

13. Suvorova, Ju. V. O kriterii prochnosti, osnovannom na nakoplenii povrezhdennosti, i ego prilozhenii k kompozitam [Text] / Ju. V. Suvorova // Izv. AN SSSR, Mehanika tverdogo tela.—1979.—№ 4.— S. 107—111.
14. Courant, R. On the solution of non-linear hyperbolic differential equation by finite differences [Text] / R. Courant, E. Isacson, M. Rees // Communs Pure Appl. Math.—1952.—S. 243—254.

Розглядається задача про вісесиметричні коливання пружної тонкостінної сферичної оболонки, яка заповнена рідиною, що стискується. При цьому рівняння руху побудовані в радіальних переміщеннях і з використанням спеціального потенціалу. Задача зводиться до дослідження однорідної системи двох рівнянь щодо радіального переміщення і згаданого потенціалу. Умова не тривіальності рішення системи призводить до трансцендентного рівняння

Ключові слова: коливання, хвиля, частота, щільність, оболонка, тиску, потенціал

Рассматривается задача об осесимметрических свободных колебаниях упругой тонкостенной сферической оболочки, заполненной сжимаемой жидкостью. При этом уравнения движения построены в радиальных перемещениях и с использованием специального потенциала. Задача сводится к исследованию однородной системы двух уравнений относительно радиального перемещения и упомянутого потенциала. Условие нетривиальности решения системы приводит к трансцендентному уравнению

Ключевые слова: колебания, волна, частота, плотность, оболочка, давления, потенциал

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЖИДКОСТЬЮ ОБРАТНЫМ МЕТОДОМ

Г. А. Мамедова

Кандидат физико-математических наук, доцент*

Email: gular-gulshan@rambler.ru

М. А. Рустамова

Кандидат физико-математических наук, доцент*

Email: mehsetir@yahoo.com

С. Р. Агасиев

Диссертант

Кафедра "Эксплуатация и реконструкция
сооружения и здания"

Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет

ул. Айна Султанова 5, г. Баку, Азербайджанская

Республика, AZ1141

Email: bakisamir@mail.ru

*Отдел «Волновой динамики»

Институт Математики и Механики

Национальной Академии Наук Азербайджана

ул. Б. Вахабзаде, 9, г. Баку,

Азербайджанская Республика, AZ1141

1. Введение

Одной из важнейших задач на стадии проектирования тонкостенных оболочечных конструкций, широко применяемых в авиационной, ракетно-космической технике и различных областях промышленности, является динамический расчет. Необходимым элементом исследования динамики оболочек является определение собственных частот и форм малых колебаний, причем наибольший интерес для приложений представляют частоты из нижнего спектра [1].

Важное место среди динамических контактных задач теории оболочек занимают задачи о свободных колебаниях упругих тонких оболочек, контактирующих с упругой твердой средой и жидкостью.

В работах [2, 3, 6 – 10] исследуются частоты и формы свободных колебаний сферической и цилиндрической оболочек, контактирующих с упругой и

жидкой средой, в частности асимптотическими методами получены приближенные простые формулы для вычисления частоты и определения формы колебаний рассмотренных систем, а это ограничивает использование полученных результатов, исключая в ряде важных случаев возможность проведения качественного анализа исследуемых процессов.

Кроме того, в работе [4] рассмотрены свободные осесимметрические колебания тонкостенной бесконечной цилиндрической оболочки, содержащей сжимаемую жидкость. Поскольку нахождение собственных частот связано с решением трансцендентных уравнений, здесь частота колебаний оболочки, не содержащей жидкость, выражена через частоту колебаний системы в явном виде, что позволяет как аналитически, так и графически исследовать спектры частот системы.

В данной работе исследуется свободное колебание сферической оболочки с жидкостью.

2. Постановка задачи

В работе уравнения движения сферической оболочки разделены две части: систему, описывающую потенциальное движение, и уравнение, описывающее вихревое движение. Первая система в случае тонкостенной оболочки будет иметь вид

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \cdot \frac{2}{r^2} W + \frac{1}{r^2} \Delta_0 W + \frac{4\nu-3}{(1-2\nu)r^2} \Delta_0 \Phi + \lambda^2 W - \frac{p\omega}{Gh} = 0,$$

$$\frac{4(1-\nu)}{1-2\nu} \cdot \frac{1}{r^2} W + \frac{1}{r^2} \Delta_0 W + \frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)r^2} \Delta_0 \Phi + \lambda^2 \Phi = 0,$$

(1)

(p = h\omega e^{i\omega t})

здесь,

$$\lambda^2 = \frac{q\omega^2}{Gh},$$

где ν - коэффициент Пуассона; r - радиус оболочки; h - толщина; p - давление жидкости на оболочку; ω - частота; q - плотность материала оболочки; G - модуль сдвига; W - радиальное смещение.

$$\Delta_0 = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \text{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2},$$

где ϕ, θ - сферические координаты.

Поверхностные смещения u и ϑ представлены в виде

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \phi},$$

$$\vartheta = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} - \frac{\partial F}{\partial \theta},$$

где Φ, F - функции, описывающие потенциальную и вихревую составляющую движения.

Давление жидкости определяется для случая потенциального движения сжимаемой жидкости следующим образом.

$$p = -\rho \frac{\partial \Pi}{\partial t},$$

(2)

где ρ - плотность жидкости, r - расстояние от центра, Π - потенциал скорости, удовлетворяющей уравнению

$$a^2 \Delta \Pi = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2},$$

(3)

где Δ - оператор Лапласа, a - скорость распространения возмущений в жидкости.

Радиальная скорость оболочки и потенциал скорости жидкости на поверхности контакта связаны соотношением.

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = \frac{\partial \Pi}{\partial r},$$

(4)

где u_r - радиальное перемещение оболочки, или учитывая, что при колебаниях

$$\Pi = \Pi_\omega e^{i\omega t},$$

$$u_r = W e^{i\omega t},$$

имеем

$$\omega W = \frac{\partial \Pi_\omega}{\partial r}.$$

(5)

Согласно (2), при колебаниях будет

$$p_\omega = \rho \omega \Pi_\omega.$$

(6)

А уравнение (3) обратится в уравнение Гельмгольца, решением которого, отвечающим рассматриваемой задаче о свободных колебаниях сферической оболочки, будет

$$\Pi_\omega = \frac{\Pi_n}{\sqrt{r}} Z_{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\omega r}{a} \right) \cdot \bar{Y}_n(\theta, \phi) \quad (n=1,2,\dots),$$

(7)

где $Z_{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\omega r}{a} \right) = j_n \left(\frac{\omega r}{a} \right) \cdot \bar{Y}_n(\theta, \phi)$ - сферическая гармоника.

Здесь $j_n \left(\frac{\omega r}{a} \right)$ - сферическая функция Бесселя первого рода

$$j_n \left(\frac{\omega r}{a} \right) = \sqrt{\frac{\pi a}{2\omega r}} \cdot J_{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\omega r}{a} \right).$$

(8)

Неизвестные функции в (1) также выражаются при помощи сферических гармоник

$$W = W_n \bar{Y}_n(\theta, \phi); \quad \Phi = \Phi_n \bar{Y}_n(\theta, \phi).$$

(9)

Из (7) и (8) следует

$$\Pi_\omega = \frac{\Pi_n}{r} \sqrt{\frac{\pi a}{2\omega}} \cdot J_{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\omega r}{a} \right) \cdot \bar{Y}_n(\theta, \phi).$$

(10)

Из (5), (9) и (10) можно получить

$$W_n = \frac{\Pi_n}{\rho \omega} \sqrt{\frac{\pi a}{2\omega}} \left[\frac{\omega}{a} J'_{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\omega r}{a} \right) - \frac{1}{r} J_{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\omega r}{a} \right) \right].$$

(11)

Из (6), (10) и (11) можно определить давление p следующим образом

$$p = \frac{\rho \omega^2 J_{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\omega r}{a} \right) \cdot W_n \bar{Y}_n(\theta, \phi)}{\frac{\omega}{a} J'_{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\omega r}{a} \right) - \frac{1}{r} J_{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\omega r}{a} \right)}.$$

(12)

учитывая, что функции в (9) удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \Delta_0 W + n(n+1)W &= 0; \\ \Delta_0 \Phi + n(n+1)\Phi &= 0; \end{aligned} \quad (13)$$

и используя (12), (13) и (11) в (1), получим

$$\begin{aligned} &\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \cdot \left(\lambda^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) W_n + \\ &+ \frac{n(n+1)(4\nu-3)}{2(1-\nu)r^2} \Phi_n - \\ &- \frac{1}{Gh} \frac{\rho \omega^2 J_{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\omega r}{a} \right) \cdot W_n \bar{Y}_n(\theta, \phi)}{a J'_{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\omega r}{a} \right) - \frac{1}{r} J_{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\omega r}{a} \right)} = 0 \\ &\frac{2W_n}{r^2} + \left(\lambda^2 - \frac{2n(n+1)(1-\nu)}{(1-2\nu)r^2} \right) \Phi_n = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнение (14) будет иметь нетривиальное решение при

$$\begin{vmatrix} \frac{\omega^2}{M} - n(n+1) - \frac{\rho}{qM} \omega^2 \zeta & \frac{n(n+1)(4\nu-3)}{1-\nu} \\ 2 & \frac{\omega^2}{M} - \frac{2n(n+1)(1-\nu)}{1-2\nu} \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$\zeta = \frac{J_{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\omega r}{a} \right)}{a J'_{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\omega r}{a} \right) - \frac{1}{r} J_{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\omega r}{a} \right)} \quad M = \frac{Gh}{r^2 q},$$

или

$$\begin{vmatrix} \frac{\omega^2}{M} \left(1 - \frac{\rho \zeta}{q} \right) - n(n+1) & n(n+1)\alpha \\ 2 & \frac{\omega^2}{M} - n(n+1)\beta \end{vmatrix} = 0, \quad (15)$$

здесь

$$\alpha = \frac{4\nu-3}{1-\nu}; \quad \beta = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}.$$

Из (15) следует

$$\begin{aligned} &\frac{\omega^4}{M^2} \left(1 - \frac{\rho \zeta}{q\omega} \right) - n(n+1) \left[1 + \beta - \frac{\rho \zeta \beta}{q} \right] \frac{\omega^2}{M} - \\ &- n^2(n+1)^2 \beta - 2n(n+1)\alpha = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Последнее имеет решение

$$\frac{\omega^2}{M} = \frac{n(n+1) \left[1 + \beta \left(1 - \frac{\rho \zeta}{q} \right) \right] \pm \sqrt{\left\{ n(n+1) \left[1 + \beta \left(1 - \frac{\rho \zeta}{q} \right) \right] \right\}^2 + 4(2\alpha - n(n+1)\beta)n(n+1)}}{2 \left(1 - \frac{\rho \zeta}{q} \right)} \quad (17)$$

При отсутствии жидкости (16) примет вид

$$\frac{\omega_0^2}{M} = \frac{n(n+1)(1+\beta) \pm \sqrt{\{n(n+1)(1+\beta)\}^2 + 4(2\alpha - n(n+1)\beta)n(n+1)}}{2} \quad (18)$$

Исключив из (16) и (17) M, получим

$$\omega_0^2 = \omega^2 \frac{\left(n(n+1)(1+\beta) \pm \sqrt{\{n(n+1)(1+\beta)\}^2 + 4(2\alpha - n(n+1)\beta)n(n+1)} \right)}{n(n+1) \left[1 + \beta \left(1 - \frac{\rho \zeta}{q} \right) \right] \pm \sqrt{\left\{ n(n+1) \left[1 + \beta \left(1 - \frac{\rho \zeta}{q} \right) \right] \right\}^2 + 4(2\alpha - n(n+1)\beta)n(n+1)}} \quad (19)$$

Формула (19) выражает зависимость ω_0 от ω .

Уравнение (19) связывает свободную частоту системы со свободной частотой оболочки в отсутствии жидкости. Нахождение частот свободных колебаний системы в целом связано с решением трансцендентного уравнения (16).

При решении трансцендентного уравнения часто авторы прибегают к приближенным методам, в частности к асимптотическим [5]. Однако, решение обратной задачи позволяет строить спектр частот графики, что упрощает исследование, в том числе определение частоты.

При некоторых данных значениях параметров задачи на интервале $0-6 \cdot 10^7$ для $N(\omega)$ и $0-25$ для ω построены графики $N(\omega)-\omega$ рис. 1. ($N(\omega) = \omega_0$). На рисунках показаны три фрагмента частотного спектра $\omega-\omega_0$ для трёх значений отношения плотности жидкости к плотности оболочки.

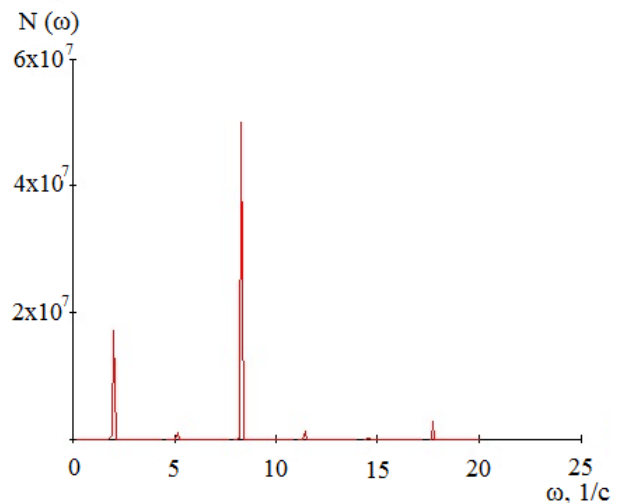


Рис. 1. Зависимость частот колебаний оболочки, не содержащей жидкость $N(\omega)$, от системы ω $r = 100, a = 500, \frac{\rho}{q} = 0.3$

На интервале $0-1.5 \cdot 10^3$ для $N(\omega)$ и $0-25$ для ω построены графики $N(\omega)-\omega$ рис. 2. ($N(\omega) = \omega_0$).

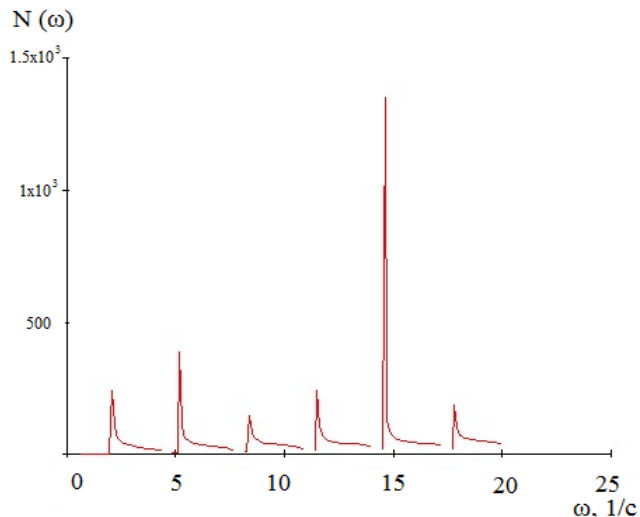


Рис. 2. Зависимость частот колебаний оболочки, не содержащей жидкость $N(\omega)$,

от системы ω $\gamma = 100$, $a = 500$, $\frac{p}{q} = 0.05$

На интервале $0-300$ для $N(\omega)$ и $0-25$ для ω построены графики $N(\omega) - \omega$ рис. 3. ($N(\omega) = \omega_0$).

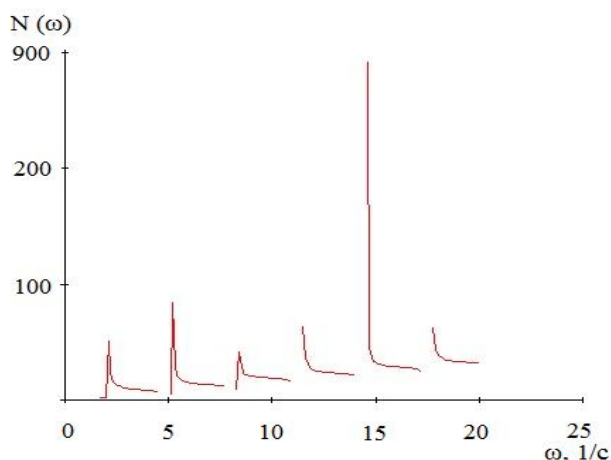


Рис. 3. Зависимость частот колебаний оболочки, не содержащей жидкость $N(\omega)$,

от системы ω $\gamma = 100$, $a = 500$, $\frac{p}{q} = 0.01$

3. Выводы

Рассмотрим участок графика соответствующий первой моде колебаний жидкости. С увеличением ω_0 (жёсткости оболочки) частота собственных колебаний системы ω заметно нарастая, затем замедляет рост, асимптотически приближаясь к некоторому значе-

нию, соответствующему жёсткому закреплению. На второй моде колебаний жидкости при небольшом ω_0 (жёсткости) частота системы ω , начиная со значения, соответствующего жёсткому закреплению при первой моде, сначала быстро возрастает с последующим замедлением, асимптотически приближаясь к значению, соответствующему жёсткому закреплению для второй моды. Аналогичная картина наблюдается и для последующих мод. Следует отметить, что имеет место чередование крутизны кривых для последующих мод.

Анализируя характер кривых в зависимости от значений различных параметров, следует отметить: увеличение скорости звука в жидкости увеличивает крутизну кривой $\omega - \omega_0$.

Литература

1. Михасев, Г. И. Локализованные колебания и волны в тонких оболочках. Асимптотические методы [Текст] / Г. И. Михасев, П. Е. Товстик.- М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.- 292 с.
2. Латифов, Ф. С. Колебания оболочек с упругой и жидкой средой. Баку [Текст] / Ф. С. Латифов // Элм, 1999, 164 с.
3. Chen, W. Q., Cai J.B., Ye G.R., Ding H.J. (2000). On eigenfrequencies of an anisotropic sphere. Trans.ASME.J.Appl. Mech. 67, №2, с 422-424.
4. Сейфуллаев, А. И. Влияние плотности среды на свободные колебания цилиндра содержащего сжимаемую жидкость [Текст] / А. И. Сейфуллаев, Г. А. Мамедова // Механика – машиностроение, 2011. - №1 - С. 28-32
5. Смирнов, В. Н. Курс высшей математики [Текст] / В. Н. Смирнов // Т.3, ч.2, М., Наука, 1974. - 672с.
6. Балакирев, Ю. Г. Осе симметричные колебания полой сферической оболочки с жидкостью [Текст] / Ю. Г. Балакирев // Инженерный журнал МТТ. 1967. - № 5. - С. 116123.
7. Eynatollah, A. Taheri. Investigation of Free Vibrations Of Spherical Inclusion Containing Elastically Suspended Mass Situated in Acoustic Medium by the Inverse Method [Текст] / Eynatollah A. Taheri, Rustamova Mashati // International Journal of Nanosystems, 2010. - Vol.3. - P.23-25
8. Голованов, А. И. Исследование свободных колебаний оболочек методом конечных элементов // Исследования по теории пластин и оболочек. Вып. 23, Казань, КГУ, 1991. -с. 81-85.
9. Грибков, В. А. Основные итоги исследования динамических характеристик оболочек, заполненных жидкостью: анализ и жидкостью // Сб. научн. трудов симпозиума. Новосибирск, 1992. - С. 61 - 66.
10. Huang, H., Lu Y.P., Wang Y.F.F. Transient interaction of spherical acoustic waves a cylindrical elastic shell and it's internal multi-degree-of – freedom mechanical systems. J.Acoust. Soc. America 1974 vol 56, №1. p. 4-10.