В статті розглядаються часткові випадки загального рівняння руху рідини в напругах, які виникають при його математичному перетворенні. Для цього застосовується мінімальна кількість відомих обмежень, що характерні для ньютонівської, нев'язкої та ідеальної рідини. Збудована ієрархічна схема знайдених та відомих диференційних рівнянь. Показано, що рівняння Навье-Стокса е частковим випадком іншого більш загального диференційного рівняння

Ключові слова: загальне рівняння, Навье-Стокс, Ейлер, Пуазейль, безвихрова течія, 3d вихор

В статье рассматривается получение частных случаев уравнения движения в напряжениях путем использования минимального числа известных ограничений, характерных для ньютоновской, невязкой и идеальной жидкости. Построена иерархическая схема полученных и известных дифференциальных уравнений. Показано, что уравнение Навье-Стокса является частным случаем другого более общего уравнения движения ньютоновской жидкости

Ключевые слова: общее уравнение, Навье-Стокс, Эйлер, Пуазейль, безвихревое течение, 3d вихрь

УДК 532.5.01
DOI: 10.15587/1729-4061.2015.39886

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В НАПРЯЖЕНИЯХ ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. А. Бударин
Кандидат технических наук, доцент
Кафедра теоретической общей и нетрадиционной энергетики
Одесский национальный политехнический университет
пр. Шевченко, 1, г. Одесса, Украина, 65044
E-mail: vit-b@inbox.ru

1. Введение

Математическое описание поведения жидкостей и газов является важной и сложной задачей, которая до настоящего времени не решена. Основная сложность заключается в больших деформациях (скорости деформации) текучей среды, которой нельзя пренебречь, в отличие от деформированного твердого тела. Несмотря на одинаковую исходную систему уравнений твердого тела и жидкости, полученную Навье (Navier) для сплошной среды, точное и численное описание поведения жидкости менее полно, чем для твердого тела.

Такое исторически сложившееся положение требует проведения теоретических и экспериментальных исследований, которыми занимаются во многих странах мира. Особую актуальность имеет поиск новых точных уравнений движения текучей среды, так как они имеют большую общность и их область применения неограничена. К некоторым из таких областей относится движение транспортных средств в воде и в воздухе, ветроэнергетика, течения внутри энергетических установок, улучшение прогноза погоды, некоторые проблемы астрофизики, связанные с течением плазмы и др. [1, 2].

2. Анализ литературы и постановка проблемы

Наличие свойства текучести в жидкости приводит к конечным величинам конвективных ускорений и уравнения движения становятся нелинейными. Существует большое количество информации по расчету частных течений жидкости, однако точных решений уравнений движения в данной области механики немного. Для турбулентного течения таких решений нет, что потребовало разработки полуэмпирической теории турбулентности [3, 4]. Для ламинарного течения существует несколько точных задач, наиболее известное из которых названо в честь Пуазейля (Poiseuille). В рамках модели идеальной жидкости известно дифференциальное уравнение движения Эйлера, а также несколько его точных решений [5, 6]. Все это привело к большой доли физического и численного эксперимента при выполнении любого исследования в области механики жидкости и смежных дисциплинах [7–9].

Кроме силового поля, которое характеризуют уравнения движения, в несжимаемой жидкости существует второе физическое поле – скоростей деформаций, уравнения которого в данной статье не рассматриваются.

В основе математического описания течения жидкости лежит уравнение движения в напряжениях (Navier), которое может быть представлено в виде [5, 6, 10]:

$$X+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)=\frac{du_x}{dt},$$

$$Y+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right)=\frac{du_y}{dt},$$

$$Z+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}\right)=\frac{du_z}{dt}, \tag{1}$$

где p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} – нормальные напряжения, $\tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{yz}$ – касательные напряжения, X, Y, Z – удельная массовая сила, u_x, u_y, u_z – проекции скорости, t – время.

Одним из частных случаев этого уравнения для ньютоновской жидкости является уравнение Навье-Стокса. Существует несколько способов его вывода, из которых обратим внимание на изложенный в работах [5, 6]. Характерной особенностью этого вывода является более четкая формулировка приятых допущений, из которых необходимо выделить следующие.

– Среднее давление в точке ньютоновской жидкости можно найти как среднеарифметическое значение проекций

$$p=\frac{p_x+p_y+p_z}{3}. \qquad (2)$$

Как отмечается во некоторых работах, невозможно доказать, что найденная по формуле (2) величина p является давлением в термодинамическом понимании [5, 11].

– Вязкость влияет не только на касательные, но и на нормальные напряжения (p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}), что иллюстрируется системой уравнений [5, 6, 10].

$$p_{xx}=-p+2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x},$$
$$p_{yy}=-p+2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y},$$
$$p_{zz}=-p+2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}. \qquad (3)$$

Система (3) не согласуется с законом Ньютона для вязкого трения, согласно которому вязкость влияет только на касательные напряжения [5, 6, 10].

Уравнение Навье-Стокса до настоящего времени не решено в общем виде, а все его частные точные решения обладают одним общим свойством – результаты вычислений соответствуют наблюдениям в диапазоне чисел Рейнольдса Re≈(10^{-3}...5).

За прошедшие десятилетия высказывалось много критических замечаний в адрес этого уравнения, тем не менее оно получило большое распространение не только в механике жидкости, но также в других науках. Причиной такой ситуации является отсутствие других уравнений, которые были-бы более обоснованы с физической и математической точки зрения [5–7, 8, 12].

3. Цель и задачи исследования

Целью настоящей работы является получение более детальных уравнений движения путем преобразования (1) при минимальном числе известных ограничений, характерных для ньютоновской, невязкой и идеальной жидкости.

Для достижения цели выбран известный способ преобразования, который заключается в прибавлении к математическому выражению нуля с последующим его представлением в форме двух одинаковых слагаемых с разными знаками. Такой способ преобразования не требует использования дополнительных условий и их обоснования.

4. Преобразование уравнений движения и частные случаи

Преобразуем систему (1), отделив давление от касательных напряжений. Так как $p_{xx}=-p_x$, $p_{yy}=-p_y$, $p_{zz}=-p_z$ (где p_x, p_y, p_z – проекции давления).

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_x}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)=\frac{du_x}{dt},$$
$$Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_y}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right)=\frac{du_y}{dt},$$
$$Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_z}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\right)=\frac{du_z}{dt}. \qquad (3)$$

Преобразуем первую строчку уравнения (3), подставив выражения для касательных напряжений в ньютоновской жидкости

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_x}{\partial x}+\nu\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\right]=\frac{du_x}{dt}. \qquad (4)$$

Прибавим ноль к производным внутри скобок, представив его в форме двух одинаковых слагаемых с разным знаком.

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_x}{\partial x}+\nu\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}-\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}-\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\right]=\frac{du_x}{dt}.$$

В результате получим

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_x}{\partial x}+$$
$$+\nu\left[\frac{\partial}{\partial y}\left((\mathrm{rot}\,u)_z+2\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left((\mathrm{rot}\,u)_y+2\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\right]=$$
$$=\frac{du_x}{dt}.$$

После аналогичных преобразований

$$Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_y}{\partial y}+$$
$$+\nu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left((\mathrm{rot}\,u)_z+2\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left((\mathrm{rot}\,u)_x+2\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\right]=$$
$$=\frac{du_y}{dt}, \qquad (5)$$

$$Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_z}{\partial z}+$$
$$+\nu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left((\mathrm{rot}\,u)_y+2\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left((\mathrm{rot}\,u)_x+2\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\right]=$$
$$=\frac{du_z}{dt}.$$

В уравнениях (4, 5) использованы следующие выражения:

– для касательных напряжений в ньютоновской жидкости [5, 6] $\tau_{xy}=\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$, $\tau_{xz}=\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)$, $\tau_{yz}=\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)$;

– для ротора скорости [5] $(\mathrm{rot}\,u)_x=\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}$, $(\mathrm{rot}\,u)_y=\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}$, $(\mathrm{rot}\,u)_z=\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}$.

Характерной особенностью системы (5) является учет влияния вихревого (вращательного) и линейного (поступательного) течения жидкости, а также прямая зависимость давления от положения элементарной площадки.

Из уравнений (5) по условию $(\mathrm{rot}\,u)_i=0$ следуют уравнения вязкого безвихревого течения.

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_x}{\partial x}+2\nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z}\right)=\frac{du_x}{dt},$$

$$Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_y}{\partial y}+2\nu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial y}\right)=\frac{du_y}{dt},$$

$$Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_z}{\partial z}+2\nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y\partial z}\right)=\frac{du_z}{dt}. \qquad (6)$$

Пользуясь цилиндрическими координатами (r, z), можно получить частный случай уравнений (6) для круглой трубы в виде $\frac{d^2u_z}{dr^2}=\frac{1}{2\mu}\cdot\mathrm{grad}\,p$, из которого следует уравнение Пуазейля для ламинарного режима течения [5, 6, 10].

Система (5) имеет еще один частный случай для трехмерного вращающегося вихря без поступательного движения. Исключая линейные скорости в левой части (5), получим:

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_x}{\partial x}+\nu\left[\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{rot}\,u)_z+\frac{\partial}{\partial z}(\mathrm{rot}\,u)_y\right]=\frac{du_x}{dt},$$

$$Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_y}{\partial y}+\nu\left[\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{rot}\,u)_z+\frac{\partial}{\partial z}(\mathrm{rot}\,u)_x\right]=\frac{du_y}{dt},$$

$$Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_z}{\partial z}+\nu\left[\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{rot}\,u)_y+\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{rot}\,u)_x\right]=\frac{du_z}{dt}. \qquad (7)$$

Уравнение (7) можно представить в другой форме, использующей угловую скорость частицы.

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_x}{\partial x}+2\nu\left(\frac{\partial\omega_z}{\partial y}+\frac{\partial\omega_y}{\partial z}\right)=\frac{du_x}{dt},$$

$$Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_y}{\partial y}+2\nu\left(\frac{\partial\omega_z}{\partial x}+\frac{\partial\omega_x}{\partial z}\right)=\frac{du_y}{dt},$$

$$Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_z}{\partial z}+2\nu\left(\frac{\partial\omega_y}{\partial x}+\frac{\partial\omega_x}{\partial y}\right)=\frac{du_z}{dt},$$

где $(\mathrm{rot}\,u)_i=2\omega_i$, ω_i – угловая скорость вращения жидкой частицы.

Сравнивая выражения в скобках с формулами для касательных напряжений, можно заметить их аналогию. Эти выражения, в соответствии с размерностью, характеризуют силу трения, отнесенную к величине вращающегося объёма.

Рассматриваемый подход позволяет получить уравнение движения в рамках модели невязкой жидкости. Полагая $\nu=0$, получим из (5)–(7):

$$X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_x}{\partial x}=\frac{du_x}{dt},$$

$$Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_y}{\partial y}=\frac{du_y}{dt},$$

$$Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_z}{\partial z}=\frac{du_z}{dt}. \qquad (8)$$

Из (8) следует, что проекции давления могут отличаться при отсутствии влияния вязкости. Этот вывод противоречит известной точке зрения, что $p_x\neq p_y\neq p_z$ возможно только под влиянием вязкости [5, 6, 10].

Если принять гидростатической закон распределения давления $(p=p_x=p_y=p_z)$, то получим уравнение Эйлера из динамики идеальной жидкости [5, 12]. Из (1) можно получить уравнение Навье-Стокса, воспользовавшись несколькими известными допущениями [5–7].

5. Краткий анализ преобразования

Связи между рассмотренными уравнениями можно представить в виде следующей схемы (рис. 1).

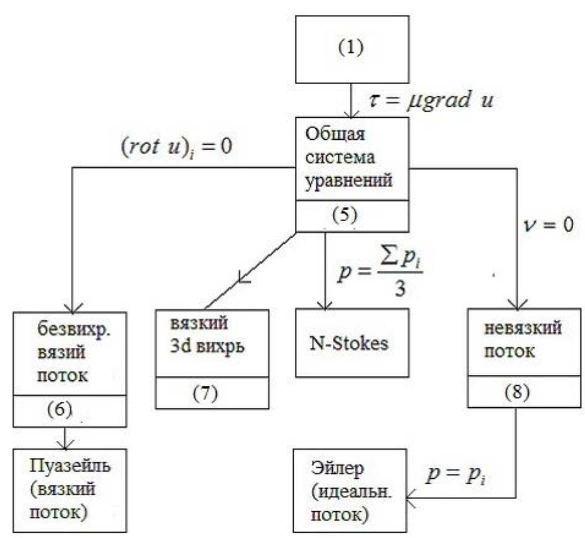

Рис. 1. Схема связей между уравнениями

В уравнении (5) присутствуют слагаемые, характеризующие все виды течения несжимаемой жидкости: поступательное и вихревое. Это дает основание предполагать, что оно может быть использовано для расчета турбулентного течения.

Пользуясь известным определением для безвихревого течения, из (5) можно найти уравнения для вязкого безвихревого течения, а также вязкого трехмерного вихря без линейной скорости.

Уравнение в форме (1) или (3) используется при выводе уравнения Навье-Стокса с использованием двух основных допущений [5, 6]:

Справедливо линейное уравнение $\left(p = \frac{p_x + p_y + p_z}{3}\right)$ для нахождения среднего давления нелинейной функции p=f(x, y, z, t). Это стандартное допущение выполняется только при малом интервале осреднения и должно считаться приближенным.

Давление в точке меняется под влиянием вязкости. Это допущение не согласуется с законом Ньютона для вязкого трения и противоречит уравнению движения для невязкой жидкости (8).

Учитывая оба допущения, уравнение Навье-Стокса должно считаться приближенным для ламинарного режима течения.

Рассмотренный в статье подход к математическому описанию течения несжимаемой жидкости позволяет найти еще один путь вывода известной формулы для ламинарного течения (Пуазейля) и дифференциального уравнения Эйлера (рис. 1).

6. Обсуждение уравнений и связей между ними

Система уравнений движения ньютоновской жидкости (5) получена из (1) при использовании только одного допущения, которым является закон Ньютона для вязкого трения. Это дает основание считать, что (5) является наиболее общей системой уравнений движения ньютоновской жидкости. Наличие в этих уравнениях слагаемых, характеризующих два возможных вида движения (линейное и вихревое) дает надежду на описание турбулентного режима течения.

Так как точные решения частных задач для этого режима отсутствуют, необходимо провести дополнительные теоретические и экспериментальные исследования для уточнения возможностей этой системы уравнений.

Система (6) получена из (5) путем исключения функции ротора скорости, характеризующего вихреобразование. Путем упрощения системы (6) можно получить известную формулу Пуазейля. Это дает основания полагать, что известное определение для безвихревого течения относится к ламинарному режиму.

В то же время упрощение (6) требует исключения большого числа слагаемых, вклад которых в общий результат расчета недостаточно ясен. Это требует проведения более детального анализа слагаемых, зависящих от вязкости.

Система (7) получена путем исключения из (5) слагаемых, характеризующих линейное движение, и не имеет ясного определения в литературе, а также точных решений. Тем не менее, течения такого типа (стоячие воздушные и водяные вихри) наблюдаются в природе и технике, что дает надежду на совершенствование их математического описания [1, 6].

Найденные системы уравнений (5)–(8) являются незамкнутыми и их точные решения возможны только для некоторых простых задач.

7. Выводы

Использованный метод преобразования системы уравнений движения в напряжениях позволил выделить два типа слагаемых, характерных для вязкого трения в ньютоновской жидкости при вихревом и линейном (поступательном) течении. Это позволило составить три системы уравнений для трех разновидностей процесса течения: течение при совместном влиянии трения в двух видах течения; только линейное течение с трением; только вихревое течение с трением.

Проведено сравнение частных случаев найденной общей системы уравнений с известным точным решением для ламинарного режима течения (формула Пуазейля).

Описан новый путь вывода дифференциального уравнения Эйлера, в котором осуществляется последовательное изменение условий и уравнений по схеме: вязкая жидкость → невязкая жидкость → идеальная жидкость (рис. 1).

Литература

1. Гольдштик, М. А. Вязкие течения с парадоксальными свойствами [Текст] / М. А. Гольдштик, В. Н. Штерн, Н. И. Яворский. – Новосибирск: Наука, 1989. – 336 с.
2. Бут, Д. А. Накопители энергии [Текст] / Д. А. Бут. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 400 с.
3. Mathieu,J. An Introduction to Turbulent Flow. [Text]/ J.MATHIEU.—Cambridge University Press, 2000. – 374 p.
4. Фрик, П.Г. Турбулентность: модели и подходы. [Текст]/ П.Г. Фрик. — Пермь, ПГТУ, 1998. – 108 с.
5. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа [Текст] / Л. Г. Лойцянский. — М.: Наука, 1978. – 756с.
6. Штеренлихт, Д. В. Гидравлика [Текст] / Д. В. Штеренлихт. — М.: Энергоатомиздат, 1991. – 351 с.
7. Гиргидов, А. Д. Механика жидкостей и газа (гидравлика). [Текст] / А. Д. Гиргидов. – СПб.: Федеральное агентство по образованию, 2007. – 544 с.
8. Кукуджанов, В. Н. Вычислительная механика сплошных сред. [Текст] / В. Н. Кукуджанов. – М.: Физматлит АНО , 2008. – 320 с.
9. Anderson, Jr. Computational Fluid Dynamics. The basics with applications [Text] / Jr. Anderson. – McGraw-Hill Science, 1995. – 574 p.
10. Genick, B.-M. Basic of Fluid Mechanics [Text] / B.-M. Genick. – Chicago: 2013. – 604 p.
11. Беляев, Н. М. Термодинамика [Текст] / Н. М. Беляев. – К.: Вища шк. 1987. – 344 с.
12. Munson, B. R. Fundamentals of fluid mechanics [Text] / B. R. Munson. – Wiley, 2009. – 730 p.