33. Карелин, В. П. Модели и методы представления знаний и выработки решений в интеллектуальных информационных системах с нечеткой логикой [Текст] / В. П. Карелин // Вестник ТИУЭ, Таганрог. – 2014. № 1. С. 75 82.
34. Zadeh, L. A. Fuzzy Logic Computing with Words [Text] / L. A. Zadeh // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. – 1996. – Vol. 4, Issue 2. – P. 103 111.
35. Заде, Л. А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений [Текст] / Л. А. Заде. – М.: Мир, 1976.
36. Chen, C. T. A fuzzy approach for supplier evaluation and selection in supply chain management [Text] / C. T. Chen, C. T. Lin, S. F. Huang // International Journal of Production Economics. – 2006. – Vol. 102, Issue 2. – P. 289–301. doi: 10.1016/j.ijpe.2005.03.009
37. Chen, C. T. Extensions of the TOPSIS for group decision-making under fuzzy environment [Text] / C. T. Chen // Fuzzy Sets and Systems. – 2000. – Vol. 114, Issue 1. – P. 1–9. doi: 10.1016/s0165-0114(97)00377-1
38. Саати, Т. Л. Принятие решений. Метод анализа иерархий [Текст] / Т. Л. Саати. – М.: Радио и связь, 1993. – 320 с.
39. Ногин, В. Д. Принятие решений при многих критериях [Текст] / В. Д. Ногин. – СПб.: 2007. – 103 с.
40. Hsu, H. M. Fuzzy credibility relation method for multiple criteria decision-making problems [Text] / H. M. Hsu, C. T. Chen // Information Sciences. – 1997. – Vol. 96, Issue 1–2. – P. 79–91. doi: 10.1016/s0020-0255(96)00153-3
41. Jabrailova, Z. G. Processing methods of information about the importance of the criteria in the solution of personnel management problems and contradiction detection [Text] / Z. G. Jabrailova, S. M. Nobari // Problems of information technology. – 2011. – Vol. 2. – P. 57–66. – Available at: http://jpit.az/storage/files/article/8a78f78a95641546667c863d448bfa7d.pdf

УДК 658.012

DOI: 10.15587/1729-4061.2015.40567

ОЦЕНКА ВАЖНОСТИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ МЕТОДОМ ПОПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ ПРИ СКАЛЯРИЗАЦИИ ВЕКТОРНОГО КРИТЕРИЯ

Т. И. Каткова
Кандидат педагогических наук, доцент
Кафедра математики и математических методов
Бердянский университет менеджмента и бизнеса
ул. Свободы, 117, г. Бердянск, Украина, 71100
E-mail: 777-kit@ukr.net; 777-kit@list.ru

Розглянуто загальний конструктивний недолік традиційних методик оцінки важливості приватних показників об'єктів, який викликаний недостатньою адекватністю процедури розрахунку вагових коефіцієнтів. Для оцінки важливості показників якості об'єкта запропонована модифікована процедура попарних порівнянь. При цьому у разі, якщо елементи матриці попарних порівнянь, сформованої за результатами опитування експертів, не узгоджені, то реалізується корекція цієї матриці

Ключові слова: метод аналізу ієрархій, метод попарних порівнянь, вагові коефіцієнти, оцінка показників

Рассмотрен общий конструктивный недостаток традиционных методик оценки важности частных показателей объектов, связанный с недостаточной адекватностью процедуры расчета весовых коэффициентов. Для оценки важности показателей качества объекта предложена модифицированная процедура попарных сравнений. При этом в случае, если элементы матрицы попарных сравнений, формируемой по результатам опроса экспертов, не согласованы, реализуется коррекция этой матрицы

Ключевые слова: метод анализа иерархий, метод попарных сравнений, весовые коэффициенты, оценка показателей

1. Введение

Традиционные технологии выбора наилучшего из совокупности объектов основаны на скаляризации векторного критерия, составленного из набора частных показателей (характеристик) объектов. Важности (веса) частных показателей оцениваются по результатам обработки опроса экспертов. При этом, эксперты, независимо оценивая относительную важность частных показателей, ранжируют их, после чего сумма рангов определяет итоговую оценку важности каждого показателя. Полученные весовые коэффициенты используются далее для оценки результирующих показателей объектов при их сравнении с целью выбора наилучшего.

Следует обратить внимание на общий конструктивный недостаток подобных методик, связанный с недостаточной адекватностью процедуры расчета весовых коэффициентов. По существу, весовой коэффициент, рассчитанный по приведенной схеме, однозначно определяется только местом, которое занял соответствующий показатель в табели о рангах. Вместе с тем реальная важность двух показателей, занявших соседние места в этой таблице, может отличаться гораздо более существенно, нежели это определяется их местом. Отмеченный недостаток носит общий характер. В подобной ситуации, когда непосредственное оценивание весов параметров сравниваемых объектов затруднительно, а использование только ранжирования может привести к неточному выбору, в последнее время все большее применение находит метод, основой которого являются парные предпочтения одних параметров перед другими. Экспертная оценка таких предпочтений – задача, безусловно, более простая, нежели задача непосредственного оценивания важности параметров, и она решается экспертами гораздо более уверенно.

2. Анализ литературных данных и постановка задачи

Соответствующая процедура, использующая результаты парных сравнений, была предложена и обоснована американским математиком Томасом Саати в [1], названа методом анализа иерархий и реализуется следующим образом.

Пусть каждый из множества объектов выбора характеризуется n параметрами. На первом этапе формируется матрица A попарных сравнений значимости (веса) параметров вида

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

где a_{ij} – число, определяющее уровень предпочтения параметра i перед параметром j, причем $a_{ii}=1$, $a_{ji}=(a_{ij})^{-1}$, $i=1,2,\dots,n;\ j=1,2,\dots,n$.

Далее для этой матрицы решается так называемая «проблема собственных значений» [2, 3]. При этом составляется характеристическое уравнение

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1-\lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 1-\lambda \end{pmatrix}=0,$$

решение которого дает набор $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ собственных значений матрицы A. После этого отыскивается нормированный (то есть такой, для которого сумма компонентов равна единице) собственный вектор W этой матрицы, соответствующий максимальному собственному числу $\lambda_{\max}=\max(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$. Матрица A – положительна по построению. Для таких матриц максимальное собственное число и соответствующий собственный вектор также положительны [4]. Пусть в результате решения получен собственный вектор

$$W=(w_1,w_2,\dots,w_n).$$

Легко показать, что компоненты этого вектора имеют смысл весовых коэффициентов, характеризующих относительную важность параметров объекта. Пусть элементы матрицы A согласованы, то есть выполняется соотношение

$$a_{ik}=a_{ij}a_{jk},\ \ i=1,2,\dots,n,\ j=1,2,\dots,n,\ k=1,2,\dots,n.$$

Просуммируем левую и правую части этого равенства по j. При этом

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ik}=na_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}a_{jk},\ \ i=\overline{1,n},k=\overline{1,n},$$

и

$$a_{ik}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}a_{jk},\ i=\overline{1,n},k=\overline{1,n}. \tag{1}$$

Матричный аналог этого соотношения имеет вид:

$$\frac{1}{n}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{n}\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n}a_{1k}a_{k1} & \sum_{k=1}^{n}a_{1k}a_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{n}a_{1k}a_{kn} \\ \sum_{k=1}^{n}a_{2k}a_{k1} & \sum_{k=1}^{n}a_{2k}a_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{n}a_{2k}a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{k1} & \sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^{n}a_{nk}a_{k1} & \sum_{k=1}^{n}a_{nk}a_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{n}a_{nk}a_{kn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{n}AA=A. \tag{2}$$

Как известно, матрица A, для которой $AA=A$, называется идемпотентной. По аналогии с этим будем называть матрицу A, для которой имеет место (2) n-идемпотентной.

Предположим, что известны весовые коэффициенты $w_1,w_2,\dots,w_n$ задающие значимости (важность, ценность) параметров. Тогда значимость i-го параметра по сравнению с j-м целесообразно оценивать по формуле

$$a_{ij}=\frac{w_i}{w_j},\ i,j=\overline{1,n}. \tag{3}$$

При этом

$$a_{ji}=\frac{w_j}{w_i}=\frac{1}{\frac{w_i}{w_j}}=\frac{1}{a_{ij}},$$

$$a_{ij}a_{jk}=\frac{w_i}{w_j}\frac{w_j}{w_k}=\frac{w_i}{w_k}=a_{ik}.$$

Из (3) получим

$$a_{ij}\frac{w_j}{w_i}=1,\ \ i,j=\overline{1,n},$$

и, следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}w_j\frac{1}{w_i}=\frac{1}{w_i}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}w_j=n,\ \ i=\overline{1,n},$$

то есть

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}w_j=nw_i,$$

что соответствует матричному уравнению

$$Aw=nw. \tag{4}$$

Отсюда следует, что для обратносимметричной положительной согласованной матрицы A имеется собственное число, равное n, и соответствующий этому числу положительный собственный вектор w, компонентами которого являются веса элементов. Таким образом, полученное соотношение устанавливает связь между матрицей попарных сравнений значимости параметров и набором весовых коэффициентов. Итак, если задана матрица A, то неизвестный вектор w может быть получен путем расчета собственного вектора этой матрицы, соответствующего собственному числу, равному n. Вместе с тем этот вектор w может быть получен и более простым, следующим способом.

В соответствии с (3) матрица A имеет вид

$$A=\begin{pmatrix}\frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n}\\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \dots & \frac{w_2}{w_n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & \frac{w_n}{w_n}\end{pmatrix}.$$

Вычислим суммы элементов для каждой из строк матрицы A. Для произвольной i-й строки имеем

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\frac{w_i}{w_j}=w_i\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{w_j}=Cw_i,\ \ i=\overline{1,n}. \tag{5}$$

Из соотношения (5) следует, что собственный вектор w с точностью до константы может быть рассчитан непосредственно по элементам матрицы A. Константу C определим, исходя из естественного требования к нормировке вектора w, в соответствии с которым должно выполняться условие

$$\sum_{i=1}^{n}w_i=1. \tag{6}$$

Просуммируем левую и правую части соотношения (5) по i. При этом, с учетом (6) получим

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum_{i=1}^{n}Cw_i=C\sum_{i=1}^{n}w_i=C.$$

Тогда

$$w_i=\frac{1}{C}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=\frac{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}},\ \ i=\overline{1,n}. \tag{7}$$

Проверим, что получаемый в соответствии с (7) вектор $w^T=(w_1\ \ w_2\ \ \dots\ \ w_n)$ является собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному числу, равному n. С этой целью рассчитаем вектор, равный произведению Aw:

$$Aw=\begin{pmatrix}\frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n}\\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \dots & \frac{w_2}{w_n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & \frac{w_n}{w_n}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}\frac{w_1}{w_j}\\ \sum_{j=1}^{n}\frac{w_2}{w_j}\\ \dots\\ \sum_{j=1}^{n}\frac{w_n}{w_j}\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{w_i}{w_j}}=$$

$$=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{w_i}{w_j}}\cdot\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{w_1}{w_j}\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i}{w_j}\right)\\ \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{w_2}{w_j}\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i}{w_j}\right)\\ \dots\\ \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{w_n}{w_j}\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i}{w_j}\right)\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{w_i}{w_j}}\cdot\begin{pmatrix}\frac{w_1}{w_1}\cdot w_1\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{w_j}+\frac{w_1}{w_2}\cdot w_2\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{w_j}+\ldots+\frac{w_1}{w_n}\cdot w_n\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{w_j}\\ \frac{w_2}{w_1}\cdot w_1\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{w_j}+\frac{w_2}{w_2}\cdot w_2\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{w_j}+\ldots+\frac{w_2}{w_n}\cdot w_n\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{w_j}\\ \ldots\ldots\ldots\\ \frac{w_n}{w_1}\cdot w_1\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{w_j}+\frac{w_n}{w_2}\cdot w_2\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{w_j}+\ldots+\frac{w_n}{w_n}\cdot w_n\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{w_j}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{w_i}{w_j}}\cdot\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}\frac{w_1}{w_j}\\ \sum_{j=1}^{n}\frac{w_2}{w_j}\\ \dots\\ \sum_{j=1}^{n}\frac{w_2}{w_j}\end{pmatrix}=nw,$$

что соответствует матричному уравнению (4).

Таким образом, соотношение (7) позволят точно оценить веса сравниваемых параметров, однако только в том случае, если матрица A является n-идемпотентной. На практике матрица А, содержащая результаты попарных сравнений значимости признаков, формируемых экспертами, конечно, таковой не является. При этом, вектор, определяемый в соответствии с (7), оценивает весовые коэффициенты с погрешностью тем большей, чем сильнее реальная матрица A отличается от n-идемпотентной. В связи с этим, во многих работах, например, [5] предлагается следующий подход. После решения проблемы соответственных значений реальной матрицы попарных сравнений A и расчета максимального собственного числа λ_{max} вычисляется параметр – индекс однородности (ИО), равный

$$ИО = \frac{\lambda_{max} - n}{n-1},$$

а также параметр – отношение однородности (*ОО*), равный

$$ОО = \frac{ИО}{M(ИО)},$$

где $M(ИО)$ – математическое ожидание ИО для случайным образом составленной матрицы попарных сравнений, рассчитанное по экспериментальным данным. Таблица значений $M(ИО)$ приведена в [6]. При этом, если значение $ОО > 0.1$, то это свидетельствует о нарушении согласованности суждений, допущенной экспертами при составлении матрицы А.

Существенный недостаток этого похода состоит в следующем. Величина отклонения максимального собственного числа λ_{max} реальной матрицы А попарных сравнений не связана никакими формальными соотношениями с погрешностями в оценке важности частных показателей. Поэтому допустимый порог отклонения не может быть обоснован строго. Таким образом, ошибка, возникающая при использовании метода [5] не контролируема.

3. Цель и задачи исследований

Целью работы является разработка методики расчета набора относительных важностей показателей, непосредственно использующей матрицу попарных сравнений важности, полученную путем опроса экспертов. При этом естественный путь решения задачи состоит в нахождении матрицы X, обладающей следующими свойствами: матрица X должна быть согласована и минимально, в смысле наименьших квадратов, отличаться от заданной матрицы A.

Пусть

$A = (a_{ij}), \quad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}$ – исходная матрица попарных сравнений;

$X = (x_{ij}), \quad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}$ – искомая согласованная матрица попарных сравнений.

Формально задача может быть сформулирована следующим образом: найти матрицу X, минимизирующую

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - a_{ij})^2 \tag{8}$$

и удовлетворяющую ограничениям

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ik}x_{kj} = x_{ij},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}. \tag{9}$$

Для достижения поставленной цели были поставлены следующие задачи:

– разработка точного метода построения согласованной матрицы, минимально отличающейся от заданной матрицы попарных сравнений;

– разработка приближенного метода построения согласованной матрицы, обладающей требуемым свойством.

4. Разработка методики построения согласованной матрицы попарных сравнений, минимально отклоняющейся от заданной

Полученная задача (8), (9) является нетривиальной задачей квадратического программирования [6, 7] с достаточно сложной системой нелинейных ограничений. Для ее решения используем метод неопределенных множителей Лагранжа.

Формируем функцию Лагранжа:

$$\Phi(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - a_{ij})^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_{ik}x_{kj} - x_{ij}\Big). \tag{10}$$

Беря частные производные от (10) по переменным задачи и приравнивая их к нулю, получаем систему уравнений

$$\frac{\partial\Phi(x,\lambda)}{\partial x_{ij}} = 2(x_{ij} - a_{ij}) + \lambda_{ij}\left[\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}x_{ik} + \sum_{k=1}^{n}x_{kj}\right) - 1\right] = 0,$$

$$i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial\Phi(x)}{\partial\lambda_{ij}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_{ik}x_{kj} - x_{ij} = 0,\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}. \tag{12}$$

Перепишем уравнения системы (11) в более удобном виде:

$$2\Big(1+\frac{\lambda_{11}}{n}\Big)x_{11} + \frac{\lambda_{11}}{n}\left(\sum_{k\neq 1}^{n}x_{1k} + \sum_{k\neq 1}^{n}x_{k1}\right) = 2a_{11} + \lambda_{11},$$

$$2\Big(1+\frac{\lambda_{12}}{n}\Big)x_{12} + \frac{\lambda_{12}}{n}\left(\sum_{k\neq 2}^{n}x_{2k} + \sum_{k\neq 2}^{n}x_{k2}\right) = 2a_{12} + \lambda_{12},$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$2\Big(1+\frac{\lambda_{ij}}{n}\Big)x_{ij} + \frac{\lambda_{ij}}{n}\left(\sum_{k\neq j}^{n}x_{ik} + \sum_{k\neq i}^{n}x_{kj}\right) = 2a_{ij} + \lambda_{ij}, \tag{13}$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$2\Big(1+\frac{\lambda_{nn}}{n}\Big)x_{nn} + \frac{\lambda_{nn}}{n}\left(\sum_{k\neq j}^{n}x_{nk} + \sum_{k\neq i}^{n}x_{kn}\right) = 2a_{nn} + \lambda_{nn}.$$

Компактная запись системы уравнений (13) обеспечивается с использованием матричных отношений.

Введем матрицы

$$A_1=\begin{pmatrix} 2\left(1+\frac{\lambda_{11}}{n}\right) & \frac{\lambda_{11}}{n} & \dots & \frac{\lambda_{11}}{n}\\ \frac{\lambda_{12}}{n} & 2\left(1+\frac{\lambda_{12}}{n}\right) & \dots & \frac{\lambda_{12}}{n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\lambda_{1n}}{n} & \frac{\lambda_{1n}}{n} & \dots & 2\left(1+\frac{\lambda_{1n}}{n}\right)\end{pmatrix},$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$A_s=\begin{pmatrix} 2\left(1+\frac{\lambda_{s1}}{n}\right) & \frac{\lambda_{s1}}{n} & \dots & \frac{\lambda_{s1}}{n}\\ \frac{\lambda_{s2}}{n} & 2\left(1+\frac{\lambda_{s2}}{n}\right) & \dots & \frac{\lambda_{s2}}{n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\lambda_{sn}}{n} & \frac{\lambda_{sn}}{n} & \dots & 2\left(1+\frac{\lambda_{sn}}{n}\right)\end{pmatrix},$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$A_n=\begin{pmatrix} 2\left(1+\frac{\lambda_{n1}}{n}\right) & \frac{\lambda_{n1}}{n} & \dots & \frac{\lambda_{n1}}{n}\\ \frac{\lambda_{n2}}{n} & 2\left(1+\frac{\lambda_{n2}}{n}\right) & \dots & \frac{\lambda_{n2}}{n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\lambda_{nn}}{n} & \frac{\lambda_{nn}}{n} & \dots & 2\left(1+\frac{\lambda_{nn}}{n}\right)\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix} \frac{\lambda_{11}}{n} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\lambda_{12}}{n} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_{1n}}{n}\end{pmatrix},\dots,$$

$$B_s=\begin{pmatrix} \frac{\lambda_{s1}}{n} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\lambda_{s2}}{n} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_{sn}}{n}\end{pmatrix},\dots,$$

$$B_n=\begin{pmatrix} \frac{\lambda_{n}}{n} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\lambda_{n2}}{n} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_{nn}}{n}\end{pmatrix}$$

и векторы

$$X_1=\left(x_{11} \quad x_{12} \quad \dots \quad x_{1n}\right),$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$X_s=\left(x_{s1} \quad x_{s2} \quad \dots \quad x_{sn}\right),$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$X_n=\left(x_{n1} \quad x_{n2} \quad \dots \quad x_{nn}\right),$$

$$P_1=\begin{pmatrix} 2a_{11}+\lambda_{11}\\ 2a_{12}+\lambda_{12}\\ \dots\\ 2a_{1n}+\lambda_{1n}\end{pmatrix},\dots,P_s=\begin{pmatrix} 2a_{s1}+\lambda_{s1}\\ 2a_{s2}+\lambda_{s2}\\ \dots\\ 2a_{sn}+\lambda_{sn}\end{pmatrix},\dots,P_n=\begin{pmatrix} 2a_{n1}+\lambda_{n1}\\ 2a_{n2}+\lambda_{n2}\\ \dots\\ 2a_{nn}+\lambda_{nn}\end{pmatrix}.$$

С использованием введенных обозначений система (13) запишется так:

$$A_1X_1^T+B_1X_2^T+B_1X_3^T+\dots+B_1X_n^T=P_1,$$

$$B_2X_1^T+A_2X_2^T+B_2X_3^T+\dots+B_2X_n^T=P_2,$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$B_nX_1^T+B_nX_2^T+B_nX_3^T+\dots+A_nX_n^T=P_n. \tag{14}$$

Полученная система линейных алгебраических уравнений может быть решена численно любым известным методом [10] (Гаусса, Жордана-Гаусса и т. д.). Вместе с тем специфическая структура системы (14) позволяет получить решение в явном виде.

Перепишем уравнения системы следующим образом:

$$\left(A_1-B_1\right)X_1^T+B_1X_1^T+B_1X_2^T+B_1X_3^T+\dots+B_1X_n^T=P_1,$$

$$\left(A_2-B_2\right)X_2^T+B_2X_1^T+B_2X_2^T+B_2X_3^T+\dots+B_2X_n^T=P_2,$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\left(A_n-B_n\right)X_n^T+B_nX_1^T+B_nX_2^T+B_1X_3^T+\dots+B_1X_n^T=P_n$$

или

$$\left(A_1-B_1\right)X_1^T+B_1\sum_{j=1}^{n}X_j=P_1,$$

$$\left(A_2-B_2\right)X_2^T+B_2\sum_{j=1}^{n}X_j=P_2,$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\left(A_n-B_n\right)X_n^T+B_n\sum_{j=1}^{n}X_j=P_n.$$

Тогда

$$B_1^{-1}(A_1-B_1)X_1^T-B_1^{-1}P_1=-\sum_{J=1}^{n}X_j^T,$$

$$B_2^{-1}(A_2-B_2)X_2^T-B_2^{-1}P_2=-\sum_{J=1}^{n}X_j^T,$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$B_n^{-1}(A_n-B_n)X_n^T-B_n^{-1}P_n=-\sum_{J=1}^{n}X_j^T.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}&\left(B_1^{-1}A_1 - I\right)X_1^T - B_1^{-1}P = \left(B_2^{-1}A_2 - I\right)X_2^T - B_2^{-1}P_2 = \ldots\\&\ldots = \left(B_n^{-1}A_n - I\right)X_n^T - B_n^{-1}P_n.\end{aligned} \tag{15}$$

Последнее соотношение позволяет выразить $X_j^T, j=\overline{2,n}$, через X_1^T. Имеем

$$\begin{aligned}X_j^T &= \left(B_j^{-1}A_j - I\right)^{-1}\left[\left(B_1^{-1}A_1 - I\right)X_1^T - B_1^{-1}P_1 + B_j^{-1}P_j\right] =\\&= \left(B_j^{-1}A_j - I\right)^{-1}\left(B_1^{-1}A_1 - I\right)\times\\&\times X_1^T + \left(B_j^{-1}A_j - I\right)^{-1}\left(B_j^{-1}P_j - B_1^{-1}P_1\right) =\\&= C_{1j}X_1^T + D_{1j},\ j=\overline{2,n}\ .\end{aligned} \tag{16}$$

Подставляя (15) в первое уравнение системы (14), получим

$$\left(A_1 + \sum_{j=2}^{n} C_{1j}\right)X_1^T + \sum_{J=2}^{n} D_{1j} = P_1,$$

откуда

$$X_1^T = \left(A_1 + \sum_{j=2}^{n} C_{1j}\right)^{-1}\left(P_1 - \sum_{j=2}^{n} D_{1j}\right), \tag{17}$$

после чего с использованием (16) аналогично этому, вычисляем остальные векторы $X_2^T, \ldots, X_n^T$.Теперь, имея в виду (9), получаем систему уравнений для отыскания значений неопределенных множителей Лагранжа, что обеспечивает точное решение задачи. Заметим, однако, что получаемую при этом нелинейную систему уравнений можно решить только численно [10]. Вычислительная сложность решения этой задачи быстро растет с увеличением размерности задачи. В [11] приводится следующая оценка числа K элементарных операций, требуемых для решения квадратической системы с $N = n^2$ переменными и $M = n^3$ ограничениями:

$$K \cong N^2 M^4.$$

Если при этом $n = 10$, то K имеет порядок 10^{16}. Такая задача не может быть решена в приемлемое время даже ЭВМ с производительностью порядка 10^{12} оп/с. В связи с этим в [12] предложена менее трудоемкая, итерационная процедура получения согласованной матрицы. Эта процедура обеспечивает приближенное решение задачи и реализуется следующим образом.

Пусть проделано l итераций коррекции, в результате которых получена матрица A_l. На очередной $(l+1)$-й итерации выполняются следующие вычисления.

$$\frac{1}{n}A_l A_l = \hat{A}_{l+1} = \left\{\hat{a}_{ij}^{(l+1)}\right\}; \tag{18}$$

$$\begin{aligned}a_{ij}^{(l+1)} &= \frac{\hat{a}_{ij}^{(l+1)}}{\left(\hat{a}_{ij}^{(l+1)} \cdot \hat{a}_{ji}^{(l+1)}\right)^{\frac{1}{2}}},\\a_{ji}^{(l+1)} &= \frac{\hat{a}_{ji}^{(l+1)}}{\left(\hat{a}_{ij}^{(l+1)} \cdot \hat{a}_{ji}^{(l+1)}\right)^{\frac{1}{2}}}.\end{aligned} \tag{19}$$

В результате матрица A_{l+1} будет обратно симметричной и более согласованной, нежели предыдущая матрица A_l.

Вычисления продолжаются до выполнения критерия останова

$$\eta_l = \max_{i,j}\left|a_{ij}^{(l)} - a_{ij}^{(l+1)}\right| < \varepsilon,$$

где ε – некоторое достаточно малое наперед заданное число (например, $\varepsilon = 10^{-3}$).

Сходимость предложенной процедуры проверена экспериментально.

Недостаток этого метода состоит в том, что получаемая в результате согласованная матрица не будет строго обеспечивать минимум суммы квадратов отклонений элементов этой матрицы от исходной, то есть результаты решения задачи коррекции исходной матрицы точным методом (17), (16) и приближенным методом (18), (19) не будут совпадать.

С целью улучшение точности приближенного метода введем в процедуру коррекции подготовительный этап, на котором осуществим предварительное преобразование исходной матрицы попарных сравнений A по формулам

$$\hat{a}_{ij} = \frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i} a_{ik}a_{kj},\ i \le j, \tag{20}$$

$$\hat{a}_{ij} = \frac{1}{n-i}\sum_{k=i+1}^{i} a_{ik}a_{kj},\ i > j. \tag{21}$$

Получаемая в результате матрица $\hat{a}_{ij}$ далее корректируется в соответствии с приближенным методом (18)–(19).

Проведем оценку целесообразности использования предварительного преобразования исходной матрицы A.

Пусть

$A^{(П1)} = \left(a_{ij}^{(П1)}\right)$ – решение задачи приближенным методом (18)–(19);

$A^{(П2)} = \left(a_{ij}^{(П2)}\right)$ – решение, получаемое с использованием предварительного преобразования исходной матрицы A .

Введем критерии

$$R_1 = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{a_{ij} - a_{ij}^{(П1)}}{a_{ij}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$R_2 = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{a_{ij} - a_{ij}^{(П2)}}{a_{ij}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

характеризующие соответственно меру близости решений $A^{(П1)}$ и $A^{(П2)}$ к исходной матрице. Результаты расчета R_1 и R_2 для матриц различных размеров сведена в табл. 1.

Таким образом, предварительное преобразование исходной матрицы A улучшает точность решения задачи оценки важности показателей с использованием метода попарных сравнений.

Таблица 1

Оценка точности приближенного решения

n	5	10	15	20
R_1	0,01	0,018	0,026	0,035
R_2	0,006	0,011	0,012	0,015

5. Выводы

1. Рассмотрены известные технологии оценки относительной важности частных показателей объектов, основанные на методе попарных сравнений. Выявлен их общий конструктивный недостаток, связанный с недостаточной адекватностью процедуры расчета весовых коэффициентов, использующей реальные матрицы попарных сравнений.

2. Для оценки важности показателей качества объекта предложена модификация известной процедуры попарных сравнений, обеспечивающая получение точной согласованной матрицы попарных сравнений.

3. Для случая, когда мнения экспертов не согласованы, то есть матрица попарных сравнений важности показателей не транзитивна, предложен приближенный метод коррекции исходной матрицы.

4. С целью повышения точности приближенного метода рассмотрена процедура предварительного преобразования исходной матрицы попарных сравнений. Эффективность процедуры подтверждена экспериментально.

Литература

1. Saaty, T. L. Axiomatic Foundation of the Analytic Hierarchy Process [Text] / T. L. Saaty // Management Science. – 1986. – Vol. 32, Issue 7. – P. 841–855. doi: 10.1287/mnsc.32.7.841
2. Воеводин, В. В. Некоторые методы решения проблемы собственных значений [Текст] / В. В. Воеводин // Ж. вычислительной математики и математической физики. – 1962. - Т. 2, № 1. – С. 15–24.
3. Wilkinson, J. H. The Algebraic Eigenvalue Problem [Text] / J. H. Wilkinson. – NewYork: Oxford Univ. Press, 1965. – 662 p.
4. Lancaster, K. J. Mathematical Economics [Text] / K. J. Lancaster. – New York: Macmillan, 1968. - 411 p.
5. Андрейчиков, А. В. Анализ, синтез, планирование решений в экономике [Текст] / А. В. Андрейчиков, О. А. Андрейчикова. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 368 с.
6. Зуховицкий, С. И. Линейное и выпуклое программирование [Текст] / С. И. Зуховицкий, Л. И. Авдеева. – М. : Наука, 1967. – 460 с.
7. Мину, М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы [Текст] / М. Мину; пер.с фр.и предисл. А. И. Штерна. – М. : Наука, 1990. – 488 с.
8. Taha, H. A. Operations Research – An Introduction. 7th edition [Text] / H. A. Taha. – New Jersey : Prentice Hall, Inc., 2003. – 813 p.
9. Varian, H. R. Microeconomic analysis. 3rd edition [Text] / H. R. Varian. – New York : Norton, 1992. – 506 p.
10. Самарский, А. А. Численные методы [Текст] / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М. : Наука, 1989. – 468 с.
11. Иванов, В. В. Методы вычислений на ЭВМ [Текст] / В. В. Иванов. – К. : Наук. думка, 1986. – 584 с.
12. Раскин, Л. Г. Формирование скалярного критерия предпочтения по результатам попарных сравнений объектов [Текст] / Л. Г. Раскин, О. В. Серая // Системный анализ, управление и информационные технологии. Вестник НТУ «ХПИ». – 2003. – №6. – С. 63–68.