

14. Чукбар, К. В. Стохастический перенос и дробные производные. [Текст] / К. В. Чукбар // ЖЭТФ. – 1995. – Т. 108, Вып. 5 (11). – С. 1875–1884.
15. Marquardt, T. Fractional Levy processes with an application to long memory moving average processes [Text] / T. Marquardt // Bernoulli. – 2006. – Vol. 12, Issue 6. – P. 1099–1126. doi:10.3150/bj/1165269152
16. Tarasov, V. E. Review of some promising fractional physical models [Text] / V. E. Tarasov // International Journal of Modern Physics B. – 2013. – Vol. 27, Issue 9. – P. 1330005. doi:10.1142/s0217979213300053
17. Savin, A. V. The coexistence and evolution of attractor in the web map with weak dissipation [Text] / A. V. Savin, D. V. Savin. – Arxiv: 1302.5361[nin CD], 2013. – P. 1–6.
18. Кошель, К. В. Хаотическая адвекция в океане [Текст] / К. В. Кошель, С. В. Пранц // Успехи физических наук. – 2006. – Т. 176, № 11. – С. 1177–1205.

Пропонується системна формалізація синтезу математичної моделі теплових процесів будівлі яка опалюється, що складається з безлічі взаємозалежних приміщень. Обґрунтовано вибір розмірності системи звичайних диференціальних рівнянь, що апроксимує рівняння теплопровідності. Застосування запропонованого підходу призводить до класичної кінцевої лінійної системи керування диференціальних рівнянь

Ключові слова: теплові процеси, теплопостачання будівель, математична модель, рівняння теплопровідності, диференціальні рівняння

Предлагается системная формализация синтеза математической модели тепловых процессов отопляемого здания, состоящего из множества взаимосвязанных помещений. Обоснован выбор размерности системы обыкновенных дифференциальных уравнений, аппроксимирующей уравнение теплопроводности. Применение предложенного подхода приводит к классической конечномерной линейной системе управляемых дифференциальных уравнений

Ключевые слова: тепловые процессы, теплоснабжение зданий, математическая модель, уравнение теплопроводности, дифференциальные уравнения

УДК 697.31

СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ ЗДАНИЙ

А. С. Куценко

Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой*

E-mail: kuzenko@kpi.kharkov.ua

С. В. Коваленко

Старший преподаватель*

E-mail: kova@kpi.kharkov.ua

В. И. Товажнянский*

*Кафедра системного анализа и управления Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт» ул. Фрунзе, 21, г. Харьков, Украина, 61002

1. Введение

Проблема экономии энергетических ресурсов в настоящее время стоит как никогда остро. Это связано как с естественными возрастающими потребностями человечества в комфортной среде обитания, так и с экономическим и политическим давлением стран-монополистов, контролирующими источники энергоносителей. Особенно остро проблема энергосбережения стоит перед странами с резко выраженным континентальным климатом, к которым относится Украина. По данным [1] расходы тепловой энергии на содержание зданий составляют около 2,3 Гдж/год, т. е. более 25 % в энергобалансе страны. Снижение расходов углеводородных энергоносителей на отопление зданий может достигаться различными путями. Во-первых,

это использование новых строительных материалов и технологий, позволяющих повысить термическое сопротивление ограждений зданий. Во-вторых, это использование альтернативных источников энергии в системах распределенной энергетики. В-третьих, это широкое использование систем автоматического управления теплоснабжением зданий. Среди перечисленных путей повышения тепловой энергоэффективности зданий последний является наименее затратным и, в то же время, единственным, обеспечивающим комфортность жизнеобеспечения в условиях суточных и сезонных колебаний внешних климатических условий. Именно на решение некоторых задач, составляющих актуальную проблему автоматизации управления процессом теплоснабжения зданий, направлена данная статья.

2. Анализ исследований и публикаций

Проблеме автоматизации процессов теплоснабжения в связи с ее актуальностью последние несколько десятилетий посвящено множество публикаций. Глубокий анализ проблемы содержится в обзоре [2]. Основой создания любой эффективно функционирующей системы управления является адекватная математическая модель управляемого процесса. Процесс теплоснабжения зданий представляет собой сложный динамический распределенный процесс теплообмена, протекающий в условиях неопределенностей большого числа физических и конструктивных параметров, а также внешних возмущающих климатических и технологических факторов. Перечисленные обстоятельства не позволяют построить детальную распределенную математическую модель тепловых процессов в здании, пригодную для анализа и синтеза систем управления теплоснабжением. Среди множества работ в области математического и компьютерного моделирования теплового состояния зданий можно выделить [3, 4], отличающиеся системным подходом к проблеме и попыткой учесть как можно большее число факторов, влияющих на процесс теплоснабжения зданий. Принятая на практике квазистатическая математическая модель тепловых процессов [5, 6] не позволяет адекватно прогнозировать температурные режимы элементов здания в условиях суточных и сезонных колебаний внешних климатических условий, а также в случаях изменения качества теплоносителя.

Математическая модель теплового процесса в ограждении здания, позволяющая учитывать процессы аккумуляции теплоты с одной стороны, и уйти от интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных, путем аппроксимации последних системой обыкновенных дифференциальных уравнений рассмотрены в [7, 8]. В то же время авторы работ рассматривают полученную аппроксимирующую систему совместно с дифференциальными уравнениями аккумуляции теплоты внутренним воздухом и наполнением помещений. Это приводит к жесткой системе дифференциальных уравнений в силу большого разброса постоянных времени аккумуляции теплоты внешним ограждением, внутренним воздухом и наполнением помещения.

3. Цели и задачи исследования

Целью настоящего исследования является разработка формализованного подхода к синтезу математической модели тепловых процессов здания хорошо адаптируемой к методам современной теории управления.

Для достижения этой цели предлагается на платформе системного подхода рассмотреть отапливаемое здание как систему взаимосвязанных помещений (элементов системы), взаимодействующих друг с другом, а также с окружающей средой и отопительными приборами – источниками тепла. На этой основе необходимо формализовать принципы построения математической модели тепловых процессов здания.

4. Обобщенная математическая модель тепловых процессов зданий

Тепловые процессы отапливаемых помещений представляют собой ряд взаимосвязанных между собой подпроцессов теплообмена и теплопередачи между элементами системы включающими: внутренний воздух, ограждение здания, внутреннее наполнение, отопительные приборы, вентиляционную систему. Перечисленные элементы взаимодействуют между собой и с окружающей средой путем теплообмена. На границах воздуха и элементов ограждения теплообмен осуществляется путем конвекции, а также лучеиспусканием. Также конвекцией передается теплота от отопительных приборов к внутреннему воздуху помещений. Теплота от внутренней к внешней поверхности ограждения передается путем теплопередачи. Также на основе теплопередачи осуществляются процессы энергообмена через перегородки помещений. Кроме тепловых процессов следует рассмотреть также и массообменные процессы, обусловленные необходимостью вентиляции помещений.

Таким образом, отапливаемое здание можно отобразить на графе $G = \{X, U\}$, где X – множество вершин графа, каждая из которых x_k ($k = \overline{1, n}$) соответствует внутреннему воздуху k -го помещения здания, а U – множество ребер графа, каждое из которых соответствует тепловому или материальному потоку между смежными помещениями. Отдельно следует выделить вершину графа x_0 , представляющую собой воздух окружающей среды.

Каждой вершине x_k графа можно поставить в соответствие термодинамические параметры воздуха (V_k, T_k) – объем и температуру соответственно. Каждому ребру u_{ij} соответствует вектор $(H_{ij}, c_{ij}, \rho_{ij}, F_{ij}, \lambda_{ij})$, где H_{ij} – толщина, F_{ij} – поверхность, c_{ij} – удельная теплоемкость, ρ_{ij} – плотность, λ_{ij} – коэффициент теплопроводности ограждения между элементами структуры i и j . Кроме перечисленных параметров системы, определяющих чисто тепловые процессы, необходимо ввести также и параметры, отвечающие за массообмен, связанный с вентиляцией помещений и возможным обменом воздушных масс между помещениями. В качестве такого параметра можно рассматривать кососимметрическую матрицу G_{ij} ($i, j = \overline{0, n}$) – массовых (или объемных) расходов воздуха между i -м и j -м элементом.

Каждое ребро структурного графа u_{ij} символизирует тепловой поток q_{ij} от элемента x_i к элементу x_j . В свою очередь тепловой поток q_{ij} определяется законами теплопередачи в соответствии с которыми в ограждении между i -м и j -м помещениями формируется нестационарное температурное поле $T_{ij}(x, t)$, где $x \in [0, H_{ij}]$ линейная координата, перпендикулярная поверхностям ограждения. Указанное температурное поле описывается дифференциальным уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial t} = a_{ij} \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где $a_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{c_{ij} \rho_{ij}}$ – коэффициент температуропроводности.

Таблица 1
Сравнение численного и аналитического решений для различных Bi и m

m	Bi				
	1	4	10	20	50
1	0,168	0,3388	0,4222	0,4504	0,4566
2	0,0584	0,1078	0,1231	0,1242	0,0512
3	0,0377	0,0645	0,0709	0,0401	0,0264
4	0,0304	0,0494	0,0637	0,0303	0,0141
5	0,0270	0,0425	0,0331	0,0255	0,0077

Таким образом, полная система дифференциальных уравнений математической модели тепловых процессов в сложной системе взаимосвязанных отапливаемых помещений состоит из n уравнений вида (4) и n уравнений вида (5) для внутреннего воздуха и внутренних аккумуляторов тепла, а также $n(n-1)/2$ систем дифференциальных уравнений вида (6), описывающих процесс теплообмена между помещениями и между помещениями и окружающей средой. Полученная система уравнений относится к классу тихоновских, поскольку постоянные времени подсистем вида (6) на 1–3 порядка превышают постоянные времени подсистем (4) и (5). Это позволяет [10] приравнять правые части уравнений (4) и (5) нулю и тем самым пренебречь скоростью нагревания (охлаждения) внутреннего воздуха и внутренних аккумуляторов по сравнению со скоростью нагревания (охлаждения) ограждений. В результате множество значений температур внутреннего воздуха помещений $T_i(t)$ может быть вычислено, исходя из системы n линейных алгебраических уравнений и системы линейных дифференциальных уравнений, состоящих из $n(n-1)/2$ подсистем вида (6).

Для замыкания полученной системы алгебраических и дифференциальных уравнений необходи-

мо каким-либо образом связать температуру $T_{ij}^1(t)$ первого слоя ограждения и температуру поверхности $T_{ij}(0,t)$. Для этого запишем уравнение баланса тепловых потоков на границе раздела воздуха и ограждения:

$$\alpha(T_i(t) - T_{ij}(0,t)) = \frac{2m\lambda_{ij}}{H_{ij}}(T_{ij}(0,t) - T_{ij}^1(t)). \quad (8)$$

Решение (8) относительно $T_{ij}(0,t)$ дает следующий результат:

$$T_{ij}(0,t) = \frac{Bi}{2m + Bi} T_i(t) + \frac{2m}{2m + Bi} T_{ij}^1(t),$$

который необходимо подставить в правую часть подсистемы (4), и тем самым исключить неизвестные температуры поверхностей ограждений.

6. Выводы

Тепловые процессы зданий представляют собой множество взаимосвязанных тепломассообменных процессов протекающих в различных помещениях здания. Математическая модель таких процессов, основанная на классических методах теплофизики, малоприменна для решения задач автоматизации процессов теплоснабжения. Предложенная и обоснованная в работе структура математической модели теплового процесса здания в виде конечномерной линейной системы дифференциальных уравнений открывает путь к эффективной адаптации всего спектра современных методов анализа и синтеза систем автоматического управления применительно к процессам теплоснабжения.

Литература

1. Маляренко, В. А. Анализ критерия энергоэффективности зданий и сооружений [Текст] / В. А. Маляренко, Н. А. Орлова // Интеграція технологій та енергозбереження. – 2004. – № 2. – С. 43–48.
2. Панферов, С. В. Некоторые проблемы энергосбережения и автоматизации в системах теплоснабжения зданий [Текст] / С. В. Панферов, А. И. Телегин, В. И. Панферов // Вестник ЮУрГУ. Серия "Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника". – 2010. – Вып. 12, № 22. – С. 79–86.
3. Табунщиков Ю. А. Математическое моделирование и оптимизация тепловой эффективности зданий [Текст] / Ю. А. Табунщиков, М. М. Бродач. – М.: АВОК-ПРЕСС, 2002. – 194 с.
4. Соколов, Е. Я. Теплофикация и тепловые сети [Текст] / Е. Я. Соколов 6 изд., перераб. – М.: Издательство МЭИ, 1999. – 472 с.
5. Medina, M. A. Validation and simulations of a quasi-steady state heat balance model of residential walls [Text] / M.A. Medina // Mathematical and Computer Modelling. 1999. – Vol. 30, Issue 7-8. – P. 93–102. doi:10.1016/s0895-7177(99)00166-1
6. Маляренко, В. А. Основы теплофизики будівель та енергозбереження [Текст] / В. А. Маляренко. – Х.: «Видавництво САГА», 2006. – 484 с.
7. Васильев, Г. П. Численный метод оптимизации прерывистого режима отопления [Текст] / Г. П. Васильев, В. А. Личман, Н. В. Песков // Математическое моделирование, 2010. – том 22. – №11. – С. 123–130.
8. Gabriel, T. Hybrid predictive control for building climate control and energy optimization [Text] / T. Gabriel // Preprints of 2013 IFAC Conference, SAIT Petersburg, Russia, 2013. – P. 337–342. doi:10.3182/20130619-3-ru-3018.00480
9. Куценко, А. С. Математическая модель теплового режима здания как объекта управления [Текст] : сб. трудов XXV Междунар. науч. конф./ А. С. Куценко, С. В. Коваленко; под общ. ред. А. А. Большакова; в 10 т. Т.4 // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-25. – Волгоград: Волгогр. Гос. техн. ун-т 2012; Харьков: Национ. техн. ун-т «ХПИ», 2012. – С. 190–191.
10. Jury, E. I. A note on multirate sampled-data system [Text] / E. I. Jury // Ibid. – 1967. – Vol. 12, №3. – P. 319–320. doi:10.1109/tac.1967.1098564