yandex.ru

1. Вступ

Математичні моделі у рамках термодинамічного підходу до нерівноважних релаксаційних процесів теплопровідності в даний час представляють неабиякий інтерес та важкість у процесі реалізації. При появі перспектив прикладного широкого застосування нерівноважних та швидкісних процесів з'явилась потреба в описі процесів теплопровідності в середовищах зі складною структурою (полікристалічні структури, полімери) та побудові моделей, які б описували із заданою ймовірною точністю та наближеністю процеси, що майже непомітні за їх незначний час протікання. При спробі опису математично-дискретним наближенням таких процесів виникають труднощі як з боку законів термодинамічної загальної теорії (існування неперервної функції від температури), так і самих математичних виразів (граничні умові, умові контактної зони шарів).

2. Аналіз досліджень та публікацій

Задачами сингулярно-розривного типу для інтегральних рівнянь за малим параметром при старших похідних займалися Биков Я. В. [1], Іманалієв М. Наступним поштовхом у визначенні математичного апарату у швидкісних процесах належить Соболєву С. Л. [2], який надає класифікацію гіперболічних та інтегральних рівнянь для нелокальних процесів. Впровадження та подальший розвитком нерівноважної термодинаміки інтегральних рівнянь належить Підстригачу Я. С., Шабловському О.Н. Розвиток прикладних сучасних питань застосування рівнянь швидкісного типу належить Накорчевському А. І., Нікітенко М. І., Веселовському В. Б. [3], Карташову О. М. [4], Guo Dajun [5, 6]. Однак проблема сингулярно-розривних та нестійких моделей локально-нерівноважної термодинаміки при релаксуванні системи залишається відкритою. Визначення релаксаційного температурного поля залишається задачею надскладною і потребує подальших досліджень. Важливою особливістю при вивченні таких систем є використання узагальненого закону Фур'є [7], що враховує ефекти релаксацій, які виражаються у функціях релаксації теплового потоку $\alpha(\mathrm{Fo})$ і внутрішньої енергії $\beta(\mathrm{Fo})$ [8].

3. Постановка задачі

Моделювання релаксаційних процесів можливе при наявності релаксуючих компонентів системи, що адекватно реагують на миттєві зміни в процесі. Саме врахування функцій релаксації дозволяє адекватно моделювати ці процеси. Наслідком обліку функцій релаксації $\alpha(\mathrm{Fo})$, $\beta(\mathrm{Fo})$ приходимо до розуміння теплової пам'яті. Комплекс пам'яті виражається передісторією впливу на матеріал та виражається інтегральною сумою функцій релаксацій, що призводить до розгляду інтегро-диференціальних рівнянь (ІДР) теплопровідності та визначення оцінок збіжності їх розв'язків в умовах релаксування термодинамічної системи.

Розглянемо систему, стан якої у будь-який момент часу Fo характеризується дійсним вектором $\Theta=\left(\Theta_i(\mathrm{Fo}),x_i(M)\right),\quad i=1,\dots,N,\quad M=xi+yj+zk$. Нехай еволюція системи при $\mathrm{Fo}\ge 0$ описується ІДР вигляду [3, 10]:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial \mathrm{Fo}}+\mathrm{Fo}_r\frac{\partial^2\Theta}{\partial \mathrm{Fo}^2}+\int_0^{\mathrm{Fo}}\alpha(\mathrm{Fo}-s)\frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2}ds-\int_0^{\mathrm{Fo}}\beta(\mathrm{Fo}-s)\frac{\partial\Theta}{\partial \mathrm{Fo}}ds=w(M,\mathrm{Fo}). \tag{1}$$

Початкові умови:

$$\Theta(M,0)=\Theta_0,\quad \frac{\partial\Theta(M,0)}{\partial \mathrm{Fo}}=\Theta_1. \tag{2}$$

У рівнянні (1) $\alpha(\mathrm{Fo})=\left(\alpha_{ij}(\mathrm{Fo})\right),\quad i,j=1,\dots,N,$ – дійсна матрична функція часу. Задача (1), (2) виникає для механічних і фізичних систем з пам'яттю (у іншій термінології, із спадковістю або з не локальністю за часом). Функції $\alpha(\mathrm{Fo})$, $\beta(\mathrm{Fo})$ – ядра релаксації. Припустимо, що матричні функції $\alpha(\mathrm{Fo})$, $\beta(\mathrm{Fo})$ інтегровані за Лебегом. Таким чином, збігаються інтеграли:

$$\alpha_{01}=\int_0^{+\infty}\left\|\alpha_1(\mathrm{Fo})\right\|,\quad \beta_{02}=\int_0^{+\infty}\left\|\beta_2(\mathrm{Fo})\right\|. \tag{3}$$

Задачу (1), (2) можливо переписати іншим чином. Довизначимо $\Theta=\Theta(M,\mathrm{Fo})$ на деякому відрізку часі $-1\le \mathrm{Fo}\le 0$, двічі неперервно диференційованій функції, яка задовольняє умовам:

$$\Theta(0)=\Theta_0,\quad \frac{\partial\Theta(M,0)}{\partial \mathrm{Fo}}=\Theta_1,\quad \Theta(-1)=0,\quad \frac{\partial\Theta(M,-1)}{\partial \mathrm{Fo}}=0. \tag{4}$$

Виконаємо здвиг за часом $\tau=\mathrm{Fo}+1$. Тоді нова функція $\Theta_*=\Theta_*(M,\tau)=\Theta(M,\mathrm{Fo})$ задовольняє при $\tau\ge 0$ ІДР:

$$\frac{\partial\Theta_*}{\partial \mathrm{Fo}}+\mathrm{Fo}_r\frac{\partial^2\Theta_*}{\partial \tau^2}+\int_0^{\tau}\alpha(\tau-s)\frac{\partial^2\Theta_*}{\partial \tau^2}ds-\int_0^{\tau}\beta(\tau-s)\frac{\partial\Theta_*}{\partial x}ds=w^*(M,\tau) \tag{5}$$

з нульовими початковими умовами. Функція $w^*(M,\tau)$ тривіальним чином конструюється за відомими величинами $\Theta=\Theta(M,\mathrm{Fo})$ при $-1\le \mathrm{Fo}\le 0$ та при $\tau\ge 0$.

$$w^*(M,\tau)=\frac{\partial\Theta(M,\tau-1)}{\partial\tau}+\mathrm{Fo}_r\frac{\partial^2\Theta(M,\tau-1)}{\partial\tau^2}+\int_0^{\tau}\alpha(\tau-s)\frac{\partial^2\Theta_*(M,\tau-1)}{\partial x^2}ds-\int_0^{\tau}\beta(\tau-s)\frac{\partial\Theta_*(M,\tau-1)}{\partial t}ds,\ 0\le\tau\le 1.$$

$$w^*(M,\tau)=w(M,\tau-1)+\int_0^{1}\alpha(\tau-s)\frac{\partial^2\Theta_*(M,\tau-1)}{\partial x^2}ds-\int_0^{1}\beta(\tau-s)\frac{\partial\Theta_*(M,\tau-1)}{\partial t}ds,\ 1\le\tau. \tag{6}$$

Отже, задача (1), (2) формально зводиться до задачі (6) з нульовими початковими умовами. Зауважимо, що якщо функція $w(M,\mathrm{Fo})$ інтегрована за Лебегом, то такою ж властивістю наділена функція $w^*(M,\tau)$. Через збіжність інтеграла (5) можна визначити допоміжне ядро:

$$\alpha_{11}(\mathrm{Fo})=\int_{\mathrm{Fo}}^{+\infty}\alpha(s)ds,\quad \beta_{22}(\mathrm{Fo})=\int_{\mathrm{Fo}}^{+\infty}\beta(s)ds. \tag{7}$$

Нехай виконана рівність:

$$K(\mathrm{Fo})^+=K(\mathrm{Fo}). \tag{8}$$

Тоді рівняння (5) перетвориться до рівняння:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial \mathrm{Fo}}+\mathrm{Fo}_r\frac{\partial^2\Theta}{\partial \mathrm{Fo}^2}+\int_0^{\mathrm{Fo}}\alpha(\mathrm{Fo}-s)\frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2}ds-\int_0^{\mathrm{Fo}}\beta(\mathrm{Fo}-s)\frac{\partial\Theta}{\partial \mathrm{Fo}}ds=w_1(M,\mathrm{Fo}), \tag{9}$$

де $w_1(M,\mathrm{Fo})=w(M,\mathrm{Fo})-\alpha(\mathrm{Fo})\Theta_0$. Отже, замість задачі (1)-(2), можна розглядати задачу (1),(9). У питаннях, що стосуються існування розв'язку на відрізку $\mathrm{Fo}\ge 0$, вважатимемо виконаною умову:

$$w_1(M,\mathrm{Fo})\to\infty \text{ при } |x|\to+\infty. \tag{10}$$

Зручно довизначити ядра при від'ємних часах: $K=K_i(\mathrm{Fo})=0,\quad i=1,2$ при $\mathrm{Fo}<0$. Якщо функція $g=g(\mathrm{Fo})$ є узагальненою функцією (або розподілом) помірного зростання, для якої визначено перетворення Фур'є цієї функції, яке позначимо через $g_F(\Omega)=\int e^{-i\Omega t}g(t)dt$.

Нехай збігаються інтеграли:

$$\alpha_1=\int_0^{+\infty}t\cdot\left\|\alpha(t)\right\|dt<\infty,\quad \beta_2=\int_0^{+\infty}t\cdot\left\|\beta(t)\right\|dt<\infty. \tag{11}$$

Тоді з урахуванням очевидних нерівностей:

$$\int_0^{+\infty}\left\|\alpha_{11}(t)\right\|dt\le\int_0^{+\infty}t\cdot\left\|\alpha(t)\right\|dt, \tag{12}$$

$$\int_0^{+\infty}\left\|\beta_{22}(t)\right\|dt\le\int_0^{+\infty}t\cdot\left\|\beta(t)\right\|dt, \tag{13}$$

визначені Фур'є-образи допоміжного ядра $\alpha_{1F}(\Omega)$ і $\beta_{2F}(\Omega)$.

За теоремою Пелі–Вінера функції $\alpha_{1F}(\Omega)$, $\beta_{22F}(\Omega)$ є аналітичними у нижній комплексній на півплощині $\mathrm{Im}\,\Omega\le 0$. Для дійсних значень введемо Ω позначення:

$$\delta(\Omega)=i\Omega^{-1}\left(\alpha_F(\Omega)-\alpha_F(\Omega)^+\right).$$

У точці $\Omega=0$ матрична функція $\left\|z_n(t)-z_0\right\|\le a$ визначається по безперервності при умові (6) і збіжності інтеграла (5). Очевидно, що виконується рівність $\delta(\Omega)^+=\delta(\Omega)$.

Лема 1. Нехай виконана рівність (8) і збігаються інтеграли (11). Тоді має місце рівність:

$$\delta_\alpha(\Omega)=\alpha_{1F}(\Omega)+\alpha_{1F}(\Omega)^+,$$

$$\delta_\beta(\Omega)=\beta_{1F}(\Omega)+\beta_{1F}(\Omega)^+. \qquad (14)$$

Доведення. Використовуючи формулу (7) для обчислення і замінюючи порядок інтегрування, отримаємо:

$$\alpha_{1F}(\Omega)=i\Omega^{-1}\left(\alpha_F(\Omega)-\alpha_F(0)^+\right),$$

$$\beta_{1F}(\Omega)=i\Omega^{-1}\left(\beta_F(\Omega)-\beta_F(0)^+\right).$$

Тепер рівність (14) перевіряється безпосередньо. Доведення завершено.

4. Існування та єдиність розв'язків інтегро-диференціального рівняння в умовах релаксування

Почнемо з доведення локальної теореми існування і єдиності задачі (1), (2). Ця теорема виходить з результатів, отриманих для рівнянь більш загального вигляду на основі теорії Шаудера. Проте нижче буде приведено доказ, що є простим узагальненням методу Пікара – Лінделефа [9, 11]. Цей метод дозволяє явно вказати часовий інтервал, на якому існує розв'язок. Введемо позначення: $y=y(Fo)=\dfrac{\partial\Theta(M,Fo)}{\partial Fo}$, W – матриця других похідних від функції w, F_1 – матриця перших похідних від вектор-функції w_1 по x, F_2 – матриця перших похідних від w_1 по y:

$$z=\begin{pmatrix}\Theta\\ y\end{pmatrix},\ z_0=\begin{pmatrix}\Theta_0\\ y_0\end{pmatrix},\ |z|=\max\left(|\Theta|,|y|\right),$$

$$\Phi(z)=\begin{pmatrix}y\\ -\nabla V(\Omega)-F(x,y)\end{pmatrix},$$

$$\Psi(z)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ K(Fo) & 0\end{pmatrix},\ k(Fo)=\begin{pmatrix}0\\ w(M,Fo)\end{pmatrix}.$$

Тоді задача (1), (2) може бути переписана у вигляді:

$$z(Fo)=z_0+\int_0^{Fo}w(M,s)ds,$$

$$w(M,Fo)=\Phi\left(z(M,Fo)\right)+\int_0^{Fo}\Psi(M,Fo-s)z(s)ds+k(Fo). \qquad (15)$$

Теорема 1. Нехай вектор-функція інтегрована за Лебегом і обмежена на інтервалі $[0,T_0]$, тоді $b_0=\sup\limits_{0<Fo<T_0}\left(|f(M,Fo)|\right)$, $b_1=\max\limits_{|z-z_0|\le 0}\left(\|W|+|F\|\right)$.

Для довільного додатного числа a покладемо: $b=\left(b_0+b_1+|y_0|+a+\left(|\Theta_0|+a\right)k\right)$.

Тоді на інтервалі $[0,Fo_r]$, в класі безперервних функцій існує єдиний розв'язок задачі (15).

Доведення. Будуємо розв'язки при часах релаксування системи $0\le Fo\le Fo_r$ методом послідовних наближень у просторі безперервних функцій:

$$z_n(Fo)=z_0+\int_0^{Fo}w_n(M,s)ds,\ n>0.$$

$$w_n(M,Fo)=\Phi\left(z_{n-1}(M,Fo)\right)+$$

$$+\int_0^{Fo}\Psi(M,Fo-s)z_{n-1}(s)ds+k(Fo).$$

Нескладно довести по індукції, що $\|z_n(Fo)-z_0\|\le a$. Далі, нехай

$$A=\max_{|z-z_0|\le a}\left(\|W(M,\Theta)\|+\|F_1(\Theta,y)\|+\|F_2(\Theta,y)\|\right).$$

По індукції доводиться нерівність:

$$\|z_n(Fo)-z_{n-1}(Fo)\|\le b(c+k)^{n-1}Fo^n(n!)^{-1}. \qquad (16)$$

Тому послідовність $z_n(Fo)=z_0+\sum\limits_{k=1}^{n}(z_k-z_{k-1})$ рівномірно збігається до деякої безперервної вектор-функції $z=z(Fo)$. Через це і прийнятих припущень послідовність функцій $w_n=w_n(M,Fo)$ рівномірно збігається до функції:

$$\Phi\left(z(M,Fo)\right)+\int_0^{Fo}\Psi(M,Fo-s)z(s)ds+k(Fo). \qquad (17)$$

Звідси і з визначення послідовності $z_n(Fo)$ виходить, що функція $z=z(Fo)$ $z=z(Fo)$ є розв'язком задачі (15). Для доведення єдиності припустимо, що $z_*=z_*(Fo)$ деякий розв'язок задачі (15) на інтервалі $[0,Fo_r]$. По індукції доводиться нерівність:

$$\|z_n(Fo)-z_*(Fo)\|\le b(c+k)^{n-1}Fo^n(n!)^{-1}. \qquad (18)$$

Звідси виходить, що $z=z_*(Fo)$. Доведення теореми завершено.

Зауваження 1. Матимемо на увазі під розв'язком задачі (1), (2) розв'язок у сенсі **теореми 1**. Взагалі, **теорема 1** забезпечує локальне існування і єдність існування розв'язку задачі (14) у класі C^1.

Проте, якщо функція частинно-безперервна, $f=f(Fo)$, то функція $y=y(Fo)=\dfrac{\partial\Theta(M,Fo)}{\partial Fo}$ частино диференціюється.

Визначення 1. Для довільного розв'язку задачі (9), визначимо функцію енергії:

$$E(Fo)=V_1\left(\Theta(M,Fo)\right)+2^{-1}\left(\Theta(Fo),\Theta(Fo)\right)+$$
$$+\int_0^{Fo}ds\int_0^{Fo}\left(\Theta(s)\alpha(s-p)\Theta(p)\right)dp. \qquad (19)$$

Визначення 2. Для допоміжного ядра $K_1=K_1(Fo)$ визначимо в просторі $L^2_{C^N}\left(R^N\right)$ білінійну форму:

$$\langle u,v\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}ds\int_{-\infty}^{+\infty}\left(u(s),\alpha(s-p)v(p)\right)dp. \qquad (20)$$

Лема 2. Припустимо, що виконані умови (7), (10), (11) $u_\delta=\delta(\Omega)$ - від'ємна матрична функція. Нехай $f=f(\Theta)$ частинно-безперервна обмежена функція на інтервалі $[0,Fo_r]$, $\Theta=\Theta(M,Fo)$ - розв'язок задачі (1), (2), на тому ж інтервалі. Тоді при $0\le Fo\le Fo_r$ справедлива нерівність:

$$E(t)\le A_0+\tau^2+A_1^{1/2}\tau,$$

$$\text{де } A_1=A_0-\inf(V_1),\ \tau=\int_0^{Fo}\left(\left|f_1(s)\right|+\left\|\alpha(s)\right\|\cdot\left|\Theta_0\right|\right)ds. \quad (21)$$

Доведення. Помножуючи обидві частини рівняння (9) скалярно на функцію $\Theta=\Theta(Fo)=\dfrac{\partial\Theta(M,Fo)}{\partial Fo}$, інтегруючи на інтервалі $[0,Fo_r]$ отримуємо:

$$E(t)=A_0+\int_0^{Fo}\left(\Theta(s)f(s)+\alpha(s)\Theta_0\right)ds. \quad (22)$$

Визначимо для довільного додатного $s\le Fo_r$ функцію $y_s=y_s(Fo)\in L^2_{C^N}(R)$ таким чином: $y_s=y\ (Fo)$ на інтервалі $0\le Fo\le s$, $y_s(Fo)=0$ поза цим інтервалом. Тоді:

$$\begin{aligned}E(Fo)&=V_1\left(\Theta(M,Fo)\right)+2^{-1}\left(\Theta(Fo),\Theta(Fo)\right)+\left\langle y_t,y_t\right\rangle=\\&=V_1\left(\Theta(M,Fo)\right)+2^{-1}\left(\Theta(Fo),\Theta(Fo)\right)+\\&+(4\pi)^{-1}\int_0^{+\infty}\left(\Theta_{tF}(\Omega),\delta(\Omega)\Theta_{tF}(\Omega)\right)d\Omega.\end{aligned} \quad (23)$$

Позначимо $Z(Fo)=\int_0^{Fo}\left(\left|f(s)\right|+\left\|\alpha(s)\right\|\cdot\left|\Theta_0\right|\right)\left|\Theta(s)\right|ds$. З (21), (23) і нерівності $\delta(\Omega)\ge0$, отримуємо нерівність $2^{-1}\left(\dfrac{\partial Z}{\partial Fo}\right)^2\le A_1+Z$. Звідси метод диференціальних нерівностей [9] дає оцінку:

$$Z\le\tau^2+A_1^{1/2}\tau. \quad (24)$$

Твердження **леми 2** є справедливим, якщо за допомогою (24) оцінити праву частину виразу (22). Доведення завершено.

5. Оцінка збіжності розв'язків інтегро-диференціального рівняння теплопровідності

Теорема 2. Припустимо, що виконані умови (7), (9), (11)-(13) і $\delta=\delta(\Omega)$ - від'ємна матрична функція. Нехай $f=f(Fo)$ частинно-безперервна і локально обмежена функція при $0\le Fo\le Fo_r$.

Тоді задача (1), (2) має єдиний розв'язок на відрізку $0\le Fo\le Fo_r$.

Доведення. Застосовуючи **теорему 1** до послідовності задач:

$$\frac{\partial z(M,Fo)}{\partial Fo}=\Phi\left(z(M,Fo)\right)+\int_{Fo_0}^{Fo}\Psi(M,Fo-s)z(s)ds+\alpha_1(Fo),$$

$\alpha_1(Fo)=\alpha(Fo)+\int_0^{Fo}\Psi(M,Fo-s)z(s)ds$, можна здійснювати локальне продовження розв'язку. Потрібно встановити, що така процедура дозволяє отримати розв'язок для проміжку часу релаксування термодинамічної системи. Нехай розв'язок побудовано для інтервалу $0\le Fo\le Fo_r$. З **леми 2** виходить, що для деякої додатної величини A на всьому цьому часовому інтервалі справедлива нерівність $\left|z(Fo)\right|\le A$. Визначимо величини:

$$b_0=Ak+\sup_{0<Fo<T_0}\left(\left|f(M,Fo)\right|\right),$$

$$b_1=\max_{|z-z_0|\le a}\left(\left|\nabla V(M,\Theta)\right|+\left\|F(\Theta,y)\right\|\right),$$

$$b=b_0+b_1+(A+1)(k+1).$$

З **теореми 1** виходить, що для всіх точок інтервалу $0\le Fo<Fo_r$ можливо продовжити розв'язок вперед на інтервал з довжиною $\Delta Fo=\min\left(T,b^{-1}\right)$. Звідси витікає, що розв'язок продовжується на весь час релаксування системи $Fo_r\le Fo\le Fo*$, де $Fo*$ – час встановлення локальної рівноваги термодинамічної системи. Доведення завершено.

Теорема 3. Припустимо, що виконані умови (8), (10), (11) і $\delta=\delta(\Omega)$ – від'ємна матрична функція, $f=f(Fo)$ – частинно-безперервна локально обмежена функція при $Fo\ge0$.

Нехай, крім того, існують такі безперервні невід'ємні функції дійсного аргументу $\phi=\phi(\Omega)$, $\psi=\psi(\Omega)$, що виконані умови:

$$\phi(\Omega)Id_{C^N}\le\delta(\Omega), \quad (25)$$

$$\int\phi(\Omega)\psi(\Omega)^2 d\Omega<+\infty. \quad (26)$$

Тоді задача (1) з нульовими початковими умовами має єдиний розв'язок на інтервалі $0\le Fo<Fo_r$. При цьому розв'язки функцій $\left|\Theta(M,Fo)\right|$, $\left|\dfrac{\partial\Theta(M,Fo)}{\partial Fo}\right|$ – обмежені.

Доведення. Існування і єдиність розв'язку виходять з **теореми 2**.

Використовуючи співвідношення (22), (23), як і в **лемі 2**, отримуємо рівність

$$\begin{aligned}&V_1\left(\Theta(M,Fo)\right)+2^{-1}\left(y(Fo),y(Fo)\right)+\\&+(4\pi)^{-1}\int_0^{+\infty}\left(y_{tF}(\Omega),\delta(\Omega)y_{tF}(\Omega)\right)d\Omega=\\&=A_0+\int_0^{Fo}\left(y(s),f(s)\right)ds.\end{aligned}$$

Звідси і з (25) виходить нерівність;

$$\begin{aligned}&V_1\left(\Theta(M,Fo)\right)+2^{-1}\left(\Theta(Fo),\Theta(Fo)\right)+\\&+(4\pi)^{-1}\int_0^{+\infty}\varphi(\Omega)\left|\Theta_{tF}(\Omega)\right|^2 d\Omega.\le\\&\le A_0+(2\pi)^{-1}\int\left|\Theta_{tF}(\Omega)\right|\phi(\Omega)\psi(\Omega)d\Omega.\end{aligned}$$

Тепер арифметичними перетвореннями нескладно отримати, що

$$V_1(\Theta(M,Fo)) + 2^{-1}(y(Fo),y(Fo)) +$$

$$+ (4\pi)^{-1}\int_0^{+\infty}\varphi(\Omega)(|y_{tF}(\Omega)| - \psi(\Omega))^2 d\Omega \le$$

$$\le A_0 + (2\pi)^{-1}\int \psi(\Omega)^2\phi(\Omega)d\Omega,$$

звідки з урахуванням (10), (26) і довільності Fo випливає твердження теореми. Доведення завершено.

Оберемо деяку дійсну функцію класу $C^\infty(R)$, що задовольняє додатковим умовам: $\mu(Fo)=0$ при $Fo<0$, $\mu(Fo)=1$ при $Fo>0$. Нехай виконані умови **теореми 2** і, отже, задача (1) з нульовими початковими умовами має єдиний розв'язок $\Theta=\Theta(M,Fo)$ при $Fo\ge 0$. Довизначимо функції $\Theta=\Theta(M,Fo)$ і $f=f(Fo)$ при $f(Fo)=\nabla V(0)$. Фіксуємо деяке додатне число Fo_r і введемо позначення $\Theta_1=\Theta(M,Fo_r)$, $v_1=v(Fo_r)$. Визначимо допоміжну функцію:

$$u_T = u_T(Fo) = \begin{cases}\Theta(M,Fo),\ 0\le Fo\le Fo_r,\\ \Theta_1+\Theta_2(Fo-Fo_r)+2^{-1}v_1(Fo-Fo_r)^2\mu(Fo_r-Fo+1),\ Fo_r<Fo.\end{cases}$$

Вона належить класу C_N^1 і набуває нульового значення поза інтервалом $[0,T+1]$. До того ж, похідна $v_T=v_T(Fo)=\dfrac{\partial u_T(Fo)}{\partial Fo}$ – частинно-диференційована. Функція $u_T=u_T(Fo)$ задовольняє ІДР:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u_T(Fo)}{\partial Fo}+Fo_r\frac{\partial^2 u_T(Fo)}{\partial Fo^2}+\int_0^{Fo}\alpha(Fo-s)u_T(s)ds-\\&-\int_0^{Fo}\beta(Fo-s)u_T(Fo)ds=f(M,Fo)+f_T(M,Fo),\end{aligned}\qquad(27)$$

де допоміжна функція визначена рівністю:

$$f_T(Fo)=\begin{cases}0,\ Fo<Fo_r.\\ \dfrac{\partial^2 u_T(Fo)}{\partial Fo^2}+\nabla V(u_T(Fo))+\\ +F\left(u_T(Fo),\dfrac{\partial u_T(Fo)}{\partial Fo})\right)-\\ -\int_0^t\alpha(Fo-s)u_T(s)ds-f(Fo),\ Fo_r\le Fo.\end{cases}$$

Функція $f_T=f_T(M,Fo)$ часткова-неперервна і локально-обмежена. Функція f_T визначає межі застосування рівняння (1) тільки на проміжках часу релаксування системи $Fo*$.

Із визначення обмеженості $\Theta(X,Fo)$ та її похідних, рівняння (1) має обмежені розв'язки у всіх критичних точках релаксування.

Визначимо лінійний оператор Г, що діє на простір $H_{R^N}^{-1}(R)$:

$$\begin{aligned}\Gamma v(Fo)=&-\frac{\partial^2 u_T(Fo)}{\partial Fo^2}+W(u_T(Fo))v(Fo)-\\&-F_1(u_T(Fo),v_T(Fo))v(Fo)-\\&-F_2(u_T(Fo),v_T(Fo))\frac{\partial u_T(Fo)}{\partial Fo}+\int_0^{Fo}\alpha(Fo-s)v(s)ds.\end{aligned}$$

З (27) виходить, що функція $v_T=v_T(M,Fo)$ задовольняє рівнянню:

$$\Gamma v(Fo)=-\frac{\partial u_T(f(Fo)+f_T(Fo))}{\partial Fo}.\qquad(28)$$

Лема 3. Припустимо, що виконані умови (7), (9), (11). Нехай $f=f(M,Fo)$, $f\in L_{R_N}^1(R)$ - частинно-безперервна обмежена функція. Крім того, нехай при дійсних Ω виконана нерівність:

$$\phi(\Omega)Id_{R^N}\le\delta(\Omega),\qquad(29)$$

де $\phi=\phi(\Omega)$ – деяка безперервна додатна функція. Тоді для розв'язку задачі (1) $\Theta=\Theta(M,Fo)$ з нульовими початковими умовами збігаються наступні інтеграли:

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\partial\Theta(M,Fo)}{\partial Fo}\right|^2 dFo<+\infty,\qquad(30)$$

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\partial^2\Theta(M,Fo)}{\partial Fo^2}\right|^2 dFo<+\infty.\qquad(31)$$

Доведення. Використовуючи **лему 2** і обмеженість τ отримаємо, що функції $\Theta=\Theta(M,Fo)$ та $y=\dfrac{\partial\Theta(M,Fo)}{\partial Fo}$ обмежені. Звідси і з рівняння (1) визначаємо, що функція $\left|\dfrac{\partial^2\Theta(M,Fo)}{\partial Fo^2}\right|$ також обмежена. Тим самим:

$$\int_0^{T+1}|f_T(M,Fo)|dFo<C_0.\qquad(33)$$

Тут і нижче С величини, не залежні від параметра T. З обмеженості $\dfrac{\partial\Theta(M,Fo)}{\partial Fo}$ і $\dfrac{\partial^2\Theta(M,Fo)}{\partial Fo^2}$, інтегрованості $f(M,Fo)$ і співвідношення (33) випливає нерівність:

$$\int_0^{T+1}\left(\frac{\partial v_T(M,Fo)}{\partial Fo}(f(Fo)+f_T(Fo))\right)dFo<C_1.\qquad(34)$$

З (28) та (34) отримаємо:

$$\begin{aligned}&C_1>\int_{-\infty}^{+\infty}(v_T(M,Fo),\Gamma v(Fo))ds=\\&(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\Omega^2|v_{TF}(\Omega)|^2+\\&+2^{-1}\big(|v_{TF}(\Omega)|,K_F(\Omega)+K_F(\Omega)^+\big)|v_{TF}(\Omega)|\Big)d\Omega-\\&-\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(v_T(s),\big(W(u_T(s))+F_1(u_T(s),v_T(s))v(s)\big)\Big)ds-\\&-\int_{-\infty}^{+\infty}\left(v_T(Fo),F_2(u_T(Fo),v_T(Fo))\frac{\partial v_T(M,Fo)}{\partial Fo}\right)dt.\end{aligned}\qquad(35)$$

Справедливі нерівності:

$$2^{-1}\left(K_F(\Omega)+K_F(\Omega)^+\right)>C_2 Id_{R^N},\ \|W(u_T(Fo))\|<C_3,$$

$$\|F_1(u_T(s),v_T(s))\|<C_4,\ \|F_2(u_T(Fo),v_T(Fo))\|<C_5.$$

При підстановці яких в (35) виходить співвідношення:

$$(2\pi)C_1 > \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\Omega^2 + C_2 - C_3 - C_4 - C_5 \left|(\Omega)\right|\right) \left|v_{TF}(\Omega)\right|^2 d\Omega \; . \qquad (36)$$

Виберемо деяку додатну величину Ω_0 так, що при $|\Omega| > \Omega_0$

$$\left(\Omega^2 + C_2 - C_3 - C_4 - C_5 \left|(\Omega)\right|\right) > C_6 > 0 \; .$$

Тоді з (36) отримуємо нерівність:

$$\begin{aligned} (2\pi)C_1 > &\int_{|\Omega|>\Omega_0} \left|v_{TF}(\Omega)\right|^2 d\Omega + \\ &+ \left(C_2 - C_3 - C_4 - C_5 \left|(\Omega)\right|\right) \int_{|\Omega|<\Omega_0} \left|v_{TF}(\Omega)\right|^2 d\Omega. \end{aligned} \qquad (37)$$

Застосуємо **лему 2** до рівняння (27), отримуємо нерівність:

$$\int \left(v_{TF}(\Omega), \delta(\Omega) v_{TF}(\Omega)\right) d\Omega < C_7 \; . \qquad (38)$$

Позначимо $\rho = \min_{|\Omega| \le \Omega_0} \left(\phi(\Omega)\right) > 0$. Тоді з (29), (38) виходить нерівність:

$$\int_{|\Omega|<\Omega_0} \left|v_{TF}(\Omega)\right|^2 d\Omega < \rho^{-1} C_7 \; .$$

Об'єднуючи отриману нерівність з (37), приходимо до співвідношення:

$$\int \left|v_{TF}(\Omega)\right|^2 d\Omega < C_8 \; . \qquad (39)$$

Звернемось знову до нерівності (36). З урахуванням (39) отримуємо:

$$\int \Omega^2 \left|v_{TF}(\Omega)\right|^2 d\Omega < C_9 \; . \qquad (40)$$

З (39), (40) отримуємо відповідно:

$$\int_0^T \left| \frac{\partial \Theta(M, Fo)}{\partial Fo} \right|^2 dFo < (2\pi)^{-1} C_8 \; ,$$

$$\int_0^T \left| \frac{\partial^2 \Theta(M, Fo)}{\partial Fo^2} \right|^2 dFo < (2\pi)^{-1} C_9 \; .$$

Оскільки праві частини в цих нерівностях не залежать від параметра T, інтеграли (30)- (32) збігаються. **Лема 3** доведена.

Завдяки **теоремі 3**, що визначає обмеженість, єдиність та існування розв'язків при релаксаційному впливі надало провести оцінку інтегральних доданків рівняння (1), що визначає математичну модель релаксаційного типу з інтегральними множниками для отримання нетривіальних розв'язків.

6. Висновки

Наведено оцінку збіжності та математичне обґрунтування використання математичної моделі ІДР теплопровідності для визначення релаксаційного температурного поля у екстремальних умовах впливу на тверді матеріал при часах релаксування системи.

Представлені оцінки носять достатньо загальний характер і можуть служити основою для побудови локально-нерівноважних моделей процесів переносу, що протікають у матеріалах.

Практична значущість отриманих результатів дозволяє проводити розрахунки при часах релаксування системи локально-нерівноважного стану у задачах тепломасопереносу.

Література

1. Быков, Я. В. Периодические решения дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений и их асимптотики [Текст] / Я. В. Быков, Д. Рузикулов; АН КиргССР, Ин-т математики. – Фрунзе: Илим, 1986. – 278 с.
2. Соболев, С. Л. Процессы переноса и бегущие волны в локально-неравновесных средах [Текст] / С. Л. Соболев // Успехи физ. наук. – 1991. –Т. 161, №3. – С. 5-29.
3. Веселовський, В. Б. Розв'язання задач теплопровідності для складених тіл при екстремальних впливах [Текст] / В. Б. Веселовський, Т. М. Босенко // Вісник Тернопільського державного технічного ун-ту. – 2009. – Т.14, № 1. – С. 168-179.
4. Карташов, Е. М. Новые интегральные соотношения в теории нестационарного теплопереноса на основе уравнения гиперболического типа [Текст] / Е. М. Карташов, О. И. Ремизова // РАН Энергетика, 2002. – №3. – С. 146-156.
5. Guo, D. Initial value problems for integro-differential equations of Volterra type in Banach spaces [Text] / D. Guo // Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. – 1994. – V. 7, N. 10. – P. 13-23.
6. Guo, D. Extreme solution of nonlinear, second order integro-differential equations in Banach spaces [Text] / D. Guo // Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. – 1995. – N. 3. – P. 319-329.
7. Босенко, Т. М. Математичні моделі нерівноважної термодинаміки в умовах теплового релаксування [Текст] / Т. М. Босенко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. – 2012. – Т.20, №5. – С. 114-121.
8. Шашков, А. Г. Волновые явления теплопроводности. Системно-структурный подход [Текст] / А. Г. Шашков, В. А. Бубнов, С. Ю. Яновский. – М.: Эдиториал УРСС, 2004. – 243 с.
9. Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / Ф. Хартман. – М., Мир, 1970. – 720 с.
10. Босенко, Т. М. Моделювання релаксаційних процесів теплопровідності з використанням розривно-асимптотичних методів [Текст] / Т. М. Босенко // Вісник Запорізького національного університету. – 2009. – Вип. 3. – С. 96-104.
11. Бойков, И. В. Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений [Текст] / И. В. Бойков. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2004. – 297 с.