Розглянута прикладна задача багатокритеріальної оптимізації – вибору оптимальної структури ключових показників ефективності в інформаційній системі з різнорідними даними. Відношення переваг ґрунтуються на результатах вимірювань, імовірнісних оцінок і суб'єктивних суджень. Застосований модифікований метод аналізу ієрархій з точними обчисленнями власних значень матриці пріоритетів. Дані оцінки точності, стійкості і асимптотичної чутливості алгоритмів пошуку рішення

Ключові слова: ключові показники ефективності, стійкість, чутливість, інформаційна система, рівень пріоритетності, аналіз ієрархій

Рассмотрена прикладная задача многокритериальной оптимизации – выбора оптимальной структуры ключевых показателей эффективности в информационной системе с разнородными данными. Отношения предпочтений основаны на результатах измерений, вероятностных оценок и субъективных суждений. Применен модифицированный метод анализа иерархий с точными вычислениями собственных значений матрицы приоритетов. Даны оценки точности, устойчивости и асимптотической чувствительности алгоритмов поиска решения

Ключевые слова: ключевые показатели эффективности, устойчивость, чувствительность, информационная система, уровень приоритетности, анализ иерархий

УДК 004.272
DOI: 10.15587/1729-4061.2014.28024

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ И ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ МЕТОДА ПРИОРИТИЗАЦИИ КЛЮЧЕВЫХ ПАРАМЕТРОВ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Я. И. Торошанко
Кандидат технических наук,
старший научный сотрудник, профессор
Кафедра компьютерных систем и сетей
Государственный университет телекоммуникаций
ул. Соломенская, 7, г. Киев, Украина, 03680
E-mail: toroshanko@ukr.net

В. С. Шматко
Заместитель директора по учебной работе*
E-mail: kkz@ukr.net

М. С. Высочиненко
Преподаватель, заведующий лабораторией*
E-mail: vysochinenko_m@ukr.net

А. А. Булаковская
Аспирант
Кафедра компьютерных систем и компонентов
Национальный авиационный университет
пр. Космонавта Комарова, 1, г. Киев, Украина, 03058
E-mail: ryhz@yandex.ua
*Киевский колледж связи
ул. Леонтовича,11, г. Киев, Украина, 01030

1. Введение

Выбор ключевых показателей эффективности (КПЭ) сложной системы, в частности информационной системы (ИС), основывается на оценках значимости каждого КПЭ относительно других КПЭ, входящих в общий набор показателей. В сложных системах показатели эффективности, как правило, являются неоднозначными и противоречивыми, поэтому проблема оптимизации количества показателей и расстановки их по степени значимости, т. е. расстановки приоритетов, сводится к задаче многокритериальной оптимизации.

Не вдаваясь в детали выбора и обоснования метода многокритериальной оптимизации (очень подробное рассмотрение этих и множества других частных задач оптимизации дано в работе [1]), следует отметить, что выбор метода анализа иерархий [2] как вариант линейной взвешенной свертки критериев оптимизации для рассматриваемой задачи является приемлемым. Обоснование этого утверждения можно найти, в частности, в работе [3], где доказано, что для нестрого обратно-симметричных матриц парных сравнений решение исходной задачи (точка максимума целевой функции) может быть получено в точке, в которой достигается максимум линейной свертки. В работе [4] рассмотрен метод практического применения линейной взвешенной свертки критериев как частный случай для организации промышленного производства, а в работе [5] очерчены границы применимости метода анализа иерархий для расстановки приоритетов по ключевым показателям эффективности информационных систем.

Однако в доступных источниках отсутствуют данные об устойчивости метода анализа иерархий при больших отклонениях решений от точных значений и чувствительности решений к этим отклонениям. Кроме того, если при отклонениях, обусловленных малыми возмущениями элементов матрицы парных сравнений можно представлять возмущенное собственное значение матрицы сходящимся степенным рядом, то для больших возмущений такое представление уже не является корректным.

2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

Для расстановки приоритетов ключевых показателей эффективности методом анализа иерархий (МАИ) составляется так называемая матрица парных сравнений для критериев. Члены матрицы определяются на основании результатов анализа исходных данных. Парные сравнения применяются для того, чтобы абстрагироваться от конкретных значений характеристик ИС, которые играют роль частных критериев, и от размерностей данных характеристик. Это позволяет тем или иным способом свести задачу многокритериальной (векторной) оптимизации к совокупности взаимосвязанных скалярных задач однокритериальной оптимизации. Значение имеет только важность одного критерия по сравнению с другим. Степень важности одного критерия по отношению к другому, в соответствии с теоретическим обоснованием метода анализа иерархий [2], определяется методом экспертных оценок. Экспертами в широком смысле в рассматриваемой задаче могут выступать:

– администратор ИС;

– пользователи – заказчики услуг;

– экспертная система (ЭС), в которой накапливается и обрабатывается информация о текущем состоянии сети и коммутационных узлов.

Происхождение записей в базах данных ЭС может быть различным:

– из программного обеспечения стека коммуникационных протоколов (создание минимальных таблиц маршрутизации, записей об адресах особого назначения типа адресов локального тестирования, групповых или широковещательных адресов);

– от администратора системы (статические записи без ограничения срока жизни, сохраняющиеся при перезагрузке, а иногда – после выключения и повторного включения системного устройства);

– от стандартных протоколов управления системой (динамические записи с ограниченным сроком жизни).

Ранее для грубой оценки собственных значений как показателей, по которым оцениваются приоритеты в методе МАИ, рекомендовали использовать, например, среднегеометрические значения элементов строк матрицы парных сравнений [2]. Такие рекомендации обосновывались соображениями трудоемкости вычислительных процедур алгебраической проблемы собственных значений и недостатком вычислительных ресурсов.

В настоящее время, в связи с колоссальным увеличением вычислительных ресурсов и нагнетанием вычислительных мощностей в сетевое оборудование даже такие задачи могут решаться в процессе текущего управления компьютерной сетью. Поэтому в работе [3] предложен алгоритм принятия решений о выборе приоритетов, основанный на более точном методе вычисления собственных значений и собственных векторов, чем методы приближенного оценивания, предложенные в [2]. Для реализации алгоритма были использованы программы, разработанные на основе стандартных методов вычислительной математики. Метод решения, предложенный в работе [3], носит теоретический характер и нуждается в конкретизации применительно к информационной системе с разнородными данными. Поэтому здесь поставлена и решена задача приоритизации ключевых показателей эффективности ИС.

Предполагается, что матрица парных сравнений теоретически является строго обратно-симметричной [2]. На практике реальные матрицы парных сравнений таковыми не являются. Причины этого лежат, во-первых, в ошибках экспертов. Ошибки приводят к нарушениям обратной симметрии коэффициентов матрицы. Во-вторых, имеют место случайные ошибки методического характера, шумы и помехи при измерениях и вычислениях.

Отклонения от обратной симметрии матриц парных сравнений могут приводить к потерям устойчивости решения задачи на собственные значения, к повышению риска перескока на неверное решение в вычислении максимального собственного значения и, соответственно, в выборе риоритетов. Эти вопросы в работе [2] и других работах, посвященных проблеме анализа иерархий, не рассмотрены.

3. Цель и задачи исследования

В данной работе ставится задача оценки устойчивости вычислительных процедур метода анализа иерархий и его чувствительности к большим отклонениям от точных значений коэффициентов матрицы парных сравнений.

Пусть имеется матрица $\|\mathbf{A}\|$ парных сравнений с элементами $a_{ij} = 1/a_{ji}$, т.е. строго обратно-симметричная матрица. Обозначим собственные значения матрицы $\|\mathbf{A}\|$ λ_i, $i = \overline{1,N}$, где N – порядок матрицы, и пусть $\lambda_1 = \lambda_{max}$ максимальное собственное значение, которому соответствует главный приоритет и которое является простым по определению.

Рассмотрим матрицу $\|\mathbf{B}\|$ с элементами b_{ij}, которыми описываются отклонения от обратной симметричности. Представим искаженную матрицу в виде суммы исходной (точной) матрицы и матрицы искажений, умноженной на некий коэффициент ε: $\|\tilde{\mathbf{A}}\| = \|\mathbf{A}\| + \varepsilon\|\mathbf{B}\|$.

Если величины элементов $|a_{ij}| < 1$ и $|b_{ij}| < 1$ имеют одинаковый порядок, причем множитель $\varepsilon << 1$, то, в соответствии с теоремой Островского о непрерывности собственных значений [6] собственное значение $\tilde{\lambda}_1$ искаженной матрицы $\|\tilde{\mathbf{A}}\|$ может быть выражено через точное значение λ_1 в виде сходящегося степенного ряда $\lambda_1(\varepsilon) = \lambda_1 + k_1\varepsilon + k_2\varepsilon^2 + \ldots$, причем $\lambda_1(\varepsilon) \to \lambda_1$ при $\varepsilon \to 0$. При этом остальные собственные значения могут быть кратными.

Если же условие малости множителя ε не выполняется (что может иметь место, например, при больших отклонениях от согласованности в суждениях экспертов), полиномиальная аппроксимация функции $\lambda_1(\varepsilon)$ неприменима. В этом случае необходимо искать некие предельные значения ε, при которых риск изменения величины $\tilde{\lambda}_1$ до ближайшего меньшего собственного значения λ_i, $i=\overline{2,N}$ еще можно считать пренебрежимо малым (т. е. величиной второго порядка малости для рассматриваемой задачи).

Поэтому целью работы является исследование устойчивости МАИ и его чувствительности «в большом» при уточненной оценке собственных значений и собственных векторов с учетом специфики матрицы приоритетов. Для решения этой задачи необходимо, во-первых, определиться с выбором вещественной функции комплексного собственного значения и собственного вектора в качестве однозначного параметра решения в задаче локализации собственных значений. Соответственно, необходимо обосновать применимость выбранного параметра матрицы. Во-вторых, необходимо исследовать чувствительность метода поиска собственных значений обратно-симметричной матрицы парных сравнений к возмущениям элементов этой матрицы. Для этого целесообразно применить к конкретной рассматриваемой задаче общую теорию чувствительности.

4. Локализация собственных значений при наличии возмущений элементов матрицы приоритетов

В соответствии с теорией МАИ локальные и глобальный приоритеты определяются величинами собственных значений и собственных векторов. Фундаментальная проблема применимости метода заключается в поиске и обосновании ответа на вопрос: какую вещественную функцию комплексного собственного значения и собственного вектора выбрать в качестве однозначного параметра решения?

Ответ на этот вопрос дан в работе [3], где показано, что любая норма матрицы (m-норма, l-норма или k-норма, чаще называемая Евклидовой нормой), и спектральный радиус могут быть использованы для анализа устойчивости проблемы собственных значений с учетом конкретных условий.

Выражения для Евклидовой нормы и спектрального радиуса матрицы имеют вид $\|\mathbf{A}\|_l = \sqrt{\sum_{i,j}|a_{ij}|^2}$; $\rho(A)=\max_{\lambda_i}|\lambda_i|$, $i=1,N$ соответственно. Здесь N – порядок матрицы.

Для получения наглядных количественных оценок был выполнен достаточно большой объем вычислений для матриц приоритетов как четного, так и нечетного порядка. Для строго обратно-симметричных матриц, спектральным радиусом, по существу, является первое собственное значение, которое всегда вещественно. Остальные собственные значения могут быть как вещественные, так и комплексно-сопряженные, но и те, и другие, как правило, по модулю значительно меньше спектрального радиуса.

Остается открытым вопрос об устойчивости выбранного численного метода решения и его чувствительности к отклонениям исходных данных. Этот вопрос весьма актуален, поскольку матрица приоритетов может быть плохо обусловленной. Плохая обусловленность объясняется низкой точностью измерения или оценок реальных характеристик системы. Кроме того, всегда имеет место известный произвол в определении экспертами относительной важности тех или иных характеристик.

Количественные оценки устойчивости решения дают числа обусловленности [6]. Для анализа проблемы собственных значений берут спектральное число обусловленности вида

$$k(\mathbf{H})=\|\mathbf{H}^{-1}\|\|\mathbf{H}\|, \tag{1}$$

где $\|\mathbf{H}\|$ – матрица правых собственных векторов $\vec{\mathbf{X}}_i$, $i=\overline{1,n}$ уравнения $\mathbf{A}\vec{\mathbf{X}}=\lambda\vec{\mathbf{X}}$, или

$$k(\mathbf{H})=\sqrt{\mu_{max}/\mu_{min}}, \tag{2}$$

где μ_{max}, μ_{min} – соответственно наибольшее и наименьшее собственное значение матрицы $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$; T – символ транспонирования.

Числа обусловленности не всегда дают исчерпывающую характеристику обусловленности матрицы. Поэтому в качестве дополнительной характеристики устойчивости рассматриваемой задачи введем некий составной критерий оценивания чисел обусловленности и величины определителя.

Обратная матрица является устойчивой, если малым изменениям элементов исходной матрицы соответствуют малые изменения элементов обратной матрицы. Для обеспечения устойчивости обратной матрицы необходимо, чтобы определитель матрицы был не слишком мал. Во всяком случае, его величина не должна быть величиной второго порядка малости по сравнению с известной оценкой Адамара для значения определителя:

$$\Delta \le \sqrt{\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}. \tag{3}$$

В [6] показано, что изменение da_{kl} каждого элемента a_{kl} обратной матрицы $\mathbf{A}^{-1}=\|a_{ij}\|$, $i,j=\overline{1,n}$, вызванное изменением da_{ij} другого элемента a_{ij} этой матрицы, равно этому изменению, умноженному на произведение некоторых двух элементов матрицы: $da_{kl}=-\sum_{i,j}a_{ki}a_{lj}a_{ij}$. Если элементы обратной матрицы достаточно велики (что при малом определителе всегда имеет место), то незначительная ошибка в элементах исходной матрицы влечет за собой значительные изменения в элементах обратной матрицы.

Далее возникает вопрос [2]: при заданном собственном векторе и всех матрицах, из которых он получен, велик ли риск перехода от одной из них на любую другую при наличии малых возмущений в элементах? Часто также возникает вопрос, насколько чувствительны приоритеты, задаваемые компонентами собственного вектора, к изменениям в величинах суждений [2].

Рассмотрим зависимость спектрального числа обусловленности (1) матрицы $\|\mathbf{H}\|$, полученной в результате решения задачи на собственные значения исходной матрицы $\mathbf{A}$. В результате преобразования подобия матрицы $\mathbf{A}$ с использованием матриц правых собственных векторов получаем диагональную матрицу вида

$$\mathbf{H}^{-1}\mathbf{AH} = \mathrm{diag}(\lambda_i),\ i = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Пусть из-за случайных возмущений элементов a_{ij} в пределах некоторой ε-окрестности матрица $\mathbf{A}$ приводится к виду $\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{A} = \mathbf{AI}(1+\varepsilon)$, собственные значения которой есть μ_i, $i = \overline{1,n}$. Тогда $\mathbf{AI}(1+\varepsilon) = \mu_i \mathrm{I}$, следовательно,

$$\mathbf{AI}(1+\varepsilon - \mu_i) \tag{5}$$

– особенная матрица.

Выполним преобразование подобия матрицы (5):

$$\mathbf{H}^{-1}\left[\mathbf{AI}(1+\varepsilon-\mu_i)\right]\mathbf{H} = \mathrm{diag}(\lambda_i - \mu_i) + \varepsilon\mathbf{H}^{-1}\mathbf{AH}. \tag{6}$$

Правая часть матричного уравнения (6) также представляет собой особенную матрицу.

Предположим, что $\mu_i \neq \lambda_i$ для всех i. Такое предположение, как и предположение о том, что матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}+\varepsilon\mathbf{A}$ не имеют кратных собственных значений, основывается на том, что из-за случайных ошибок задания элементов матрицы, методических ошибок и ошибок вычислений всегда имеют место случайные отклонения результатов от истинных значений. Допустим, элементы матрицы $\mathbf{A}$ являются независимыми гауссовски распределенными величинами со средними значениями a_{ij} и одинаковой дисперсией ошибок представления. В вероятностном смысле число обусловленности дает отношение наибольшей полуоси к наименьшей полуоси для эллипсоида рассеяния вектора, компонентами которого являются ошибки представления элементов [7]. Поэтому вероятности появления кратных собственных значений μ_i, λ_i или совпадения μ_i и λ_i практически равны нулю. Тогда

$$\begin{aligned}&\mathrm{diag}(\lambda_i - \mu_i) + \varepsilon\mathbf{H}^{-1}\mathbf{AH} = \\ &= \mathrm{diag}(\lambda_i - \mu_i)\left[\mathbf{I} + \varepsilon\,\mathrm{diag}(\lambda_i - \mu_i)^{-1}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{AH}\right],\end{aligned} \tag{7}$$

где матрица в квадратных скобках в правой части выражения (7) также особенная.

В этом случае, если матрица $(\mathbf{I}+\mathbf{M})$ особенная, то $\|\mathbf{M}\| \geq 1$ для нормы любого вида. Иначе при $\|\mathbf{M}\| \leq 1$ ни одно из собственных значений $(\mathbf{I}+\mathbf{M})$ не может быть нулевым. Следовательно, $\left\|\varepsilon\,\mathrm{diag}(\lambda_i - \mu_i)^{-1}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{AH}\right\| \geq 1$ и, соответственно,

$$\varepsilon \max\left|(\lambda_i - \mu_i)^{-1}\right| \left\|\mathbf{H}^{-1}\right\| \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{H}\| \geq 1 \tag{8}$$

или

$$\varepsilon \left\|\mathrm{H}^{-1}\right\| \|\mathrm{A}\| \|\mathrm{H}\| \geq \min\left|(\lambda_i - \mu_i)\right|. \tag{9}$$

Из выражений (8) и (9) вытекает, что в любом случае

$$|\lambda_i - \mu_i| \leq \varepsilon k(\mathbf{H})\|\mathbf{A}\|, \tag{10}$$

по крайней мере, при одном значении i. Здесь $k(\mathbf{H}) = \left\|\mathbf{H}^{-1}\right\|\|\mathbf{H}\|$ – спектральное число обусловленности.

Таким образом, общая чувствительность собственных значений матрицы $\mathbf{A}$ непосредственно зависит от $k(\mathbf{H})$, так что $k(\mathbf{H})$ можно трактовать как число обусловленности для проблемы собственных значений.

С учетом ослабленных условий регулярности Адамара $|a_{ii}| - \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \geq 0$ и в соответствии с теоремой о кругах Гершгорина [6] можно применять выражение (10) для локализации корней матрицы (5).

Отметим два важных условия проведенного анализа.

1. Полученные результаты справедливы для любой нормы, для которой $\left\|\mathrm{diag}(\lambda_i - \mu_i)^{-1}\right\| = \max|\lambda_i - \mu_i|^{-1}$. Поэтому можно использовать любую норму матрицы, руководствуясь соображениями удобства и конкретным содержанием рассматриваемой задачи. Например, Евклидову норму часто используют для практических целей, так как ее легко подсчитывать.

2. При выводе выражений (8)–(10) не требовалось, чтобы область ε была малой окрестностью точек a_{ij}. Следовательно, их можно использовать для исследования чувствительности «в большом».

Чтобы оценить систему с достаточной эффективностью и точностью воспользуемся основными положениями теории чувствительности [8]. Погрешности вычисления собственных значений и собственных векторов приведут к неверному выбору наилучшего решения, получаемого методом анализа иерархий. Другими словами, из-за ошибочного задания (измерения, вычисления) исходных данных возникает риск выбора неверного или не самого эффективного набора КПЭ [9].

Вычислительная задача заключается в нахождении максимального собственного значения матрицы системы

$$\mathbf{A}x = \lambda x. \tag{11}$$

Применим метод вычисления чувствительности собственных значений к вариациям различных параметров системы [10]. Если матричное уравнение (11) продифференцировать по произвольному параметру p, то получим следующее уравнение в вариациях

$$\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial p}\right)x_i + \mathbf{A}\left(\frac{\partial x_i}{\partial p}\right) = \lambda_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial p}\right) + \left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial p}\right)x_i. \tag{12}$$

Если вещественную матрицу $\mathbf{A}$ транспонировать, ее собственные значения не изменятся. В этом случае образуется новый набор собственных векторов. Обозначим собственные векторы транспонированной матрицы через υ_j, то получим:

$$\left[\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial p}\right)x_i, \upsilon_i\right] + \left[\mathbf{A}\left(\frac{\partial x_i}{\partial p}\right), \upsilon_i\right] = \lambda_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial p}, \upsilon_i\right) + \frac{\partial\lambda_i}{\partial p}(x_i, \upsilon_i). \tag{13}$$

Если индексы j и i взять равными, а в первом члене правой части произведение $\lambda_i\upsilon_i$ заменить на $\mathbf{A}'\upsilon_j$, то вариационное уравнение (13) примет вид

$$\left[\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial p}\right)x_i, \upsilon_i\right] + \left[\mathbf{A}\left(\frac{\partial x_i}{\partial p}\right), \upsilon_i\right] = \left(\frac{\partial x_i}{\partial p}, \mathbf{A}'\upsilon_i\right) + \frac{\partial\lambda_i}{\partial p}(x_i, \upsilon_i). \tag{14}$$

Так как второй член левой части вариационного уравнения (14) равен члену правой части, то частную производную выразить в виде

$$\frac{\partial\lambda_i}{\partial p}=\frac{\left[\left(\partial\mathbf{A}/\partial p\right)x_i,\upsilon_i\right]}{\left(x_i,\upsilon_i\right)}. \tag{15}$$

Выражение (15) представляет собой функцию чувствительности собственных значений линейной системы $\dot{y}=\mathbf{A}y$. Эта формула удобна при вычислении чувствительности собственных значений системы.

5. Экспериментальные исследования модифицированного метода анализа иерархий

Для рассматриваемой проблемы иерархия будет выглядеть следующим образом. Первый шаг – декомпозиция и представление задачи в иерархической форме. На первом уровне располагается цель – «Обоснование выбора системы приоритетов КПЭ», на втором – наиболее важных, с нашей точки зрения, критериев и на третьем – объекты выбора (решения) – системы приоритетов КПЭ, которые должны быть оценены по характеристикам второго уровня. Предлагаемый список критериев для оценки: производительность, защита, надежность, точность, стоимость. В связи с этим были выбраны следующие системы приоритетов: одноранговая система (ОРС), комплекс автономно функционирующих систем (КАФС), многослойная система приоритетов (МСП), совокупность параллельно функционирующих систем (СПФС).

После проведения всех парных сравнений и получения данных по собственному значению и собственному вектору можно определить согласованность. Для этого, используя отклонение максимального собственного числа от размерности матрицы, строим величину, называемую индексом согласованности [2]. Затем сравниваем ее с соответствующим индексом, полученным для матрицы, построенной случайным образом, и получаем отношение согласованности (ОС). Отметим, что приемлемым является ОС не более 10 %. Иначе необходимо произвести переоценку соответствующей матрицы.

Окончательно проводится вычисление общего веса варианта решения путем последовательного взвешивания векторов весов нижележащего уровня (вариантов решений) компонентами вектора весов вышележащего уровня (критериев). Глобальный приоритет для каждой альтернативы вычисляется как сумма произведений локальных приоритетов на соответствующий весовой коэффициент. Результаты расчетов представлены в виде табл. 1.

Таблица 1

Обоснование выбора класса систем приоритетов

Класс системы приоритетов	Критерии					Глобальные приоритеты
	Производительность	Защита	Надежность	Точность	Стоимость	
	Численные значения вектора приоритета					
	0,125	0,099	0,454	0,264	0,058	
ОРС	0,115	0,306	0,076	0,475	0,076	0,209
КАФС	0,061	0,090	0,261	0,275	0,261	0,223
МСП	0,199	0,137	0,150	0,092	0,150	0,140
СПФС	0,625	0,467	0,513	0,158	0,513	0,429

Из табл. 1 видно, что следует остановить свой выбор на классе системы с максимальным значением глобального приоритета – совокупность параллельно функционирующих систем. Заметим, что при проведении сравнения и построении матриц парных сравнений используется не более 7±2 элемента на каждом уровне. В этом случае погрешности в оценках являются приемлемыми.

Для исследования чувствительности разработанного метода в работе рассмотрены две матрицы парных сравнений (табл. 2).

Первая матрица (обратно-симметричная) строится с использованием формулы [2]:

$$a_{ji}=1/a_{ij}.$$

Вторая матрица строится на основе элементов первой строки с использованием формулы [2]:

$$a_{ij}=a_{i1}a_{1j}=a_{1j}/a_{1i}.$$

Как показано в [9], при использовании метода анализа иерархий для поиска наилучшего решения из конечного множества возможных решений, можно применять нелинейную свертку критериев. Однако в [11] утверждается, что при аддитивном виде целевой функции линейная свертка обеспечивает получение «лучшего» решения. Для определения границ, в которых можно ограничиться линейной сверткой, исследуем зависимость максимального собственного значения от погрешности точного значения одного из элементов матрицы приоритетов, выбираемых на основе парных сравнений. Вычисления собственных значений проводились в программе MatLab и с использованием разработанного программного обеспечения.

Таблица 2

Матрицы парных сравнений

Обратно-симметричная матрица	Матрица на основе элементов первой строки
$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&3&1/5&1/5&3\\1/3&1&1/3&1/3&3\\5&3&1&3&5\\5&3&1/3&1&3\\1/3&1/3&1/5&1/3&1\end{pmatrix}$	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&3&1/3&1/2&2\\1/3&1&1/9&1/6&2/3\\3&9&1&3/2&6\\2&6&2/3&1&4\\1/2&3/2&1/6&1/4&1\end{pmatrix}$

Для большей информативности были построены функции чувствительности решения – отношение отклонения Δ собственного значения к отклонению ε от точного значения x_i. Для обратно-симметричной матрицы парных сравнений получены графики, представленные на рис. 1, где по вертикальной оси отображено отклонение Δ собственного значения, по горизонтальной – отклонению ε от точного значения x_i.

На рис. 1 изображены графики функций чувствительности, вычисленных методом Хаусхолдера приведения матрицы парных сравнений к почти треугольной форме Гессенберга с дальнейшим вычислением собственных значений методом QR-итераций Кублановской – Френсиса со сдвигом и пошаговой коррекцией решения [7]. Отметим, что колебания решения для метода QR-итераций носят слабо выраженный характер. Это объясняется возможностью, в отличие от программы MatLab, дополнительной настройки программ вычислений и регулировки шага итераций.

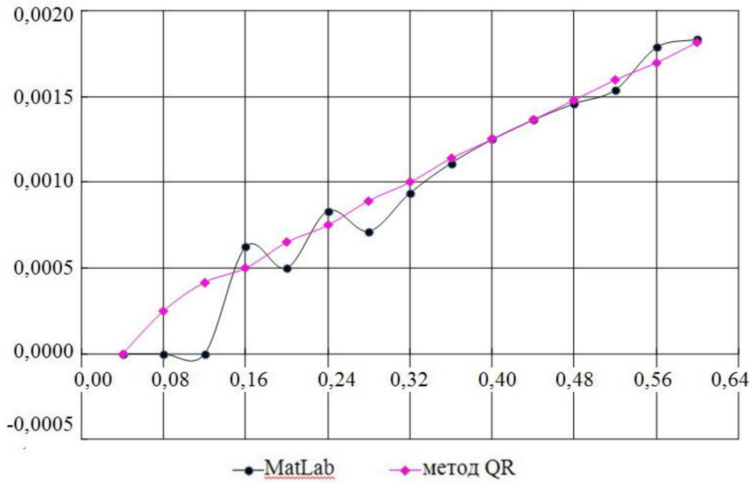

Рис. 1. Функция чувствительности: *QR*-алгоритм со сдвигом и пошаговой коррекцией и программа MatLab

Кроме того, при изменениях величины элементов матрицы приоритетов до 50 % отклонение даже наибольшего собственного значения от точной величины не превышает 5–10 % величины спектрального радиуса матрицы – Евклидовой нормы максимального собственного значения. Следовательно, средний риск перескока на неверное решение является величиной второго порядка малости, а само такое событие может быть отнесено к классу редких событий или грубых промахов.

6. Выводы

Разработан модифицированный метод приоритизации ключевых параметров эффективности информационной системы с разнородными данными. Схема применения метода не зависит от сферы деятельности, в которой принимается решение. Поэтому метод является универсальным, его применение позволяет организовать систему поддержки принятия решений.

Вычисления собственных значений с помощью QR-алгоритма со сдвигом более эффективны, нежели методы, используемые в программе MatLab, поскольку дают меньшие методические погрешности. С использованием пошаговой коррекции вычисления являются более точными. Чувствительность решения к ошибкам задания исходных данных оказывается достаточно низкой.

Разработанный метод может служить надстройкой для других методов, призванных решать плохо формализованные задачи, где более адекватно подходят человеческие опыт и интуиция, нежели сложные математические расчеты. Метод дает удобные средства учета экспертной информации для решения различных задач.

Литература

1. Floudas, C. A. Encyclopedia of Optimization: Second Edition [Text] / C. A. Floudas, P. M. Pardalos (Ed.). – Springer Science+Buisiness Media, LLC, 2009. – 4645 p.
2. Саати, Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий [Текст] / Т. Саати. – М.: Радио и связь, 1989. – 278 с.
3. Vinogradov, N. An analysis of singularity of the matrices of priorities and sensibility of decisions as key performance indicators of the analytic hierarchies process [Text] / N. Vinogradov, V. Drovovozov, A. Savchenko, I. Kudzinovskaya]// Journal of Qafqaz University (Mathematics and Computer Sciences). – 2011. – Vol. 32. – P. 40–48.
4. Masood, S. A. Key Performance Indicators Prioritization in Whole Business Process: A Case of Manufacturing Industry [Text] / S. A. Masood, M. Jahanzaib, K. Akhtar // Life Science Journal. – 2013. – Vol. 10,Issue 4s. – P. 195–201.
5. Shahin, A. Prioritization of key performance indicators: An integration of analytical hierarchy process and goal setting [Text] / A. Shahin, M. A. Mahbod // International Journal of Productivity and Performance Management. – 2010. – Vol. 56, Issue 3. – P. 226–240. doi: 10.1108/17410400710731437
6. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц [Текст] / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1966. –576 с.
7. Фаддеев, Д. К. Вычислительные методы линейной алгебры [Текст] / Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева; 2-е изд. – М.: «Наука», 1963. – 656 с.
8. Томович, Р. Общая теория чувствительности [Текст] / Р. Томович, М. Вукобратович. – М.: «Советское радио», 1972. – 240 с.
9. Ouyang, Ye. A Performance Analysis for UMTS Packet Switched Network Based on Multivariate KPIs [Text] / Ye. Ouyang, M. Hosein Fallah // International Journal of Next-Generation Networks (IJNGN). – 2010. – Vol. 2, Issue 1. – P. 80–94. doi: 10.1109/wts.2010.5479629
10. Ногин, В. Д. Границы применимости распространенных методов скаляризации при решении задач многокритериального выбора [Текст] : сб. науч. тр. / В. Д. Ногин. – Методы возмущений в гомологической алгебре и динамика систем. – Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2004. – С. 59–68.
11. Аббасов, М. Э. Еще раз о границах применимости линейной свертки в методе анализа иерархий [Електронний ресурс] / М. Э. Аббасов, Н. П. Баринов. – Режим доступа : http://www.labrate.ru/discus/messages/23/