Розглянуто математичні моделі процесів розтягування і стиснення для одновимірних твердих систем на основі аналізу поведінки при прикладеним постійним навантаженні ланцюгів частинок з кінцевою масою. Побудовано одно-, двох - і N-часткові дискретні моделі, для останніх здійснені граничні переходи до континууму (неперервним моделям)

Ключові слова: процеси розтягування та стиснення, граничний перехід до континууму, закон Гука

Рассмотрены математические модели процессов растяжения и сжатия для одномерных твердых систем на основе анализа поведения при приложенной постоянной нагрузке цепочек частиц с конечной массой. Построены одно-, двух- и N-частичные дискретные модели, для последних осуществлены предельные переходы к континууму (непрерывные модели)

Ключевые слова: процессы растяжения и сжатия, предельный переход к континууму, закон Гука

УДК 536-12.517.956.4:622

ОДНОМЕРНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАСТЯЖЕНИЯ И СЖАТИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

И. Р. Венгеров
Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
Институт физики горных процессов НАН Украины
ул. Розы Люксембург, 72, г. Донецк, Украина, 83114
E-mail: igor-vengerov@rambler.ru

1. Введение

При математическом моделировании процессов в геомеханике и в физической механике используются методы теории упругости, пластичности, ползучести [1].

Одномерные модели являются приемлемой идеализацией в ряде случаев, поскольку многомерные сложные как для аналитических, так и для численных методов. Базисным уравнением для построения более сложных моделей является уравнение теории упругости в перемещениях (уравнение Ламе) [2], однако его решения являются волновыми (периодическими) и не описывают эволюцию полей смещений и напряжений. Принято считать, что в основе этого уравнение лежит закон Гука о пропорциональности относительного удлинения растягиваемого стержня приложенному растягивающему напряжению. Этот закон является макроскопическим и не может, как это предлагается в [3], обосновываться выражением для квазиупругой силы взаимодействия между частицами в кристаллической решетке, т. е. соотношением, верным на микроуровне. Кроме того, закон Гука, иногда называемой уравнением состояния твердого тела, описывает стационарное состояние системы, а не переходные процессы в ней.

Настоящая работа посвящена устранению этих противоречий путем анализа дискретных и соответствующих им континуальных моделей растяжения и сжатия и выявлению фактического статуса закона Гука. Оказывается, что последний не реализуется в системах без диссипации как для дискретных, так и для континуальных моделей.

2. Анализ литературных источников

Анализу встречающихся при математическом моделировании физических процессов (механических, теплофизических, электрофизических) разного рода парадоксов, противоречий и ошибок посвящено, относительно их общего числа, немного работ [4 – 8]. Такой анализ зачастую не только вносит ясность в казалось бы уже установленные теории и концепции, в фундаменте которых имеются «трещины» (обычно вроде – бы и не мешающие их использованию), но и позволяет находить новые взаимоотношения в областях, считающиеся хорошо изученными. В области механики сплошных сред, теория упругости, базирующаяся на законе Гука, широко применяется в многочисленных приложениях [1 – 3]. Тем не менее, тот факт, что уравнение упругости в перемещениях (уравнение Ламе) практически не пригодно, в качестве базиса, для построения теорий эволюционных термомеханических полей (пластичности, ползучести, вязкоупругости и т. д.), поскольку не учитывает диссипацию и описывает волновые процессы, был отмечен в литературе лишь недавно [9].

Наряду с вышеупомянутыми принципами, популярными методом получения уравнений в частных производных, описывающих процессы переноса импульса, массы, тепла и заряда, является рассмотрение одномерных цепочек частиц с конечной массой, взаимодействующих между собой с последующим предельным переходом к континууму [9 – 12]. Этим методом получены волновые уравнения [11, 12] и класс квазилокальных параболических уравнений теплопереноса [6]. В подавляющем большинстве работ, следующих [13], рассматриваются случаи воздействия на цепочку масс силы, изменяющейся гармонически. Для анализа статуса закона Гука необходимо рассмотреть цепочки и непрерывные (континуальные) модели с постоянной приложенной к ним растягивающей (сжимающей) силой. В связи с этим были сформулированы следующие цель и задачи исследований.

3. Цель и задачи исследований

Определить связи закона Гука с математическими моделями процессов растяжения и сжатия одномерных цепочек масс и соответствующих им континуальных моделей («стержень», «струна»). Для достижения этой цели необходимо решить следующие задачи:

1) сформулировать дискретные одно-, двух- и многомассовые (N-массовые) модели процессов растяжения (сжатия) цепочек с близкодействием масс, моделируемом пружинами, связывающими две любые смежные массы без учета диссипации механической энергии;

2) решить уравнение движения для упругих моделей и проверить связь их с законом Гука;

3) осуществить континуализацию цепочек из N масс, получить уравнения движения в случае отсутствия диссипации и выявить связь с законом Гука;

4) сформулировать те же модели, что и в задаче 1, но с учетом диссипации;

5) решить задачу 2 с учетом диссипации;

6) решить задачу 3 с учетом диссипации.

4. Построение дискретных моделей

4. 1. N-частичная модель

Рассматривается цепочка из N частиц с массой m_0 у каждой, соединенных посредством N пружин с коэффициентом упругости K. Длина каждой из пружин в свободном состоянии – a, общая длина цепочек $L = Na$. Левый край цепочки закреплен в точке x=0, а к правому краю к пружинке N (x=L) в момент t=0 прикладывается сила F_e (о ситуации, когда сила сжимающая, будет сказано дальше). Растягивающая сила F_e совпадает по направлению с осью Ox и считается положительной. Координаты частиц, считаемых материальными точками, в начальный момент времени $t=0$ (сила прикладывается в момент $t=0+0$), таковы: крайне левая точка (нулевая) - $x_0(0)=x_0(t)=0$, первая - $x_1(0)=x_{10}=a$, вторая точка - $x_2(0)=x_{20}=2a$, K-я точка - $x_к(0)=x_{к0}=Ka\left(K=\overline{1,N}\right)$. После приложения силы F_e материальные точки начинаются сдвигаться вправо и при некотором t имеют координаты $x_к=x_к(t)=Ka+U_K(t)$. Здесь $U_K(t)$ - смещение K-й точки от своего равновесного состояния $x_{к0}=Ka$ к моменту времени t.

На K-ую точку $\left(K=\overline{1,N-1}\right)$ действуют две силы: неправленая вправо (в сторону возрастающих x) $F_K^{(+)}$, обусловленная растяжением (K+1)-й пружины и «тормозящая» сила - $F_K^{(-)}$, обусловленная реакцией на растяжение K-й пружины:

$$F_K^{(+)}=F_K^{(+)}(t)=K\left(x_{K+1}(t)-x_K(t)-a\right),$$
$$\left|F_K^{(-)}\right|=\left|F_K^{(-)}(t)\right|=K\left(x_K(t)-x_{K-1}(t)-a\right). \tag{1}$$

Поскольку смещение К-й точки - $U_K(t)=x_K(t)-x_{K0}$, $\dot{U}_K(t)=\upsilon_K(t)=\dot{x}_K(t)$, $\ddot{U}_K(t)=\dot{\upsilon}_K(t)=\ddot{x}_K(t)$. Смещение нулевой точки $U_0(t)=x_0(t)=0$, N-й точки - $U_N=x_N(t)=x_{N0}=x_N(t)-L$. Уравнения движения (второй закон Ньютона) для материальных точек цепочки будут иметь вид:

– для нулевой точки: $U_0(t)=0$ (t>0);

– для первой точки:

$$m_0\ddot{U}_1=F_1^{(+)}-\left|F_1^{(-)}\right|=K\left(U_2(t)-2U_1(t)\right); \tag{2}$$

– для К-й точки $\left(K=\overline{2,N-1}\right)$:

$$m_0\ddot{U}_K=F_K^{(+)}-\left|F_K^{(-)}\right|=K\left(U_{K+1}(t)-2U_K(t)+U_{K-1}(t)\right); \tag{3}$$

– для N-й точки:

$$m_0\ddot{U}_N=F_e-K\left(U_N(t)-U_{N-1}(t)\right). \tag{4}$$

Таким образом, для N неизвестных $\left\{U_K(t)\right\}$ $\left(K=\overline{1,N}\right)$ имеем N уравнений ((2), (4) и N-2 уравнение (3)), что обеспечивает определенность задачи. Для частных случаев одно- и двухмассовых систем (т. е. при N=1 и N=2) получаем из (3) и (4):

– для одномассовой системы:

$$m_0\ddot{U}_1=F_e-KU_1,\ U_1(0)=0,\ \dot{U}_1(0)=0; \tag{5}$$

– для двухмассовой системы:

$$m_0\ddot{U}_1=K\left(U_2-2U_1\right),\ m_0\ddot{U}_2=F_e-K\left(U_2-U_1\right),$$
$$U_1(0)=U_2(0)=\dot{U}_1(0)=\dot{U}_2(0)=0. \tag{6}$$

4. 2. Решения для дискретных моделей

Одномассовая система. Уравнение и начальные условия даны (5), решение легко находим преобразованием Лапласа в (5) по t:

$$U_1(t)=\Delta a\left(1-\cos\omega_0 t\right),\ \Delta a=\frac{F_e}{K},\ \omega_0=\frac{K}{m_0}. \tag{7}$$

Полученное решение не имеет стационарного (при $t\to\infty$) значения, получить из него закон Гука (являющийся связью $\sigma_e=E\varepsilon$ между постоянными величинами – приложенным напряжением $\sigma_e=F_e/S_0$ и относительным удлинением $\varepsilon=U_1/a$) – нельзя ($\varepsilon=U_1(t)/a=\varepsilon(t)$). Возможно, однако, рассмотреть «слабый закон Гука», когда $\varepsilon=\text{const}$ обеспечивается усреднением $U_1(t)$ по интервалам времени $t\in[0,T]$, $t\in[T,2T]$, ... Здесь период колебаний $T=2\pi/\omega_0$. Имеем

$$\left\langle U_1(t)\right\rangle_T=\frac{1}{T}\int_0^T U_1(t)dt=\Delta a-\Delta a\left\langle\cos\omega_0 t\right\rangle_T=\Delta a,$$
$$\left\langle\varepsilon\right\rangle_T=\frac{\left\langle U_1(t)\right\rangle_T}{a}=\frac{\Delta a}{a}=\frac{F_e}{Ka}=\frac{\sigma_e}{E}, \tag{8}$$

где обозначены: $\sigma_e=F_e/S_0$, $Ka/S_0=E$. Таким образом, «слабый закон Гука» присутствует.

Двухмассовая система. Система уравнений (6) также может быть решена преобразованием Лапласа по t. В силу громоздкости этого решения, а также в силу того, что статус закона Гука определяется стационарными решениями, ограничимся качественными (но вполне достаточными для наших целей) соображениями. При обращении Лаплас-трансформант $\overline{U}_1(p)$

и $\bar{U}_2(p)$ возникают определяющие соответственно $U_1(t)$ и $U_2(t)$ функции вида

$$\mathrm{Re}\left\{\sum_{i=1}^{4}\frac{\bar{N}_1(p_i)}{\bar{M}'(p_i)}\exp(p_i,t)\right\} \text{ и } \mathrm{Re}\left\{\sum_{i=1}^{4}\frac{\bar{N}_2(p_i)}{\bar{M}'(p_i)}\exp(p_i,t)\right\}. \quad (9)$$

Величины p_i в (9) – корни биквадратного уравнения

$$\bar{M}(p) = p^4 + 3\omega_0^2 p^2 + \omega_0^4 = 0,$$

имеющие вид:

$$p_{1,2} = \pm i\omega_1,\ p_{3,4} = \pm i\omega_2,\ \omega_1 = \omega_0\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{1/2},$$

$$\omega_2 = \omega_0\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{1/2}. \quad (10)$$

Таким образом $U_2(t)$ (как и $U_1(t)$) зависит от периодичных функций с четырьмя частотами, в общем случае некратными друг другу. Это значит, что максимальный «поглощающий» период $T_4>T_3>T_2>T_1$ не содержат целых значений T_i ($i=\overline{1,3}$) и усреднение по периоду T_4 невозможно. Отсюда следует, что даже «слабый закон Гука» ввести нельзя и получить квазистационарное (усредненное) значение ε не удастся.

N-массовая система (цепочка). Все, ранее сказанное при анализе двухмассовой системы остается в силе, поскольку для цепочки из N осцилляторов, как показано в [13], также получается нестационарное решение, характеризующая теперь N частотами, не кратными друг к другу. Таким образом усреднение по «поглощающему» периоду невозможно, невозможно корректно ввести $\langle\varepsilon\rangle$, т. е. закон Гука даже в «слабом смысле» места не имеет.

5. Континуализация N–массовой цепочки

Полагаем $a\to 0$, $m\to 0$, $N\to\infty$, $N\cdot a = L = \mathrm{const}$, $N\cdot m_0 = M = \mathrm{const}$. Уравнение (3) приводится к виду:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\ U=U(x,t),\ U(0,t)=0,\ U(x,0)=0,$$

$$x\in(0,L). \quad (11)$$

При выводе (11) использованы соотношения:

$$M=\rho V,\ V=S_0 L,\ Ka/S_0 = E,\ E/\rho = c^2.$$

Уравнение (4) преобразуется к виду:

$$E\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=L} = \sigma_e,\ U=U(x,t),\ E=\mathrm{const},\ \sigma_e=\mathrm{const} \quad (12)$$

и приобретает смысл граничного условия при $x=L$. Одновременно (12) будет представлять собой закон Гука, если решение задачи покажет, что левая часть (12) равна, как и правая, константе. Дополнив краевую задачу (11) граничным условием (12) и вторым начальным условием $(\partial U/\partial t)_{t=0}=0$, решаем её преобразованием Лапласа по t.

Стандартная процедура приведет к выражению Лаплас-трансформанты решения:

$$\bar{U}(x,p) = \frac{\sigma_e c}{Ep^2}\left[\frac{\mathrm{sh}\left(\frac{p}{c}x\right)}{\mathrm{ch}\left(\frac{p}{c}L\right)}\right]. \quad (13)$$

Для $\bar{U}_L(p) = \bar{U}(L,p) = \sigma_e \mathrm{th}(\tau_L p)/p^2 E$ (где $\tau_L = L/c$) по таблицам изображений преобразования Лапласа [14] находим:

$$\bar{U}_L(p) \Rightarrow \bar{U}_L(t) = \frac{\sigma_e c}{E}\left[\tau_L + (-1)^n(2\pi\tau_L - \tau_L - t)\right],$$

$$t\in\left[(n-1)2\tau_L, n2\tau_L\right],\ n=1,2\ \ldots \quad (14)$$

Функция $U_L(t)$, как следует из [14] – периодическая, с периодом $T=4\tau_L$. На первом полупериоде, при $t\in(0,2\tau_L)$, функция $U_L(t)$ расчет линейно по t, изменяясь от нуля до максимально возможного значения $U_{L\max} = U_L(2\tau_L) = 2\sigma_e c\tau_L/E = 2\sigma_e L/E$. Затем, во втором полупериоде, при $t\in(2\sigma_L, 4\tau_L)$ также линейно по t убывает от $U_{L\max}$ до 0. На втором и последующих интервалах ($t\in(4\tau_L, 8\tau_L), t\in(8\tau_L, 12\tau_L)$ и т.д.) все повторится. Имеем треугольные колебания в положительном интервале $U_L(t)\in\left[0, U_{L\max}\right]$.

Следовательно, стационарного состояния нет, и закон Гука не соблюдается. Однако, поскольку в отличие от дискретной цепочки, где было N частот колебаний, здесь имеем одну частоту $\omega_L = 2\pi/T_L = 2\pi/4\tau_L = \pi/2\tau_L$, возможно усреднение по каждому из периодов T_L. Интегрирование по t, в силу линейности по t функции $U_L(t)$ на каждом из полупериодов, можно заменить множителем ½ перед $U_{L\max}$, что дает:

$$\left\langle U_L(t)\right\rangle_{T_L} = \frac{1}{2}U_{L\max} = \frac{\sigma_e L}{E},\ \langle\varepsilon\rangle = \frac{\left\langle U_L(t)\right\rangle_T}{L} = \frac{\sigma_e}{E}, \quad (15)$$

т. е. «слабый закон Гука» имеет место.

Мы рассматривали, как в дискретных моделях, так и в непрерывные процессы растяжения. Это определяется тем (и прямая проверка это подтвердила), что все уравнения и соотношения инвариантны относительно замены знака «+» на знак «-» одновременно у сил (когда $F_e\to -F_e$ – сжатие) и у смещений. Т.о. и далее достаточным является анализ моделей растяжения.

6. Дискретные модели с диссипацией

Учет диссипации механической энергии, т. е. анализ более реалистических моделей растяжения одномерных цепочек мы осуществляем, следуя [13], т. е. введя силу трения $F_{TP} = -\alpha\dot{U} = -\alpha\upsilon$, где υ – скорость движения частицы в дискретной модели и скорость смещения точки сплошной среды в континуальной модели. Коэффициент трения α имеет феноменологический характер, а роль «среды», оказывающей сопротивление, играет фононный газ [15].

Для одномассовой системы вместо (5) имеем уравнение

$$m_0\ddot{U}+\alpha\dot{U}_1=F_e-KU_1\,. \qquad (16)$$

Лаплас-трансформанта $\bar{U}_1(p)$, следующая из (16):

$$\bar{U}_1(p)=\frac{F_e}{\left[p^2m_0+\alpha p+K\right]}\,. \qquad (17)$$

Используем известную теорему операционного исчисления, согласно которой [14]:

$$U_{1,S}=\lim_{t\to\infty}U_1(t)=\lim_{P\to\infty}p\bar{U}(p)=\frac{F_e}{K}\,. \qquad (18)$$

Поскольку имеется стационарное решение $U_{1,S}$, имеет место и закон Гука:

$$\varepsilon=\frac{U_{1,S}}{a}=\frac{F_e}{Ka}=\frac{\sigma_e}{E}\,,\ \sigma_e=F_e/S_0\,,\ E=Ka/S_0\,. \qquad (19)$$

Для двухмассовой системы вместо (6) имеем уравнения:

$$m_0\ddot{U}_1+\alpha\dot{U}_1=K(U_2-2U_1)\,,$$
$$m_0\ddot{U}_2+\alpha\dot{U}_2=F_e-K(U_2-U_1)\,. \qquad (20)$$

Решение системы (20) преобразованием Лапласа дает:

$$\bar{U}_1(p)=\frac{K\bar{U}_2}{\left(m_0p^2+\alpha p+2K\right)},\ \bar{U}_2(p)=\frac{F_ep^{-1}+K\bar{U}_1(p)}{\left(m_0p^2+\alpha p+K\right)}\,. \quad (21)$$

Ранее использованным способом находим:

$$U_{1,S}=\Delta a\,,\ U_{2,S}=2U_{1,S}=2\Delta a\,,\ \varepsilon=\frac{U_{2,S}}{2a}=\frac{2\Delta a}{2a}=\frac{\sigma_e}{E}\,, \quad (22)$$

то есть вновь получаем закон Гука.

Для N-массовой системы все аналогично случаю *N=2*, но выкладки достаточно громоздки. Опуская их, замечаем, что и в этом случае закон Гука выполняется.

7. Непрерывные системы с диссипацией

Подстановка в (3) диссипативного члена $\alpha\dot{U}_K$ приводит после предельных переходов к континууму к уравнению вида:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\tau_r\frac{\partial U}{\partial t^2}=D_r\frac{\partial^2U}{\partial x^2}\,,\ U=U(x,t)\,,\ x\in(0,L)\,,\ t>0\,. \quad (23)$$

Здесьобозначены: $\tau_r=m_0/\alpha$, $D_r=\tau_rC^2$, $C=(E/\rho)^{1/2}$. Краевые условия к (23):

$$U(0,t)=0\,,\ E\frac{\partial U}{\partial x}\bigg|_{x=L}=\sigma_e\,,\ U(0,x)=\dot{U}(0,x)=0\,. \qquad (24)$$

Преобразовав (23) по Лапласу с учетом (24), получим

$$p\bar{U}+\tau_rp^2\bar{U}=D_r\frac{d^2\bar{U}}{dx^2}\,,\ U(0,p)=0\,,\ E\frac{\partial\bar{U}}{\partial x}\bigg|_{x=L}=\frac{\sigma_e}{p}\,. \qquad (25)$$

Находим $U_S(x)=\lim_{t\to\infty}U(x,t)=\lim_{p\to0}p\bar{U}(x_1p)$, для чего умножаем уравнение на *p* и переходим к пределу $p\to0$:

$$\lim_{t\to\infty}D_r\frac{d^2\left(p\bar{U}\right)}{dx^2}=\lim_{p\to0}p^2\left(1+\tau_rp\right)\bar{U}=D_r\frac{d^2U_S(x)}{dx^2}=0\,. \quad (26)$$

Дважды проинтегрировав (26)по *x* и учтя граничные условия, находим:

$$U_S(x)=\frac{\sigma_ex}{E}\,,\ U_S(L)=U_{L,S}=\frac{\sigma_eL}{E}\,,\ \varepsilon=\frac{U_{L,S}}{L}=\frac{\sigma_e}{E}\,, \quad (27)$$

т. е. вновь получаем закон Гука.

Уравнение (23), именуемое обычно телеграфным (хотя должно называться уравнением Кирхгофа [16]), по свойствам является более близким к параболическому уравнению (уравнению теплопроводности), чем к волновому уравнению (11). При $t_к>>\tau_r$ член $\tau_r\partial^2U/\partial t^2$ можно опустить и (23) перейдет в уравнение теплопроводности [6], которое описывает эволюционные поля, более существенные в ряде областей, чем волновые. Уравнение (23), после его обобщений (на многомерный случай, на неоднородную и нелинейную среды) может быть приемлемой альтернативой уравнению Ламе теории упругости, которое, не учитывая диссипацию, является аналогом уравнения Эйлера в гидродинамике, менее адекватного, чем уравнение Новье-Стокса, диссипацию учитывающее.

8. Выводы

1. Анализ одно-, двух и многомерных дискретных цепочек с протекающими в них в отсутствие диссипации процессами растяжения и сжатия показал, что с законом Гука в «слабом» смысле согласуется только одночастичная модель.

2. Предельный переход в *N*-частичной цепочке к континууму привел к волновому уравнению, решение которого оказалось периодическим, а поэтому тоже приводящая к «слабому» закону Гука.

3. Учет в моделях как дискретных, так и в непрерывных диссипации механической энергии, осуществленный введением в уравнение силы трения, приводит к закону Гука в его нормальной форме.

4. Полученное при континуализации *N*-частичной цепочки с учетом диссипации уравнение в частных производных – уравнение Кирхгофа (телеграфное) может служить базовым уравнением для дальнейшего развития теории эволюционных механических полей. Оно выгодно отличается от уравнения Ламе теории упругости, которое является волновым уравнением.

Литература

1. Надаи, А. Пластичность и разрушение твердых тел [Текст]: В 2-х томах, Т. 2 / А. Надаи; пер. с англ. – М: Мир, 1969. – 864 с.
2. Ландау, Л. Д. Теория упругости [Текст] : Изд-е 4-е / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 1987. – 248 с.
3. Фейнман, Р. Фейнмановские лекции по физике [Текст] / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс // Физика сплошных сред. – 1966. – Вып. 7. – 290 с.
4. Блехман, И. И. Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложений математики [Текст] / И. И. Блехман, А. Д. Мышкин, Я. Г. Пановко. – М.: Наука, 1983. – 328 с.
5. Харламов, П. В. Очерки об основаниях механики. Мифы, заблуждения и ошибки [Текст] / П. В. Харламов. – Киев: Наукова думка, 1995. – 408 с.
6. Венгеров, И. Р. Хроноартефакты термодинамики [Текст] / И. Р. Венгеров. – Донецк: Норд-пресс, 2005. – 236 с.
7. Боргардт, А. А. Поле равномерно ускоренного релятивистского заряда [Текст] / А. А. Боргардт, Д. Я. Карпенко. – Препринт ДонФТИ-88-2 (139)-Донецк: ДонФТИ им. А.А. Галкина НАНУ, 1988. – 30 с.
8. Гинзбург, И. Ф. Нерешенные проблемы фундаментальной физики [Текст] / И. Ф. Гинзбург // Успехи физических наук. – 2009. – Т. 179, № 5. – С. 525–529.
9. Венгеров, И. Р. Теплофизика деформируемых твердых тел: IV. Модели макроуровня [Текст] / И. Р. Венгеров // Физика и техника высоких давлений. – 2008. – Т. 18, № 1. – С. 7–24.
10. Вибрации в технике. Колебания линейных систем. Том 1 [Текст] : монография / под ред. В.В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.
11. Рабинович, М. И. Введение теорию колебаний и волн [Текст] / М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков. – М.: Наука, 1984. – 432 с.
12. Адрианов, А. Д. Аппроксимация Паде и континуализация для одномерной цепочки масс [Текст] / А. Д. Адрианов // Математическое моделирование. – 2006. – Т. 18. – С. 43–58.
13. Ландау, Л. Д. Механика [Текст] : Изд-е 2-е, исправл. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 1965. – 204 с.
14. Деч, Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования [Текст] / Г. Деч; пер. немецк. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
15. Малашенко, В. В. Влияние фононной вязкости и дислокационного взаимодействия на скольжение пары краевых дислокаций в кристалле с точечными дефекатами [Текст] / В. В. Малашенко // Физика твердого тела. – 2006. – Т. 48, Вып. 3. – С. 433–435.
16. Дуков, В. М. Электродинамика [Текст] / В. М. Дуков. – М.: Высшая школа, 1975. – 248 с.