

МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ МАКСИМАЛЬНИХ ВИСОТ ЛОКАЛІЗОВАНИХ КРУГОВИХ ХВИЛЬ В МЕЖАХ НАБЛИЖЕННЯ МІЛКОЇ ВОДИ

А. Я. Бомба

Доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри
Кафедра прикладної математики
Рівненський державний гуманітарний університет
вул. С. Бандери, 12, м. Рівне, Україна, 33000
E-mail: abomba@ukr.net

Ю. В. Турбал

Кандидат фізико-математичних наук, доцент
професор кафедри*

E-mail: turbaly@gmail.com

М. Ю. Турбал *

E-mail: turbalmariana@gmail.com

О. В. Радовенюк

Аспірант*

E-mail: radovenjuk@rambler.ru

*Кафедра прикладної математики

Національний університет водного

господарства та природокористування

вул. Соборна, 11, м. Рівне, Україна, 33028

Розглянуто математичну модель процесу поширення локалізованих кругових хвиль типу цунамі в межах наближення мілкої води. Запропоновано підхід до аналітичного представлення розв'язків рівнянь типу мілкої води, що описують кругові відокремлені хвилі. На основі відповідних представлень розроблено метод оцінки профілю відокремленої хвилі, зокрема точки максимуму збудження

Ключові слова: хвиля, відокремлена хвиля, солітон, цунамі, профіль хвилі, рівняння мілкої води, рівняння Ляме, різницева схема, деформація, батиметрія

Рассмотрена математическая модель процесса распространения круговых волн типа цунами в рамках приближения мелкой воды. Предложен подход к нахождению аналитического представления решений уравнений типа мелкой воды, которые описывают круговые уединенные волны. На основании соответствующих представлений разработан метод оценки профиля уединенной волны, в частности, точки максимума возмущения

Ключевые слова: волна, уединенная волна, солітон, цунамі, профіль волни, уравнения мелкой воды, уравнения Ляме, разностная схема, деформация, батиметрия

1. Вступ

Останніми роками важливе значення має дослідження відокремлених хвиль типу цунамі. Явище цунамі [1] являє собою виникнення довгих хвиль в океанах та морях внаслідок підводних землетрусів, виверження вулканів, зсувів земних порід. Виходячи з загальновизнаних уявлень, результатом землетрусу є рух дна, що має вертикальну складову і викликає рух великих мас води.

Вивченню цунамі присвячено велику кількість публікацій, розглядалась низка моделей, серед яких, зокрема, так звана "поршнева модель". Однак, усі існуючі підходи зводяться до наблнжених чисельних розв'язків модельних систем диференціальних рівнянь. В даній роботі пропонується підхід, що ґрунтується на певних аналітичних представленнях розв'язків, який дозволить уникнути низки недоліків чисельного підходу та глибше вивчити природу та властивості цунамі.

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

В задачах чисельного моделювання цунамі у випадках, коли відомі параметри очага землетрусу та де-

тальна батиметрія дна океану, використовується підхід, який отримав назву «поршнева модель» [1]. В основі цього підходу лежить вирішення двох задач: вирахування характеру деформації дна під дією внутрішнього джерела дислокаційного типу та розрахунок коливань однорідної рідини, що не стискається, в межах наближення мілкої води. Перша задача ґрунтується на розв'язку рівнянь статичної теорії однорідного півпростору з внутрішнім джерелом дислокаційного типу і зводиться до розв'язку рівняння рівноваги (рівняння Ляме) [2, 3] для вектора зміщень частинки середовища відносно початкового ненапруженого стану. Рух хвиль як правило розглядається в межах класичних рівнянь мілкої води [4, 5] з врахуванням кривизни земної поверхні (рівняння гідродинаміки записуються на сфері).

При вивченні хвиль цунамі фундаментальне значення має задача визначення максимальних висот хвиль в конкретних населених пунктах, які можуть потрапити в зону цунамі. При цьому виникає низка фізичних та географічних параметрів, зокрема: форма початкового зміщення вільної поверхні, форми границь та споруд, батиметрія дна, коефіцієнт шерохватості донної поверхні. Для розрахунку хвиль цунамі, як правило, використовують різні модифікації

скінченно-різницевої схеми Мак-Кормака [6, 7]. Використання чисельних підходів призводить до низки проблем, пов'язаних з виникненням обчислювальних нестійкостей. Зауважимо, що для аналізу рівнянь типу мілкої води останніми роками застосовувались методи теорії груп [8–10]. Зокрема, за допомогою методів групового аналізу побудовано алгебру Лі у випадку відсутності повертання. На основі відповідної алгебри побудовані періодичні по часу точні розв'язки, які можна інтерпретувати як пульсації рідини під дією сили тяжіння чи Коріоліса. Однак на сьогодні відсутні аналітичні методи для знаходження розв'язків рівнянь мілкої води, які моделюють процеси поширення відокремлених хвиль.

В даній роботі стоїть завдання використати Т-представлення для опису профілю кругових локалізованих хвиль типу цунамі та дослідити на основі відповідних аналітичних представлень зміну точки максимуму збурення в часі.

3 Ціль та задачі дослідження

Проведені дослідження ставлять за мету знаходження аналітичних представлень розв'язків рівнянь мілкої води, що описують кругові локалізовані хвилі та на основі відповідних представлень побудувати метод оцінки максимальних значень профілю хвиль.

Для досягнення поставленої мети були поставлені наступні завдання:

- поширити ідею Т-представлень розв'язків диференціальних рівнянь в частинних похідних на рівняння мілкої води;
- знайти аналітичні представлення профілю кругових локалізованих хвиль, що описуються певними класами розв'язків рівнянь мілкої води;
- на основі відповідних представлень розробити метод оцінки точки максимуму профілю хвилі.

4. Аналітичні представлення розв'язків рівнянь мілкої води, що описують процеси поширення кругових локалізованих збурень

4.1. Базова модель та ідея Т-представлення розв'язку

У відповідності до “поршневої моделі” [1], будемо розглядати систему рівнянь мілкої води за умов відсутності в'язкості та компонент зовнішньої сили [4]:

Зовнішня сила у рівняннях мілкої води розглядається, як правило, у випадках, коли має місце повертання води. Тоді ця сила – це сила Коріоліса. Також можливі і інші інтерпретації, наприклад, для політропного газу розглядають гравітаційний потенціал. Тоді в правій частині системи рівнянь мілкої води з'являються відповідні похідні. В даному випадку вважаємо, що повертання води немає. Такий підхід виглядає логічним в рамках “поршневої” моделі виникнення цунамі. Відсутність в'язкості – це певне спрощення, яке можна використати для спрощення процедури розв'язку.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{hu_r}{r} + \frac{\partial(hu_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(hu_\phi)}{\partial \phi} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + g \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{u_\phi^2}{r} = -g \frac{\partial b}{\partial r}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_\phi}{\partial t} + \frac{u_r u_\phi}{r} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{g}{r} \frac{\partial h}{\partial \phi} = -\frac{1}{r} g \frac{\partial b}{\partial \phi}. \tag{3}$$

де u_r, u_ϕ – радіальна та азимутальна компоненти швидкості відповідно; h – збурення; $b(r, \phi)$ – поверхня дна.

Надалі будемо розглядати кругову хвилю, що поширюється на поверхні води від епіцентру землетрусу та частковий випадок, коли компоненти швидкості та профіль хвилі не залежатимуть від кута ϕ . Тоді з (1)–(3) отримуємо систему:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{hu}{r} + u \frac{\partial h}{\partial r} + h \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + g_0 \frac{\partial h}{\partial r} = -g_0 \frac{\partial b}{\partial r}. \tag{5}$$

Форму профілю визначатимемо співвідношенням:

$$h(r, t) = \gamma_h(t) \exp\left\{-\frac{g(r - \tilde{r}(t))}{\epsilon}\right\} + c_{gl}, \tag{6}$$

де ϵ – це константа, що визначає локалізацію збурення (її використовують для дослідження інфінітимальних характеристик), c_{gl} – константа, що визначає глибину води у незбуреному стані, $\gamma_h(t)$ – функція, що визначає амплітуду, $\tilde{r}(t)$ – координата максимуму збурення, $g(x)$ – функція, що визначає профіль хвилі.

У найпростішому випадку $g(x)$ – це невід'ємна диференційовна функція, що має мінімум в точці 0, $g(0) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$. Тоді (6) описуватиме додатне локалізоване збурення (кругову одиночну хвилю незмінно в часі профілю).

Зауважимо, що у вигляді (6) можна представити будь-яке додатне збурення, будь-яке від'ємне збурення типу антисолітона а також комбінацію типу “солітон-антисолітон”, яку називають ще бризером. Представлення типу (6) використовувалось у низці робіт для опису профілю локалізованих хвиль [3].

4.2. Загальний розв'язок системи рівнянь мілкої води, що має характер локалізованих хвиль

Підставляючи представлення (6) в систему (4)–(5) отримуємо співвідношення:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\gamma_h'(t)}{\gamma_h(t)} \frac{h - c_{gl}}{h} - \tilde{r}'(t) \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\epsilon} \frac{h - c_{gl}}{h} + u \left(\frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\epsilon} \frac{h - c_{gl}}{h} - \frac{1}{r} \right), \tag{7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g_0 \frac{g'(r - \tilde{r}(t))}{\epsilon} (h - c_{gl}) - u \frac{\partial u}{\partial r} - g_0 \frac{\partial b}{\partial r}. \tag{8}$$

Рівняння (7) є лінійним і може бути проінтегровано. Його загальний розв'язок записується у вигляді:

$$u(r, t) = \frac{1}{rh} (C(t) - (\gamma'(t)r + \tilde{r}'(t)\gamma(t))) \int e^{\frac{g(r - \tilde{r}(t))}{\epsilon}} dr + \gamma'(t) \iint e^{\frac{g(r - \tilde{r}(t))}{\epsilon}} dr dr + \tilde{r}'(t) \gamma(t) e^{\frac{g(r - vt)}{\epsilon}}. \tag{9}$$

Нехай

$$\iint e^{\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} dr dr = \psi(r-\tilde{r}(t)), \int e^{\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}} dr = \psi'(r-\tilde{r}(t)).$$

Підставляючи останні співвідношення у рівняння (8), отримуємо:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{rh} (C'(t) - (\gamma''(t)r + \tilde{r}''(t)\gamma(t) + 2\tilde{r}'(t)\gamma'(t))\psi'(r-\tilde{r}(t)) + \\ & + 2\gamma'(t)\tilde{r}'(t)r(h-c_{gl})/\gamma(t) + \tilde{r}'^2(t)(h-c_{gl}) + \gamma''(t)\psi(r-\tilde{r}(t)) + \\ & + \tilde{r}''(t)r(h-c_{gl}) + \tilde{r}'^2(t)r \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} (h-c_{gl})) - (C(t) - (\gamma'(t)r + \\ & + \tilde{r}'(t)\gamma(t))\psi'(r-\tilde{r}(t)) + \gamma'(t)\psi(r-\tilde{r}(t)) + \tilde{r}'(t)r(h-c_{gl})) (\gamma'(t)/\gamma(t) + \\ & + \tilde{r}'(t) \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}) \frac{(h-c_{gl})}{rh^2} = g_0 \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} (h-c_{gl}) + \frac{1}{rh} (C(t) - (\gamma_h'(t)r + \\ & + \tilde{r}'(t)\gamma(t))\psi'(r-\tilde{r}(t)) + \gamma_h'(t)\psi(r-\tilde{r}(t)) + \tilde{r}'(t)r\gamma(t)e^{\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}}) \frac{\gamma_h'(t)}{\gamma_h(t)} \frac{h-c_{gl}}{h} + \\ & + \frac{1}{rh} (C(t) - (\gamma_h'(t)r + \tilde{r}'(t)\gamma(t))\psi'(r-\tilde{r}(t)) + \gamma_h'(t)\psi(r-\tilde{r}(t)) + \\ & + \tilde{r}'(t)r\gamma(t)e^{\frac{g(r-vt)}{\varepsilon}}) \tilde{r}'(t) \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} \frac{h-c_{gl}}{h} - \frac{1}{r^2 h^2} (C(t) - \\ & - \tilde{r}'(t)\gamma(t)\psi'(r-\tilde{r}(t)) + \gamma_h'(t)\psi(r-\tilde{r}(t)) - \gamma_h'(t)r\psi'(r-\tilde{r}(t)) + \\ & + \tilde{r}'(t)r\gamma(t)e^{\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}}) \frac{g'(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon} \frac{h-c_{gl}}{h} + \frac{1}{r^3 h^2} (C(t) - \tilde{r}'(t)\gamma(t)\psi'(r-\tilde{r}(t)) + \\ & + \gamma_h'(t)\psi(r-\tilde{r}(t)) - \gamma_h'(t)r\psi'(r-\tilde{r}(t)) + \tilde{r}'(t)r\gamma(t)e^{\frac{g(r-\tilde{r}(t))}{\varepsilon}}) \frac{\partial b}{\partial r}. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким чином, отримали загальне рівняння, яке дозволить аналізувати поверхню дна та профіль хвилі. Зауважимо, що рівняння (10) може не мати розв'язків у випадку заданої поверхні дна b для довільних значень r, t . Остання обставина говорить про те, що профіль хвилі в часі змінюватиметься.

5. Метод оцінки максимуму висоти відокремленої хвилі

Розглянемо підхід, який дозволяє проаналізувати максимум висоти відокремленої хвилі. Нехай маємо початкову умову: $h(r, t_0) = \gamma_h(t_0) \exp\{-\frac{g(r-\tilde{r}(t_0))}{\varepsilon}\} + c_{gl}$, $g'(0) = 0, g(0) = 0$. Рівняння (10) при $r = \tilde{r}(t)$ матиме вигляд:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tilde{r}(t)h} (C'(t) - (\gamma''(t)\tilde{r}(t) + \tilde{r}''(t)\gamma(t) + 2\tilde{r}'(t)\gamma'(t))\psi'(0) + 2\gamma'(t)\tilde{r}'(t)\tilde{r}(t)(h-c_{gl})/\gamma(t) + \tilde{r}'^2(t)(h-c_{gl}) + \gamma''(t)\psi(0) + \\ & + \tilde{r}''(t)\tilde{r}(t)(h-c_{gl}) + \tilde{r}'^2(t)\tilde{r}(t) \frac{g'(0)}{\varepsilon} (h-c_{gl})) - (C(t) - (\gamma'(t)\tilde{r}(t) + \tilde{r}'(t)\gamma(t))\psi'(0) + \gamma'(t)\psi(0) + \tilde{r}'(t)\tilde{r}(t)(h-c_{gl})) \times \\ & \times (\gamma'(t)/\gamma(t) + \tilde{r}'(t) \frac{g'(0)}{\varepsilon}) \frac{(h-c_{gl})}{\tilde{r}(t)h^2} = g_0 \frac{g'(0)}{\varepsilon} (h-c_{gl}) + \frac{1}{rh} (C(t) - (\gamma'(t)\tilde{r}(t) + \tilde{r}'(t)\gamma(t))\psi'(0) + \gamma'(t)\psi(0) + \\ & + \tilde{r}'(t)\tilde{r}(t)\gamma(t)e^{\frac{g(0)}{\varepsilon}}) \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} \frac{h-c_{gl}}{h} + \frac{1}{\tilde{r}(t)h} (C(t) - (\gamma'(t)\tilde{r}(t) + \tilde{r}'(t)\gamma(t))\psi'(0) + \gamma'(t)\psi(0) + \\ & + \tilde{r}'(t)\tilde{r}(t)\gamma(t)e^{\frac{g(0)}{\varepsilon}}) \tilde{r}'(t) \frac{g'(0)}{\varepsilon} \frac{h-c_{gl}}{h} - \frac{1}{\tilde{r}(t)^2 h^2} (C(t) - (\gamma'(t)\tilde{r}(t) + \tilde{r}'(t)\gamma(t))\psi'(0) + \gamma'(t)\psi(0) + \\ & + \tilde{r}'(t)\tilde{r}(t)\gamma(t)e^{\frac{g(0)}{\varepsilon}}) \frac{g'(0)}{\varepsilon} \frac{h-c_{gl}}{h} + \frac{1}{\tilde{r}(t)^3 h^3} (C(t) - (\gamma'(t)\tilde{r}(t) + \tilde{r}'(t)\gamma(t))\psi'(0) + \gamma'(t)\psi(0) + \tilde{r}'(t)\tilde{r}(t)\gamma(t)e^{\frac{g(0)}{\varepsilon}}) \frac{\partial b}{\partial r}. \end{aligned} \quad (11)$$

Будемо вибирати функцію $C(t)$ так, щоб функція швидкості була рівна 0. Тоді матимемо співвідношення:

$$C(t) - (\gamma'(t)\tilde{r}(t) + \tilde{r}'(t)\gamma(t))\psi'(0) + \gamma'(t)\psi(0) + \tilde{r}'(t)\tilde{r}(t)\gamma(t)e^{\frac{g(0)}{\varepsilon}} = 0. \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & C'(t) - (\gamma''(t)\tilde{r}(t) + 2\gamma'(t)\tilde{r}'(t) + \\ & + \tilde{r}''(t)\gamma(t))\psi'(0) + \gamma''(t)\psi(0) + \\ & + \tilde{r}''(t)\tilde{r}(t)\gamma(t)e^{\frac{g(0)}{\varepsilon}} + \\ & + \tilde{r}'^2(t)\gamma(t)e^{\frac{g(0)}{\varepsilon}} + \\ & + \tilde{r}'(t)\tilde{r}(t)\gamma'(t)e^{\frac{g(0)}{\varepsilon}} = 0. \end{aligned}$$

Рівняння (11) при цьому запишеться у вигляді:

$$\gamma'(t) = -g_0 \frac{\partial b(vt)}{\partial r} (\gamma(t) + c_{gl}) / v.$$

Таким чином, отримали рівняння, що описує точку максимуму збурення в часі при довільній поверхні дна, яка симетрична відносно деякого центра. Використовуючи співвідношення (11), легко дослідити амплітуду локалізованої хвилі для різних випадків поверхні дна. Нехай, наприклад, функція дна описується співвідношенням: $b(r) = \sin^2(r) / 5, c_{gl} = 10, v = 5$. Тоді за умов (12) запишемо рівняння (11) та отримуємо його розв'язок при відповідній початковій умові. Амплітудну функцію хвилі та поверхню дна та зображено на рис. 1, а, б.

Поверхня дна, взагалі кажучи, може бути довільною, в тому числі і задаватись співвідношенням, яке розглянуте вище. Саме такий вибір був зумовлений тим, що корисним було дослідити, як змінюватиметься амплітуда локалізованої хвилі при проходженні через "впадини".

При зміні початкових умов виникатимуть різні хвилі. По-перше, можуть виникати хвилі гармонічного типу, може мати місце швидке затухання хвилі, розщеплення хвилі та виникнення цугу хвиль тощо. Тут нас цікавить хвиля, що не змінює чи слабо змінює свою амплітуду. Для її виникнення потрібні початкові умови спеціального типу. Однак запропонована тут методика дозволяє відслідковувати зміну в часі довільного початкового збурення.

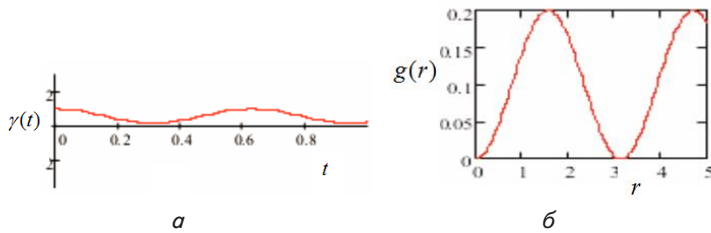


Рис. 1. Залежність локалізованої хвилі від форми дна:
а – амплітуда хвилі; б – поверхня дна

Отже, застосовуючи описаний вище підхід, можемо аналізувати поведінку локалізованої кругової поперечної хвилі в залежності від форми дна, причому на форму дна немає ніяких обмежень, окрім незалежності від кута ϕ . Бачимо, що в останньому прикладі має місце ефект зростання амплітуди при зростанні глибини і навпаки, при спаданні глибини амплітуда даної хвилі також спадає.

6. Обговорення методу дослідження профілю кругової відокремленої хвилі

Зауважимо, що локалізація максимуму функції $g(\cdot)$ в точці 0 взагалі кажучи, не гарантує, що пройшовши певну трансформацію, хвиля не матиме максимуму в іншій точці. Для повного опису профілю хвилі в роботі [1] було запропоновано розглядати криві при $r = \tilde{r}(t) + \alpha$ та змінювати параметр α з певним кроком (параметр α задається в деяких контрольних точках). При цьому при кожному значенні параметра α розв'язується відповідна задача Коші для знаходження амплітудної функції.

Підхід, який пропонується, продемонстровано для випадку відсутності азимутальних збурень. Врахуван-

ня залежності швидкостей та поверхні дна від кута ϕ дещо ускладнить відповідні викладки, однак не змінить їх суть.

В силу спеціально підібраних умов (зокрема, (12)) розглядається випадок саме поперечної хвилі, коли точки поверхні води коливаються лише вертикально. Очевидно, змінюючи умови для функції швидкості, отримуватимемо інші співвідношення для амплітудної функції.

Таким чином, запропонований підхід можна використовувати для аналізу зміни в часі довільних початкових локалізованих збурень при відповідних початкових умовах. Його використання не обмежується рівняннями мілкої води. Однак для кожної конкретної моделі необхідно виводити співвідношення типу (11).

7. Висновки

Запропоновано аналітичний підхід до знаходження розв'язків рівнянь мілкої води, що описують процеси поширення кругових локалізованих хвиль. Відповідний підхід ґрунтується на використанні спеціальних Т-представлень хвильового профілю.

Застосування відповідних представлень дозволило отримати рівняння, що описують зміну амплітуди хвилі, зокрема, в точці її максимуму. Рівняння для амплітудної функції (11) легко може бути розв'язане для конкретних випадків поверхонь дна. Його розв'язок дозволяє досліджувати поведінку амплітуди локалізованої хвилі при її русі на ділянках складної конфігурації дна. На основі запропонованого підходу можна досліджувати зміни в часі довільного початкового збурення, фіксуючи окремі контрольні точки профілю хвилі.

Література

1. Аннин, Б. Д. Анизотропия упругих свойств материалов [Текст] / Б. Д. Аннин, Н. И. Остросаблин // Прикладная механика и техническая физика. – 2008. – Т. 49, № 6. – С. 131–151.
2. Смирнов, Ю. П. Характеристики текстуры, структуры, анизотропии пород по разрезу Кольской сверхглубокой скважины [Текст] / Ю. П. Смирнов, Ф. Ф. Горбацевич, А. Н. Никитин, В. А. Тюремнов // Вестник МГТУ. – 2007. – Т. 10, № 2. – С. 285–295.
3. Турбал, Ю. В. О необходимых и достаточных условиях существования решений уравнений движения для анизотропных упругих тел в виде уединенных волн типа δ -солитонов [Текст] / Ю. В. Турбал // Проблемы прикладной математики и математического моделирования. – 2012. – Вып. 2012. – С. 78–86.
4. Чесноков, А. А. Симметрии уравнений теории мелкой воды на вращающейся плоскости [Текст] / А. А. Чесноков // СибЖИМ. – 2008. – Т. 11, № 3. – С. 135–146.
5. Павленко, А. С. Симметрии и решения уравнений двумерных движений политропного газа [Текст] / А. С. Павленко // Сиб. электр. матем. изв. – 2005. – Т. 2. – С. 291–307.
6. Bila, N. Symmetry group analysis of the shallow water and semi-geostrophic equations [Text] / N. Bila, E. Mansfield, P. Clarkson // The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. – 2006. – Vol. 59, Issue 1. – P. 95–123. doi: 10.1093/qjmam/hbi033
7. Елизарова, Т. Г. Квазигазодинамический алгоритм решения уравнений мелкой воды в полярной системе координат [Текст] / Т. Г. Елизарова, М. А. Истомина // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. – 2014. – № 65. – 24 с.
8. Косых, В. С. Методика расчета максимальных волн цунами в защищаемых пунктах побережья Дальнего востока [Текст] / В. С. Косых, Л. Б. Чубаров, В. К. Гусьяков, Д. А. Камаев, В. М. Григорьева, С. А. Бейзель // Доклады Академии наук. – 2013. – № 40. – С. 115–134.
9. Mazova, R. K. Numerical model study of tsunamis generated by potential earthquake within the komandorsky seismic gap in the western Aleutian island arc [Text] / R. K. Mazova, V. V. Baranov, L. I. Lobkovsky, N. A. Baranova, K. A. Dozorova, O. N. Chaykina // Science of tsunamis hazards. – 2013. – Vol. 32, Issue 3. – P. 140.
10. Lobkovsky, L. I. Generation and propagation of catastrophic tsunamis in the okhotsk sea water area. Possible scenarios [Text] / L. I. Lobkovsky, R. K. Mazova, L. Yu. Kataeva, V. V. Baranov // Doklady Akademii Nauk. – 2006. – Vol. 410. – P. 528–531.
11. Lobkovsky, L. I. Numerical modeling and spectral analysis of tsunamis on November, 15, 2006 in Kurile-Kamchatka region [Text] / L. I. Lobkovsky, R. K. Mazova, V. A. Kisel'man, A. O. Morozova // Okeanologiya. – 2010. – Vol. 50, Issue 4. – P. 1–10.
12. Турбал, Ю. В. Математична модель сейсмічного процесу, що враховує повільні відокремлені хвилі деформації [Текст] / Ю. В. Турбал // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – 2013. – № 4 (81). – С. 88–93.