

В роботі запропоновано математичні моделі прогнозування взаємопов'язаних нестационарних часових рядів і методи їх структурної ідентифікації, засновані на спільному використанні багатовимірного варіанта методу «Гусениця»-SSA та моделей VARMAX і SARIMAX. Експериментальні результати показують високу ефективність запропонованих моделей прогнозування при виборі відповідних структурних параметрів у порівнянні з моделями VARMAX

Ключові слова: прогнозування, структурна ідентифікація, декомпозиційна модель, метод Бокса-Дженкінса, метод «Гусениця»-SSA

В работе предложены математические модели прогнозирования взаимосвязанных нестационарных временных рядов и методы их структурной идентификации, основанные на совместном использовании многомерного варианта метода «Гусеница»-SSA и моделей VARMAX и SARIMAX. Экспериментальные результаты показывают высокую эффективность предложенных моделей прогнозирования при выборе подходящих структурных параметров в сравнении с моделями VARMAX

Ключевые слова: прогнозирование, структурная идентификация, декомпозиционная модель, метод Бокса-Дженкинса, метод «Гусеница»-SSA

УДК 519.254
DOI: 10.15587/1729-4061.2015.37317

ГИБРИДНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

В. Н. Щелкалин

Инженер

Кафедра прикладной математики

Харьковский национальный

университет радиоэлектроники

пр. Ленина, 14, г. Харьков, Украина, 61166

E-mail: vitalii.shchelkalin@gmail.com

1. Введение

Одним из наиболее перспективных и важных методов современного научного познания является моделирование. Суть моделирования заключается в замене изучаемого или управляемого объекта его условным образом, называемым моделью, которая должна отражать свойства объекта, его внутренние и внешние связи, функциональные и структурные параметры существенны для целей исследования. Построенная модель предназначена для анализа, познания, исследования объективных закономерностей, определяющих деятельность моделируемого объекта и прогнозирования его параметров.

Предлагаемые в работе модели применимы для прогнозирования физических параметров процессов потребления природного газа линейных участков газотранспортной системы.

Для обоснования модели, применяемой при эксплуатации различных участков газотранспортной системы (ГТС), необходимо в первую очередь рассмотреть наиболее существенные характеристики современных моделей и методы их использования. Главный возмущающий фактор, определяющий сменный режим работы линейных участков является неравномерность газопотребления всеми категориями потребителей природного газа подключенных к линейному участку. Но этот фактор не единственный. Давление газа на входе линейного участка зависит от дисперсии ошибок стабилизации на выходе компрессорного цеха (техниче-

ских характеристик системы автоматизированного управления компрессорным цехом (САУ КЦ)), от изменения температуры окружающей среды и самого газа, перекачиваемого в течение года, а также от состава газа [1–3].

В случае ограниченности исходной информации, неразработанности теории исследуемого процесса, неопределённости представления о взаимосвязях временного ряда (ВР) с другими рядами методы прогнозирования изолированных нестационарных ВР могут оказаться незаменимыми и упрощение, в результате которого совокупное взаимодействие всех сторонних факторов выражается в модели через время, становится необходимым.

Если же известно о воздействии на изучаемый процесс каких-то других процессов и имеется возможность получить временные ряды, описывающие их развитие, то методы анализа изолированных рядов уступают место многомерному статистическому анализу. Это позволяет включить в модель ценную дополнительную информацию, учесть структуру изучаемого объекта и получить взаимоувязанные прогнозы нескольких переменных [4].

В случае же прогнозирования многомерных нестационарных ВР обычно строятся системы линейных уравнений, модели множественной регрессии. В процедуре построения таких математических моделей можно выделить шесть основных этапов:

- отбор ВР (факторов) для включения в модель;
- разделение всех отобранных факторов на экзогенные (внешние) и эндогенные (внутренние);

- принятие гипотезы о характере взаимосвязи эндогенных и экзогенных переменных (т. е. структуры модели);
- оценивание параметров модели по заданному критерию;
- анализ адекватности модели;
- вычисление прогнозов.

На все этапы, кроме оценивания, огромное влияние оказывает субъективное мнение исследователя, его опыт, знание реальных процессов и теорий. В силу этого структура модели часто задаётся произвольно, интуитивно.

2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

Обзор гибридных математических моделей и методов прогнозирования изолированных нестационарных временных рядов проведен в [5], где предполагается, что будущая тенденция является той или иной функцией времени или предшествующих значений ряда. В [6] вследствие того, что на коэффициенты функции не накладывались требования быть неизменными во времени, а модель, по которой рассчитывались прогнозы, наделялась адаптивными свойствами, методы анализа и прогнозирования изолированного ряда были достаточно гибкими и полезными для моделирования широкого класса одномерных процессов или их отдельных сторон.

Гибридные математические модели и методы прогнозирования ВР с учётом внешних факторов рассмотрены в [7].

В данной работе рассмотрены гибридные математические модели и методы прогнозирования взаимосвязанных нестационарных ВР на основе многомерного варианта метода «Гусеница»-SSA и моделей VARMAX и SARIMAX.

Вопросам построения моделей многомерных нестационарных ВР посвящено достаточно много работ [8].

Методика построения математических моделей взаимосвязанных процессов, описываемых нестационарными временными рядами с изменениями свойств приведена в [9]. Алгоритмически эта методология представляет собой дерево расчётных статистических процедур, включающих процедуры оценивания качества полученного решения и состоит из следующих этапов.

Этап 1. Предварительное определение типа рассматриваемого процесса.

Этап 2. Обнаружение изменений свойств или разрывов в процессе, выделение интервалов, в которых отсутствуют изменения свойств.

Этап 3. Проверка типа процесса в каждом из выделенных интервалов и построение моделей в рассматриваемых интервалах. На этом этапе повторяется этап 1 для каждого из выделенных однородных интервалов.

Этап 4. Проверка наличия корреляционных и коинтеграционных связей между компонентами и построение их моделей.

Этап 5. Обнаружение изменений в модели по текущим наблюдениям.

Этап 6. Накопление наблюдений и построение новой модели.

3. Цели и задачи исследования

Целью проведенных исследований является разработка вероятностно-детерминированных и декомпозиционных математических моделей и методов их идентификации для прогнозирования взаимосвязанных нестационарных ВР и проверка эффективности прогнозирования разработанными моделями в сравнении с прогнозами, получаемыми вероятностными моделями VARMAX.

Для достижения поставленной цели решались следующие задачи:

1. Разработка гибридных математических моделей и методов прогнозирования взаимосвязанных нестационарных ВР на основе метода MSSA и моделей VARMAX и SARIMAX.
2. Идентификация передаточной функции модели с использованием формул для L - или K -продолжения многомерного варианта метода MSSA.
3. Разложение исходных эндогенных и экзогенных ВР на ВР с более простой для целей идентификации структурой. Построение математических моделей SARIMAX компонент разложения и вычисление их прогнозов.
4. Создание различных вариантов методов прогнозирования и синтез на их основе гибридных математических моделей с различными структурами путём выбора различных вариантов и параметров метода MSSA в сочетании с моделями SARIMAX.

4. Математические модели и методы прогнозирования взаимосвязанных нестационарных временных рядов

Пусть исследуется линейный N -мерный процесс. Представим ВР данного процесса в виде вектора $Z_t = (Z_t^{(1)} \ Z_t^{(2)} \ \dots \ Z_t^{(N)})$. Предположим, что данный процесс адекватно аппроксимируется многомерным процессом авторегрессии – скользящего среднего (АРСС):

$$A(B)Z_t = \Theta + D(B)W_t, \quad t = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где $W_t = (\varepsilon_t^{(1)} \ \varepsilon_t^{(2)} \ \dots \ \varepsilon_t^{(N)})$ – вектор случайных ошибок; $\Theta = (\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_N)$ – вектор констант; $A(B)$ и $D(B)$ – матрицы операторов сдвига назад размерности $(p \times p)$, элементами которых являются полиномы от B конечного порядка, т. е.

$$A(B) = \{a_{ij}(B)\} \quad \text{и} \quad D(B) = \{d_{ij}(B)\},$$

где

$$a_{ij}(B) = \sum_{l=0}^{r_{ij}} a_{ij}^{(l)} B^l; \quad d_{ij}(B) = \sum_{l=0}^{q_{ij}} d_{ij}^{(l)} B^l;$$

где r_{ij} и q_{ij} обозначают порядок $a_{ij}(B)$ и $d_{ij}(B)$ соответственно.

В отношении вектора ошибок принимается, что

$$M(W_t) = O;$$

$$M(W_t W_t^T) = \delta_{tt'} I_N \text{ для всех } t, t',$$

где $\delta_{tt'}$ – дельта-функция Кронекера; I_N – единичная матрица ($N \times N$).

Обычно не все переменные $Z_t^{(i)}$, $i = \overline{1, N}$ являются равноправными. Разобьём Z_t следующим образом: $Z_t = (Y_t \ X_t)$, где Y_t – вектор эндогенных переменных размерностью ($N_Y \times 1$); X_t – вектор экзогенных переменных размерностью ($N_X \times 1$), $N = N_Y + N_X$.

В общем случае отношение экзогенных и эндогенных переменных описываются соотношением:

$$Y_t = \Phi[X_t] + W_t, \tag{2}$$

где $\Phi[\cdot]$ – правило преобразования для экзогенного многомерного ВР.

Тогда система (1) запишется следующим образом:

$$\begin{bmatrix} A_{11}(B) & A_{12}(B) \\ 0 & A_{22}(B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_t \\ X_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11}(B) & 0 \\ 0 & D_{22}(B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_t^Y \\ W_t^X \end{bmatrix}, \tag{3}$$

с учётом того, что X_t – вектор экзогенных переменных. Или

$$A_{11}(B)Y_t + A_{12}(B)X_t = \Theta_1 + D_{11}(B)W_t^Y; \tag{4}$$

$$A_{22}(B)X_t = \Theta_2 + D_{22}(B)W_t^X. \tag{5}$$

Уравнения (4) являются структурными, а уравнения (5) описывают процессы, генерирующие вектор стохастических экзогенных переменных X_t .

4. 1. Векторная модель авторегрессии – скользящего среднего с экзогенными переменными

Полиномиальные модели позволяют адекватно описывать чрезвычайно широкий класс многомерных многосвязных стохастических процессов и решать на их основе задачи моделирования, прогнозирования и управления [9]. Приведем общий класс многомерных многосвязных стохастических полиномиальных моделей, в целях упрощения, без нелинейного обобщения.

Для описания отношений эндогенных от экзогенных ВР обычно используют модель в конечных разностях. Предположив, что система имеет N_X экзогенных ВР, N_Y эндогенных ВР и N_W шумов, получим модель в конечных разностях с матрицами размерности:

$N_X \times 1$ – для многомерного экзогенного ВР,

$$X_t = [x_t^{(1)} \ x_t^{(2)} \ \dots \ x_t^{(N_X)}]^T;$$

$N_W \times 1$ – для шумов $W_t = [\epsilon_t^{(1)} \ \epsilon_t^{(2)} \ \dots \ \epsilon_t^{(N_W)}]^T$;

$N_Y \times 1$ – для многомерного эндогенного ВР

$$Y_t = [y_t^{(1)} \ y_t^{(2)} \ \dots \ y_t^{(N_Y)}]^T \text{ для } k\text{-го шага.}$$

$$A(B)Y_t = G(B)X_t + D(B)W_t, \tag{6}$$

где $A(B)$, $G(B)$, $D(B)$ – матричные полиномы степеней n_A , n_G , n_D , т. е.:

$$A(B) = I - \sum_{i=1}^{n_A} A_i B^i, \quad G(B) = \sum_{i=1}^{n_G} G_i B^i, \quad D(B) = I + \sum_{i=1}^{n_D} D_i B^i.$$

Модель (6) – векторная модель авторегрессии – скользящего среднего с экзогенными переменными (VARMAX). Коэффициенты матриц

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{iN_Y} \\ a_{i21} & a_{i22} & \dots & a_{i2N_Y} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ a_{iN_Y1} & a_{iN_Y2} & \dots & a_{iN_YN_Y} \end{bmatrix},$$

$$G_i = \begin{bmatrix} g_{i11} & g_{i12} & \dots & g_{i1N_X} \\ g_{i21} & g_{i22} & \dots & g_{i2N_X} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ g_{iN_Y1} & g_{iN_Y2} & \dots & g_{iN_YN_X} \end{bmatrix},$$

$$D_i = \begin{bmatrix} d_{i11} & d_{i12} & \dots & d_{i1N_W} \\ d_{i21} & d_{i22} & \dots & d_{i2N_W} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ d_{iN_Y1} & d_{iN_Y2} & \dots & d_{iN_YN_W} \end{bmatrix}.$$

4. 1. 1. Идентификация структуры векторной модели авторегрессии – скользящего среднего с экзогенными переменными

Цель идентификации: на основании наблюдений за входным X_t и выходным Y_t сигналами на каком-то интервале времени определить вид оператора, связывающего входной и теоретический выходной сигналы.

Для учета влияния динамики процесса будем идентифицировать векторную модель в виде авторегрессионной со скользящим средним (VARMAX) (6). Решению задачи определения порядка модели посвящено значительное число работ. Наиболее значимые результаты получены в работе Акаике на основе идеи вычисления финальной ошибки прогнозирования (ФОП). ФОП определяется как дисперсия ошибки прогнозирования на один шаг вперед при использовании для прогноза оценок по методу наименьших квадратов параметров авторегрессионной модели. По существу процедура определения порядка сводится к подгонке авторегрессионной модели в направлении возрастания порядка, вычислению для каждой модели соответствующих оценок ФОП и выбору той из них, для которой значение ФОП минимально. При подгонке авторегрессионной модели, метод, основанный на вычислении ФОП, представляет собой удобное средство идентификации порядка авторегрессионной модели, а также оценки энергетического спектра. ФОП критерий введен для выбора порядка авторегрессионной модели и успешно применяется при оценке спектров. Акаике обобщил этот критерий на произвольные задачи метода максимального правдоподобия. Этот подход основан на введении функционала, который называется информационным критерием Акаике (AIC). Он определяется так:

$$AIC = \log(V) + \frac{2d}{n},$$

где V – функция потерь, d – число оцененных параметров, n – число оцененных данных. Низкое значение ИКА свидетельствует о большой точности аппроксимации. Сам критерий финальной ошибки прогнозирования определяется следующим образом:

$$\Phi_{\text{ОП}} = \frac{n+d}{n-d} \cdot V.$$

Кроме этих критериев достаточно часто используются байесовский информационных критерий (БИК):

$$BIC = \ln(V) + d \cdot \frac{\ln n}{n},$$

в котором, в отличие от AIC , чем больше значение BIC , тем адекватнее модель.

4. 1. 2. Алгоритм оценивания структуры и параметров векторной модели авторегрессии – скользящего среднего с экзогенными переменными

Для получения оценок всех матричных полиномов VARMAX-модели воспользуемся алгоритмом линейного многоэтапного метода оценивания параметров [10], который включает в себя выполнение следующих шагов:

Шаг 1. Оценивание векторной ARX-модели как сокращенного представления векторной ARMAX-модели.

Основываясь на предположении обратимости (все нули детерминанта $D(B)$ лежат вне единичного круга), N_Y -мерное представление VARMAX (6) запишем в виде:

$$H_Y(B) \cdot Y_t = H_X(B) \cdot X_t + W_t,$$

где

$$H_Y(B) = I + \sum_{i=1}^{\infty} H_Y^{(i)} B^i = D^{-1}(B)A(B); \quad (7)$$

$$H_X(B) = \sum_{i=0}^{\infty} H_X^{(i)} B^i = D^{-1}(B)G(B). \quad (8)$$

Алгоритм начинается с оценивания N_Y -мерного представления модели ARX порядка n_p :

$$Y_t + \sum_{i=1}^{n_p} H_Y^{(i)} Y_{t-i} = \sum_{i=0}^{n_p} H_X^{(i)} X_{t-i} + W_t^{(t)}, \quad (9)$$

где $W_t^{(t)}$ – вектор ошибки прогноза на шаг вперед для модели ARX(n_p, n_p).

Модель (9) может быть эквивалентно записана как

$$Y_t = \Phi_t^T h + W_t^{(t)}, \quad (10)$$

где

$$\Phi_t^T = I \otimes x_t^T;$$

$$x_t = \begin{bmatrix} -Y_{t-1}^T & -Y_{t-2}^T & \dots & -Y_{t-n_p}^T & X_t^T & X_{t-1}^T & \dots & X_{t-n_p}^T \end{bmatrix}^T;$$

$$h = \text{col} \left[H_Y^{(1)} \quad H_Y^{(2)} \quad \dots \quad H_Y^{(n_p)} \quad H_X^{(0)} \quad H_X^{(1)} \quad \dots \quad H_X^{(n_p)} \right]^T, \quad (11)$$

где \otimes – обозначение произведения Кронеккера, а $\text{col}(M)$ – вектор, получаемый путем записи каждого последующего столбца матрицы M под предыдущий столбец. Из (10) можно выразить $W_t^{(t)} = Y_t - \Phi_t^T h$.

Оценки вектора h можно получить в результате минимизации квадратичной целевой функции J по h :

$$J = \sum_{t=1}^N \left[W_t^{(t)} \right]^T \Theta W_t^{(t)} \rightarrow \min_h,$$

где Θ – симметричная положительно определенная матрица размерности $N_Y \times N_Y$. Решение этой задачи можно найти аналитически в явном виде. В этом случае оценку вектора h можно представить в виде:

$$\hat{h} = \left(\sum_{t=1}^N \Phi_t \Theta \Phi_t^T \right)^{-1} \cdot \left(\sum_{t=1}^N \Phi_t \Theta Y_t \right),$$

где \hat{h} – оценки вектора h . Зная оценки \hat{h} и используя выражение (11), получаем оценки $\hat{H}_Y^{(i)}$, $\hat{H}_X^{(i)}$ матриц $H_Y^{(i)}$, $H_X^{(i)}$ соответственно, $i = 1, n_p$.

Шаг 2. Начальное оценивание полиномиальных матриц скользящего среднего.

Основываясь на выражении (7), для последовательности $H_Y^{(i)}$ можно получить следующие выражения:

$$\sum_{j=0}^{\min(i, n_p)} D_j \cdot H_Y^{(i-j)} = A_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (12)$$

где $A_i = O$ для $i > n_A$.

Используя матричные уравнения (12) для $i = r - n_D + 1, \dots, r$ ($r = \max(n_A, n_D) + n_D$) и оценки $\hat{H}_Y^{(i)}$, полученные на предыдущем шаге, построим систему уравнений для определения начальных оценок матриц скользящего среднего:

$$\begin{bmatrix} \hat{R}_H^{(0)} & \hat{R}_H^{(-1)} & \dots & \hat{R}_H^{(1-n_D)} \\ \hat{R}_H^{(1)} & \hat{R}_H^{(0)} & \dots & \hat{R}_H^{(2-n_D)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{R}_H^{(n_D-1)} & \hat{R}_H^{(n_D-2)} & \dots & \hat{R}_H^{(0)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{D}_1^T \\ \hat{D}_2^T \\ \vdots \\ \hat{D}_{n_D}^T \end{bmatrix} \approx - \begin{bmatrix} \hat{R}_H^{(1)} \\ \hat{R}_H^{(2)} \\ \vdots \\ \hat{R}_H^{(n_D)} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$\hat{R}_H^{(k-j)} = \begin{cases} \sum_{i=n_p+1}^{n_p-(k-j)} \hat{H}_Y^{(i)} \left[\hat{H}_Y^{(i+k-j)} \right]^T, & k \geq j; \\ \sum_{i=n_p+1}^{n_p-(j-k)} \hat{H}_Y^{(i+j-k)} \left[\hat{H}_Y^{(i)} \right]^T, & k < j. \end{cases}$$

Решая систему (13) относительно $\hat{D}_1^T, \hat{D}_2^T, \dots, \hat{D}_{n_D}^T$, получим искомые оценки матриц скользящего среднего D_1, D_2, \dots, D_{n_D} .

Шаг 3. Оценивание матричного полинома авторегрессии и матричного полинома управляющих воздействий.

Оценивание матриц авторегрессии и матриц коэффициентов управляющих воздействий основывается

на предположении, что целевая функция является квадратичной по отношению к матрицам скользящего среднего. Используя полученные на предыдущем шаге оценки $\hat{D}(B)$, выражение (5) модели VARMAX может быть записано как

$$\hat{D}^{-1}(B)Y_t = \hat{D}^{-1}(B) \sum_{i=0}^{n_G} G_i X_{t-i} - \hat{D}^{-1}(B) \sum_{i=1}^{n_A} A_i Y_{t-i} + W_t^{(2)}, \quad (14)$$

где $W_t^{(2)}$ – ошибка прогнозирования на шаг вперед для структуры модели (14). Преобразование данной модели приводит к выражению:

$$y_t^X = \sum_{i=0}^{n_G} X_{t-i}^X \text{col}(G_i) - \sum_{i=1}^{n_A} Y_{t-i}^X \text{col}(A_i) + W_t^{(2)}, \quad (15)$$

где

$$y_t^X = (y_t^T \otimes \hat{D}^{-1}(B)) \text{col}(I); \quad (16)$$

$$Y_{t-i}^X = y_{t-i}^T \otimes \hat{D}^{-1}(B); \quad (17)$$

$$X_{t-i}^X = X_{t-i}^T \otimes \hat{D}^{-1}(B). \quad (18)$$

Минимизация целевой функции, определяемой как след ковариационной матрицы ошибок предсказания на один шаг вперед

$$J = \text{trace} \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N W_t^{(2)} [W_t^{(2)T}]^T \right) \quad (19)$$

приводит к линейным регрессионным оценкам

$$\hat{\theta}_2 = \left(\sum_{t=1}^N [F_t^X]^T F_t^X \right)^{-1} \cdot \left(\sum_{t=1}^N [F_t^X]^T y_t^X \right) \quad (20)$$

вектора параметров

$$\theta_2 = \text{col} [A_1 \quad \dots \quad A_{n_A} \quad G_0 \quad \dots \quad G_{n_G}].$$

$$F_t^X = [-Y_{t-1}^X \quad -Y_{t-2}^X \quad \dots \quad -Y_{t-n_A}^X \quad X_t^X \quad X_{t-1}^X \quad \dots \quad X_{t-n_G}^X].$$

Для определения оценок θ_2 необходимо получить выражения (16)–(18). Для этого производим декомпозицию матрицы Y_t^X :

$$Y_t^X = [Y_t^{(1)} \quad Y_t^{(2)} \quad \dots \quad Y_t^{(N_Y)}],$$

где $Y_t^{(i)}$ – i -тая $N_Y \times N_Y$ матрица блочной матрицы Y_t^X , а затем переписываем уравнение (17) следующим образом:

$$Y_t^{(i)} + \sum_{j=1}^{n_D} Y_{t-j}^{(i)} \hat{D}_j = y_t^{(i)} I, \quad (i = \overline{1, N_Y}).$$

Из этого выражения может быть получена последовательность $Y_t^{(i)}$, $t = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, N_Y}$, предполагая, что $Y_t^{(i)} \equiv O$ для $t \leq 0$, $i = \overline{1, N_Y}$, и становится доступной последовательность y_t^X , $t = \overline{1, n}$. Последовательность X_{t-i}^X , $t = \overline{1, n}$ определяется аналогично, как и последо-

вательность $Y_t^{(i)}$, $t = \overline{1, n}$, предполагая, что $X_t^X \equiv O$ для $t \leq 0$.

Шаг 4. Оценивание полиномиальных матриц скользящего среднего и ковариаций остаточных ошибок.

После того, как матрицы авторегрессии и матрицы коэффициентов экзогенных переменных оценены, оценки матриц скользящего среднего обновляются, используя выражение

$$\sum_{j=0}^i \hat{D}_j \hat{H}_{i-j}^Y = \hat{A}_i, \quad i = \overline{0, n_D},$$

где $\hat{A}_i \equiv O$ для $i > n_A$, $\hat{A}_0 \equiv I$, $\hat{D}_0 \equiv I$. Последовательность \hat{H}_i^Y , $i = \overline{0, n_D}$ ($\hat{H}_0^Y = I$) доступна из шага 1. Последовательность остаточных ошибок W_t модели VARMAX затем рекурсивно определяется из (6) после замены матриц авторегрессии, скользящего среднего и матриц коэффициентов управляющих воздействий их оценками. Ковариация остаточных ошибок вычисляется как

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^n \hat{W}_t \hat{W}_t^T.$$

Шаги 3 и 4 повторяются пока не будет достигнут минимум целевой функции (19). Структуру модели можно определить, например, по показателям AIC и BIC, перебирая модели с различными порядками авторегрессии и скользящего среднего.

4. 2 Многомерный вариант метода «Гусеница»-SSA

В этом разделе рассматривается многомерное обобщение метода «Гусеница»-SSA [11] и приводятся алгоритмы двух вариантов прогнозирования (многомерного продолжения) взаимосвязанных нестационарных ВР.

4. 2. 1. Алгоритм анализа временных рядов многомерным вариантом метода «Гусеница»-SSA

Пусть требуется получить прогноз $N_Y + N_X$ взаимосвязанных нестационарных ВР $Y^{(i)} = y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \dots, y_{n_{y^{(i)}}}^{(i)}$, $i = \overline{1, N_Y}$ и $X^{(i)} = x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_{n_{x^{(i)}}}^{(i)}$, $i = \overline{1, N_X}$ произвольных длин $n_{y^{(i)}}$, $i = \overline{1, N_Y}$ и $n_{x^{(i)}}$, $i = \overline{1, N_X}$ соответственно.

Этапы алгоритма:

1. Вложение

Выбираем длину окна L и строим траекторную матрицу

$$\begin{aligned} X = & \begin{bmatrix} Y_1^{(1)} & Y_2^{(1)} & \dots & Y_{K_{y^{(1)}}}^{(1)} & Y_1^{(2)} & Y_2^{(2)} & \dots & Y_{K_{y^{(2)}}}^{(2)} & \dots & Y_1^{(N_Y)} & Y_2^{(N_Y)} & \dots \\ \dots & Y_{K_{y^{(N_2)}}}^{(N_2)} & X_1^{(1)} & X_2^{(1)} & \dots & X_{K_{x^{(1)}}}^{(1)} & X_1^{(2)} & X_2^{(2)} & \dots & X_{K_{x^{(2)}}}^{(2)} & \dots \\ \dots & X_1^{(N_X)} & X_2^{(N_X)} & \dots & X_{K_{x^{(N_X)}}}^{(N_X)} \end{bmatrix} = \\ = & \begin{bmatrix} Y^{(1)} & Y^{(2)} & \dots & Y^{(N_Y)} & X^{(1)} & X^{(2)} & \dots & X^{(N_X)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

из векторов вложения

$$Y_j^{(i)} = (y_j^{(i)} \quad y_{j-1}^{(i)} \quad \dots \quad y_{j+L-1}^{(i)})^T, \quad 1 \leq j \leq K_{y^{(i)}}, \quad K_{y^{(i)}} = n_{y^{(i)}} - L - 1,$$

$$i = \overline{1, N_Y}; X_j^{(i)} = (x_j^{(i)} \ x_{j-1}^{(i)} \ \dots \ x_{j+L-1}^{(i)})^T, \ 1 \leq j \leq K_{X^{(i)}}, \ K_{X^{(i)}} = n_{X^{(i)}} - L - 1, \ i = \overline{1, N_X}.$$

Здесь $Y^{(i)}$ – траекторная матрица ряда $Y^{(i)}$, $i = \overline{1, N_Y}$; $X^{(i)}$ – траекторная матрица ряда $X^{(i)}$, $i = \overline{1, N_X}$.

2. Сингулярное разложение

Сформируем матрицу $S = XX^T$ и произведём сингулярное разложение траекторной матрицы X ВР.

Обозначим:

– $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_L$ – собственные числа матрицы S , взятые в порядке убывания ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_L \geq 0$);

– U_1, U_2, \dots, U_L – ортонормированная система собственных векторов матрицы S , соответствующих этим собственным числам.

Произведём разложение траекторной матрицы

$$X = X_1 + \dots + X_d, \tag{21}$$

где

$$X_j = \sqrt{\lambda_j} U_j V_j^T; V_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} X^T U_j; j = 1, 2, \dots, d; d = \max\{i | \lambda_i > 0\}.$$

3. Группировка

Разложение (21) в сгруппированном виде может быть записано следующим образом:

$$X = X_{I_1} + X_{I_2} + \dots + X_{I_r}, \tag{22}$$

где $X_{I_j} = X_{i_{j1}} + X_{i_{j2}} + \dots + X_{i_{jp_j}}$; $I_j = \{i_{j1}, i_{j2}, \dots, i_{jp_j}\}$, $j = \overline{1, r}$; I_j – непересекающиеся подмножества множества индексов $\{1, 2, \dots, d\}$.

4. Диагональное усреднение

Матрицы X_{I_j} , $j = \overline{1, r}$ сгруппированного разложения переводятся в систему новых рядов длины n . Для этого они разбиваются следующим образом $X_{I_j} = \begin{bmatrix} Y_{I_j}^{(1)} & Y_{I_j}^{(2)} & \dots & Y_{I_j}^{(N_Y)} & X_{I_j}^{(1)} & X_{I_j}^{(2)} & \dots & X_{I_j}^{(N_X)} \end{bmatrix}$. Далее производится диагональное усреднение каждой из матриц $Y_{I_j}^{(i)}$, $i = \overline{1, N_Y}$, $j = \overline{1, r}$ и $X_{I_j}^{(i)}$, $i = \overline{1, N_X}$, $j = \overline{1, r}$, преобразуя их в ВР $\tilde{Y}_{I_j}^{(i)}$, $i = \overline{1, N_Y}$, $j = \overline{1, r}$ и $\tilde{X}_{I_j}^{(i)}$, $i = \overline{1, N_X}$, $j = \overline{1, r}$ соответственно. В результате каждая матрица X_{I_j} порождает многомерный ВР $(\tilde{Y}_{I_j}^{(1)} \ \tilde{Y}_{I_j}^{(2)} \ \dots \ \tilde{Y}_{I_j}^{(N_Y)} \ \tilde{X}_{I_j}^{(1)} \ \tilde{X}_{I_j}^{(2)} \ \dots \ \tilde{X}_{I_j}^{(N_X)})$, $j = \overline{1, r}$ – восстановленную аддитивную компоненту исходного ряда $(Y^{(1)} \ Y^{(2)} \ \dots \ Y^{(N_Y)} \ X^{(1)} \ X^{(2)} \ \dots \ X^{(N_X)})$.

4. 2. 2. Прогнозирование временных рядов многомерным вариантом метода «Гусеница»-SSA

В теории одномерного метода «Гусеница»-SSA вычисление прогноза ВР выполняется непосредственно по линейной рекуррентной формуле, которую порождает траекторное пространство ряда. Траекторная матрица многомерного ВР несимметричная, поэтому далее рассмотрим два варианта метода «Гусеница»-SSA для прогнозирования многомерных ВР.

Путь имеется $N_X + N_Y$ ВР $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \dots, Y^{(N_Y)}, X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(N_X)}$ одинаковой длины n . Выберем длину окна $1 < L < n$.

L -продолжение многомерного ВР

$$\begin{pmatrix} Y_{n+1}^{(1)} & Y_{n+1}^{(2)} & \dots & Y_{n+1}^{(N_Y)} & X_{n+1}^{(1)} & X_{n+1}^{(2)} & \dots & X_{n+1}^{(N_X)} \end{pmatrix}$$

в пространстве столбцов траекторной матрицы имеет вид:

$$R_{n+1} = Y_{\Delta} S_L, \tag{23}$$

где

$$S_L = \frac{1}{1 - v^2} \sum_{j=1}^d \pi_j U_j^v \in \mathbf{R}^{L-1}; \tag{24}$$

U_1, U_2, \dots, U_d – левые сингулярные вектора сингулярного разложения траекторной матрицы ряда;

X^v – вектор, состоящий из первых $L-1$ компонент вектора X ;

π_j – последняя координата вектора U_j .

$$v^2 = \pi_1^2 + \dots + \pi_d^2;$$

$$Y_{\Delta} = \begin{pmatrix} Y_{n-L+2}^{(1)} & Y_{n-L+3}^{(1)} & \dots & Y_n^{(1)} \\ Y_{n-L+2}^{(2)} & Y_{n-L+3}^{(2)} & \dots & Y_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n-L+2}^{(N_Y)} & Y_{n-L+3}^{(N_Y)} & \dots & Y_n^{(N_Y)} \\ X_{n-L+2}^{(1)} & X_{n-L+3}^{(1)} & \dots & X_n^{(1)} \\ X_{n-L+2}^{(2)} & X_{n-L+3}^{(2)} & \dots & X_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n-L+2}^{(N_X)} & X_{n-L+3}^{(N_X)} & \dots & X_n^{(N_X)} \end{pmatrix}$$

– матрица из последних $L-1$ значений ВР.

K -продолжение многомерного ВР

$$\begin{pmatrix} Y_{n+1}^{(1)} & Y_{n+1}^{(2)} & \dots & Y_{n+1}^{(N_Y)} & X_{n+1}^{(1)} & X_{n+1}^{(2)} & \dots & X_{n+1}^{(N_X)} \end{pmatrix}$$

в пространстве строк траекторной матрицы имеет вид:

$$R_{n+1} = (I_{(N_X+N_Y)(N_X+N_Y)} - WW^T)^{-1} WU^T Z, \tag{25}$$

где $X^{v(N_X+N_Y)}$ – вектор, состоящий из всех компонент вектора X , кроме элементов с номерами, кратными K ; V_1, V_2, \dots, V_d – правые сингулярные вектора сингулярного разложения траекторной матрицы ряда;

$$W = \begin{pmatrix} \pi_1^{y^{(1)}} & \pi_2^{y^{(1)}} & \dots & \pi_d^{y^{(1)}} \\ \pi_1^{y^{(2)}} & \pi_2^{y^{(2)}} & \dots & \pi_d^{y^{(2)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_1^{y^{(N_Y)}} & \pi_2^{y^{(N_Y)}} & \dots & \pi_d^{y^{(N_Y)}} \\ \pi_1^{x^{(1)}} & \pi_2^{x^{(1)}} & \dots & \pi_d^{x^{(1)}} \\ \pi_1^{x^{(2)}} & \pi_2^{x^{(2)}} & \dots & \pi_d^{x^{(2)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_1^{x^{(N_X)}} & \pi_2^{x^{(N_X)}} & \dots & \pi_d^{x^{(N_X)}} \end{pmatrix};$$

$$U = (U_1^{v(N_X+N_Y)}, U_2^{v(N_X+N_Y)}, \dots, U_d^{v(N_X+N_Y)});$$

$$Z^{y^{(i)}} = (y_{n-K+2}^{(i)} \ y_{n-K+3}^{(i)} \ \dots \ y_n^{(i)})^T, \ i = \overline{1, N_Y};$$

$$Z^x = (x_{n-K+2}^{(i)} \ x_{n-K+3}^{(i)} \ \dots \ x_n^{(i)})^T, \ i = \overline{1, N_X};$$

$$Z = \left(Z^{y^{(1)}} \quad Z^{y^{(2)}} \quad \dots \quad Z^{y^{(N_Y)}} \quad Z^{x^{(1)}} \quad Z^{x^{(2)}} \quad \dots \quad Z^{x^{(N_X)}} \right)^T$$

– вектор последних значений всей совокупности рядов.

4. 3. Гибридные математические модели на основе многомерного варианта метода «Гусеница»-SSA и моделей VARMAX и SARIMAX

В данном разделе предложено, используя формулы *L*- и *K*-продолжения формировать передаточные функции модели (5).

Гибридная математическая модель на основе выражения *L*-продолжения и модели VARMAX запишется следующим образом:

$$S_{L-1}(B)Y_t = D(B)W_t, \tag{26}$$

где $S_{L-1}(B) = 1 - [S_L]_{L-1}B - [S_L]_{L-2}B^2 - \dots - [S_L]_1B^{L-1}$. Да-дим обозначение модели (26) *L*-MSSA – VMA.

Теперь рассмотрим формулу *K*-продолжения (25). Сделаем следующие обозначения:

$$\Psi = \left(I_{(N_Y+N_X)(N_Y+N_X)} - WW^T \right)^{-1} WU^T.$$

Тогда выражение для гибридной модели на основе метода *K*-MSSA и модели VARMAX будет иметь вид:

$$\Psi^A(B)Y_t = \Psi^G(B)X_t + D'(B)W_t, \tag{27}$$

где $\Psi^A(B)$, $\Psi^G(B)$, $D'(B)$ – матричные полиномы степеней *m*, *r*, *l*, т. е.:

$$\Psi^A(B) = I - \sum_{i=1}^{n_A} \Psi_i^A B^i, \quad \Psi^G(B) = \sum_{i=1}^{n_G} \Psi_i^G B^i,$$

$$D'(B) = I + \sum_{i=1}^{n_D} D_i' B^i;$$

$$\Psi_i^A = \begin{bmatrix} \Psi_{0(K-1)+i}^{(y^{(1)})} & \Psi_{1(K-1)+i}^{(y^{(1)})} & \dots & \Psi_{(N_Y-1)(K-1)+i}^{(y^{(1)})} \\ \Psi_{0(K-1)+i}^{(y^{(2)})} & \Psi_{1(K-1)+i}^{(y^{(2)})} & \dots & \Psi_{(N_Y-1)(K-1)+i}^{(y^{(2)})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_{0(K-1)+i}^{(y^{(N_Y)})} & \Psi_{1(K-1)+i}^{(y^{(N_Y)})} & \dots & \Psi_{(N_Y-1)(K-1)+i}^{(y^{(N_Y)})} \end{bmatrix},$$

$$\Psi_i^G = \begin{bmatrix} \Psi_{N_Y(K-1)+i}^{(y^{(1)})} & \Psi_{(N_Y+1)(K-1)+i}^{(y^{(1)})} & \dots & \Psi_{(N_Y+N_X-1)(K-1)+i}^{(y^{(1)})} \\ \Psi_{N_Y(K-1)+i}^{(y^{(2)})} & \Psi_{(N_Y+1)(K-1)+i}^{(y^{(2)})} & \dots & \Psi_{(N_Y+N_X-1)(K-1)+i}^{(y^{(2)})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_{N_Y(K-1)+i}^{(y^{(N_Y)})} & \Psi_{(N_Y+1)(K-1)+i}^{(y^{(N_Y)})} & \dots & \Psi_{(N_Y+N_X-1)(K-1)+i}^{(y^{(N_Y)})} \end{bmatrix},$$

$$D_i' = \begin{bmatrix} d'_{11} & d'_{12} & \dots & d'_{1\ell} \\ d'_{21} & d'_{22} & \dots & d'_{2\ell} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ d'_{m1} & d'_{m2} & \dots & d'_{m\ell} \end{bmatrix}, \quad i = \overline{0, p}.$$

Обозначим модель (27) *K*-MSSA – VARMAX.

4. 3. 1. Метод прогнозирования взаимосвязанных временных рядов на основе совместного использования многомерного метода «Гусеница»-SSA и моделей SARIMAX

Ниже приведен алгоритм метода на основе совместного использования многомерного варианта метода «Гусеница»-SSA и моделей VARMAX.

1. Применяя многомерный метод «Гусеница»-SSA к исходным ВР, определяются:

– вектор S_L и полином $S_{L-1}(B)$, если строим модель (26);

– вектор Ψ и полиномы $\Psi^A(B)$, $\Psi^G(B)$ и $D'(B)$, если строим модель (27).

2. Определяется многомерный ВР $\tilde{Y}_t^{S_L}$ следующим образом:

$$- \tilde{Y}_t^{S_L} = \left(\tilde{y}_t^{(1)} \quad \tilde{y}_t^{(2)} \quad \dots \quad \tilde{y}_t^{(N_Y)} \right)^T,$$

где

$$\tilde{y}_t^{(i)} = [S_L]_{L-1} \tilde{y}_{t-1}^{(i)} + [S_L]_{L-2} \tilde{y}_{t-2}^{(i)} + \dots + [S_L]_1 \tilde{y}_{t-(L-1)}^{(i)},$$

$$i = \overline{1, N_Y}, \quad t = \overline{L, n}, \text{ если строим модель (26);}$$

$$- \tilde{Y}_t^\Psi = \frac{\Psi^G(B)}{\Psi^A(B)} X_t = \Psi_1^A \tilde{Y}_{t-2}^\Psi + \dots + \Psi_1^A \tilde{Y}_{t-2}^\Psi + \dots + \Psi_{K-1}^A \tilde{Y}_{t-(K-1)}^\Psi + \Psi_0^G X_t - \dots - \Psi_{K-1}^G X_{t-(K-1)},$$

$$t = \overline{K, n}, \text{ если строим модель (27).}$$

3. Вычисляется остаточный ВР E_t следующим образом:

$$- E_t^{S_L} = Y_t - \tilde{Y}_t^{S_L}, \quad t = \overline{1, n-L+1}, \text{ если строим модель (26);}$$

$$- E_t^\Psi = Y_t - \tilde{Y}_t^\Psi, \quad t = \overline{1, n-K+1}, \text{ если строим модель (27).}$$

4. Идентифицируются модели VMA для остаточного ВР

$$- E_t^{S_L} = D(B)W_t, \text{ если строим модель (26);}$$

$$- E_t^\Psi = D'(B)W_t, \text{ если строим модель (27).}$$

5. Вычисляется прогноз по модели (26) или (27).

4. 4. Гибридные математические модели и методы декомпозиционного подхода к прогнозированию взаимосвязанных нестационарных временных рядов на основе многомерного варианта метода «Гусеница»-SSA и моделей SARIMAX

Математическая модель взаимосвязанных нестационарных случайных процессов, позволяющая описывать широкий класс регулярных случайных процессов, содержащих полиномиальные, полигармонические и стохастические тренды и аддитивный цветной шум рассмотрена в [12]:

$$y_t = \sum_{i=1}^N \frac{\omega_{c_i}^{(i)}(B)}{\delta_{r_i}^{(i)}(B)} x_{t-b_i}^{(i)} + \frac{\theta_q^*(B)}{\Phi_p^+(B)} a_t, \tag{28}$$