Тривимірні рівняння теорії пружності приведені до двовимірних шляхом розкладання шуканих функцій в ряди Фур'є за поліномами Лежандра відносно товщинної координати. Побудовано фундаментальне рішення отриманих рівнянь з використанням узагальненої теорії. Проведено чисельні дослідження, які демонструють закономірності поведінки компонент напружено-деформованого стану пластин в залежності від пружних констант ізотропного матеріалу

Ключові слова: уточнена теорія, ізотропні пластини, рівняння статики, силові дії, спеціальна G-функція

Трехмерные уравнения теории упругости приведены к двумерным путем разложения искомых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра относительно толщинной координаты. Построено фундаментальное решение полученных уравнений с использованием обобщенной теории. Проведены численные исследования, которые демонстрируют закономерности поведения компонент напряженно-деформированного состояния пластин в зависимости от упругих констант изотропного материала

Ключевые слова: уточненная теория, изотропные пластины, уравнения статики, силовые воздействия, специальная G-функция

УДК 539.3

DOI: 10.15587/1729-4061.2015.47232

ПОСТРОЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СТАТИКИ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН СРЕДНЕЙ ТОЛЩИНЫ

И. П. Боков
Аспирант*
E-mail: bokov.dev@gmail.com
Е. А. Стрельникова
Доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник**
E-mail: elena15@gmx.com
*Кафедра прикладной математики и математического моделирования***
Отдел прочности и оптимизации конструкций*
***Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАНУ
ул. Пожарского, 2/10, г. Харьков, Украина, 61046

1. Введение

В современной технике широко используются инженерные сооружения из тонкостенных конструктивных элементов, подверженных значительным силовым воздействиям. Дополнительные трудности при расчете тонкостенных элементов конструкций вносит сосредоточенный характер силовых воздействий.

В работе для сведения трехмерной задачи для изотропных пластин к двумерной используется метод разложения искомых функций в ряды по полиномам Лежандра от нормальной координаты. Этот подход позволяет учесть поперечные касательные и нормальные напряжения. На основе полученных с помощью этого подхода уравнений для изотропных пластин разработана методика расчета их напряженно-деформированного состояния (НДС) при действии сосредоточенных силовых воздействий.

2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

Разработке методов построения фундаментальных решений (решений, соответствующих сосредоточенным воздействиям) уравнений теории упругих тонких пластин и оболочек посвящено большое количество публикаций. Постановки задач, методы их решения и ряд конкретных результатов содержатся в монографиях и научных статьях С. А. Амбарцумяна [1], А. Л. Гольденвейзера [2], W. Flügge [3], S. Lukasiewicz [4], а также в ряде обзоров В. М. Даревского [5], Ю. П. Жигалко [6] и других.

Из анализа этих работ можно сделать вывод, что существует два подхода к построению фундаментальных решений уравнений тонких упругих пластин и оболочек.

Первый из них заключается в исследовании сингулярных решений однородных дифференциальных уравнений, соответствующих конкретному сосредоточенному воздействию.

Такой подход успешно применяли для сферической оболочки А. Л. Гольденвейзер [7], пологих сферических и цилиндрических оболочек И. Н. Векуа [8], E. Reissner [9], а затем для пологих оболочек двоякой кривизны – Н. А. Киль [10], R. Ganowicz [11], A. Jahanshahi [12].

Существенным недостатком такого подхода является то, что для определения сингулярного решения, соответствующего конкретному сосредоточенному воздействию, необходимо удовлетворить системе геометрических и статических условий в окрестности особой точки. Иногда, особенно для несферических оболочек, это приводит к ошибочным результатам или же к решениям, содержащим лишние регулярные решения.

Второй подход приводит к решению дифференциальных уравнений с правыми частями в виде дельта-функции Дирака. При этом применяются разнообразные методы построения фундаментальных решений. Наиболее типичные из них – методы интегральных преобразований Фурье – развиты в работах П. М. Величко, Ю. А. Шевлякова, В. К. Хижняка, В. П. Шевченко [13–15], S. Lukasiewicz [16], J. Sanders [17], J. Simmonds [18].

Все эти методы были разработаны для изучения характера особенностей компонент напряженно-деформированного состояния пластин и оболочек или исследования прочности пластин и оболочек при локальных нагрузках.

Из приведенного краткого обзора видно, что для разработки методов решения граничных задач теории пластин и оболочек наиболее приемлемым является метод двумерного интегрального преобразования Фурье. Теория применения преобразования Фурье для решения уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами изложена в работах В. С. Владимирова [19], Л. Шварца [20], Р. Эдвардса [21]. Этот метод позволяет свести систему разрешающих дифференциальных уравнений статики пологих пластин и оболочек к системе алгебраических уравнений. После этого обратное преобразование Фурье восстанавливает фундаментальное решение. Методика обращения фундаментального решения существенным образом зависит от вида рассматриваемой системы дифференциальных уравнений, поэтому в данной работе важное место отводится разработке методов обращения интегральных трансформант.

Таким образом, приведенные примеры иллюстрируют высокую эффективность методов фундаментальных решений для определения локального НДС тонких упругих пластин и оболочек с концентраторами напряжений.

Метод разложений по толщинной координате с использованием полиномов Лежандра предложен в 1955 г. И. Н. Векуа [22]. Здесь проекционным способом получены дифференциальные уравнения равновесия (движения) призматических оболочек переменной толщины относительно моментов компонент напряжений. На основе закона Гука для изотропного тела путем умножения соответствующих равенств на полиномы Лежандра и интегрирования по толщинной координате составлены соотношения, связывающие моменты компонент напряжений. Дана формулировка граничных и начальных условий. Предложенный в [22] метод распространяется затем на тонкие пологие оболочки переменной толщины [13]. Более подробно рассмотрены случаи нулевого (N=0) и первого (N=1) приближений. Изучены вопросы существования и единственности решений граничных задач. Для первого приближения изложен способ построения общих решений уравнений равновесия пластин, цилиндрической и сферической оболочек [23].

Несколько позже (в 1959 г.) П. Чикала опубликована работа [24], в которой метод разложения компонент напряжений и перемещений в ряды по полиномам Лежандра используется для составления уравнений равновесия оболочек вращения. При этом система дифференциальных уравнений, связывающая коэффициенты разложений компонент напряжений, получена из вариационного принципа возможных перемещений. Вторая группа уравнений, устанавливающая связь между коэффициентами разложений компонент напряжений и деформаций, выведена при помощи интегрирования по толщине соотношений закона Гука.

Для построения уравнений равновесия изотропных пластин В. В. Понятовским [25] используется метод (предложенный ранее Е. Рейсснером для случая линейного распределения напряжений по толщине пластины), согласно которому тангенциальные компоненты напряжений представляются в виде рядов по полиномам Лежандра от толщинной координаты, а поперечные компоненты напряжений определяются из уравнений равновесия путем интегрирования их по нормальной координате с учетом граничных условий на лицевых плоскостях. После этого используется вариационный принцип Кастильяно. Из вариационного уравнения следуют уравнения совместимости и соответствующие граничные условия. Предложенный в [25] метод применяется для вывода уравнений равновесия анизотропных [26] и трансверсально-изотропных [27] пластин. Здесь же указывается способ интегрирования полученных уравнений.

Классическая теория Кирхгофа-Лява удовлетворительно описывает НДС сравнительно тонких изотропных пластин, но не учитывает явления, обусловленные сдвигами и обжатием. С другой стороны, решение задач теории упругости в трехмерной постановке приводит к значительным математическим трудностям. Поэтому вопрос построения уточненных теорий тесно связан с проблемой приведения трехмерных задач к двумерным.

Таким образом, исследование на базе уточненных теорий НДС изотропных пластин при действии сосредоточенных силовых воздействий является актуальным научно-технической задачей.

3. Цель и задачи исследования

Целью данного исследования является развитие уточненной теории пластин, использующей метод И. Н. Векуа разложения неизвестных функций по полиномам Лежандра от поперечной координаты, применительно к задачам определения НДС изотропных пластин при действии сосредоточенных силовых воздействий.

Достижение поставленной цели предусматривает:

– приведение трехмерных уравнений теории упругости к двумерным путем разложения искомых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра относительно толщинной координаты;

– построение фундаментальных решений полученных уравнений;

– исследование влияния упругих параметров на НДС пластины.

В работе использован метод аппроксимации перемещений, напряжений и деформаций рядами Фурье по полиномам Лежандра от поперечной координаты для вывода двумерных уравнений теории упругости для изотропных пластин. Фундаментальное решение полученных уравнений найдено с помощью двумерного интегрального преобразования Фурье и методики обращения, построенной с помощью специальной G-функции.

4. Материалы и методы исследований влияния упругих параметров на компоненты НДС изотропной пластины

4. 1. Основные соотношения и математическая формулировка задачи

Рассматривается изотропная пластина толщины 2h в прямоугольной декартовой системе координат x, y, z.

Пусть на пластину действует сосредоточенная сила $\vec{F}$, приложенная в начале координат (особой точке).

Сосредоточенную силу можно представлять как некоторую абстракцию (конечную по величине силу), действующую на малый участок поверхности [28].

При решении задач о действии сосредоточенных сил искомое НДС считаем локальным, т. е. не распространяющимся до линии внешнего контура пластины. Поэтому пластину считаем бесконечной и предполагаем, что искомые компоненты НДС стремятся к нулю на бесконечности. Справедливость данного предположения проверяется после решения задачи.

Математическая формулировка задачи содержит полную систему уравнений теории упругости без учёта граничных условий на краях реальной пластины. Система уравнений равновесия изотропных пластин на базе теории С. П. Тимошенко, описывающая НДС при изгибе, состоит из [29]:

• геометрических соотношений

$$e_{x1}=h\frac{\partial\gamma_x}{\partial x},\ e_{xy1}=h\left(\frac{\partial\gamma_x}{\partial y}+\frac{\partial\gamma_y}{\partial x}\right),$$

$$e_{xz0}-\frac{e_{xz2}}{5}=\gamma_x+\frac{\partial w_0}{\partial x},\ (x\to y); \tag{1}$$

• соотношений закона Гука

$$M_x=D\left(e_{x1}+\nu e_{y1}\right),\ M_y=D\left(e_{y1}+\nu e_{x1}\right),$$

$$H=\frac{1-\nu}{2}De_{xy1},\ Q_x=\Lambda\left(e_{xz0}-\frac{e_{xz2}}{5}\right),\ (x\to y), \tag{2}$$

где $D=\frac{2h^2}{3}\frac{E}{1-\nu^2},\ \Lambda=\frac{5hG}{3}$;

• уравнений равновесия

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}-Q_x+m_x=0,\ \frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial x}-Q_y+m_y=0,$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+q_z=0. \tag{3}$$

Чтобы найти фундаментальное решение системы (1)–(3), компоненты вектора объёмной силы в формулах (3) следует взять в виде

$$m_x(x,y)=h^2m_x^*\delta(x,y),\ m_y(x,y)=h^2m_y^*\delta(x,y),$$

$$q_z(x,y)=h^2q_z^*\delta(x,y), \tag{4}$$

где $m_x^*,m_y^*,q_z^*=\mathrm{const}$, $\delta(x,y)$ – двумерная дельта-функция Дирака [19].

4. 2. Изложение метода исследования

Подставив геометрические соотношения (1) в соотношения упругости (2) и перейдя в безразмерную систему координат $x_1=x/h$, $x_2=y/h$, $x_3=z/h$, получим:

$$M_1=D_0\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_1}+\nu\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_2}\right),\ M_2=D_0\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_2}+\nu\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_1}\right),$$

$$H=\frac{1-\nu}{2}D_0\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_1}\right),\ Q_1=\Lambda_0\left(\gamma_1+\frac{\partial w_0}{\partial x_1}\right),$$

$$Q_2=\Lambda_0\left(\gamma_2+\frac{\partial w_0}{\partial x_2}\right),$$

где $D_0=\frac{D}{Eh^2}=\frac{2}{3}\frac{1}{1-\nu^2},\ \Lambda_0=\frac{5G}{3E}.$ (5)

Безразмерные изгибающие и крутящий моменты определены в отношении к величине Eh^2, а перерезывающие силы – в отношении к величине Eh.

Переходя к безразмерным координатам, получим

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1}+\frac{\partial H}{\partial x_2}-Q_1+m_1=0,\ \frac{\partial M_2}{\partial x_2}+\frac{\partial H}{\partial x_1}-Q_2+m_2=0,$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1}+\frac{\partial Q_2}{\partial x_2}+q_3=0, \tag{6}$$

где $m_1=m_1^*\delta(x_1,x_2)$, $m_2=m_2^*\delta(x_1,x_2)$, $q_3=q_3^*\delta(x_1,x_2)$.

Решив указанную систему, получаем трансформанты обобщенных перемещений:

$$\tilde\gamma_1=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{m_1^*}{D_0}\frac{\xi_1^2}{p^4}+3(1+\nu)m_1^*\frac{\xi_2^2}{p^2(p^2+2{,}5)}+\right.$$

$$\left.+\frac{q_3^*}{D_0}\frac{i\xi_1}{p^4}+\frac{m_2^*}{D_0}\frac{\xi_1\xi_2}{p^4}-3(1+\nu)m_2^*\frac{\xi_1\xi_2}{p^2(p^2+2{,}5)}\right],$$

$$\tilde\gamma_2=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{m_2^*}{D_0}\frac{\xi_2^2}{p^4}+3(1+\nu)m_2^*\frac{\xi_1^2}{p^2(p^2+2{,}5)}+\frac{q_3^*}{D_0}\frac{i\xi_2}{p^4}+\right.$$

$$\left.+\frac{m_1^*}{D_0}\frac{\xi_1\xi_2}{p^4}-3(1+\nu)m_1^*\frac{\xi_1\xi_2}{p^2(p^2+2{,}5)}\right],$$

$$\tilde w_0=\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{m_1^*}{D_0}\frac{i\xi_1}{p^4}-\frac{m_2^*}{D_0}\frac{i\xi_2}{p^4}+\frac{q_3^*}{D_0}\frac{1}{p^4}+\frac{q_3^*}{\Lambda_0}\frac{1}{p^2}\right], \tag{7}$$

где $p^2=\xi_1^2+\xi_2^2$; (ξ_1,ξ_2) – координаты точки в пространстве трансформант.

Применим преобразование Фурье к уравнениям закона Гука (5):

$$\tilde M_1=-D_0\left(i\xi_1\tilde\gamma_1+\nu i\xi_2\tilde\gamma_2\right),\ \ \tilde M_2=-D_0\left(i\xi_2\tilde\gamma_2+\nu i\xi_1\tilde\gamma_1\right),$$

$$\tilde H=\frac{1-\nu}{2}D_0\left(i\xi_2\tilde\gamma_1+i\xi_1\tilde\gamma_2\right),\ \ \tilde Q_2=\Lambda_0\left(\tilde\gamma_2-i\xi_2\tilde w_0\right). \tag{8}$$

Подставим ранее полученные трансформанты обобщенных перемещений (7) в трансформанты изгибающих моментов, крутящего момента и перерезывающих сил (8):

$$\tilde M_1=-\frac{1}{2\pi}\left[m_1^*\frac{\xi_1^3}{p^4}+2m_1^*\frac{i\xi_1\xi_2^2}{p^2(p^2+2{,}5)}-q_3^*\frac{\xi_1^2}{p^4}+m_2^*\frac{i\xi_1^2\xi_2}{p^4}-\right.$$

$$\left.-2m_2^*\frac{i\xi_1^2\xi_2}{p^2(p^2+2{,}5)}+m_2^*\nu\frac{\xi_2^3}{p^4}-q_3^*\nu\frac{\xi_2^2}{p^4}+m_1^*\nu\frac{i\xi_1\xi_2^2}{p^4}\right],$$

$$\tilde M_2=-\frac{1}{2\pi}\left[m_2^*\frac{\xi_2^3}{p^4}+2m_2^*\frac{i\xi_1^2\xi_2}{p^2(p^2+2{,}5)}-q_3^*\frac{\xi_2^2}{p^4}+m_1^*\frac{i\xi_1\xi_2^2}{p^4}-\right.$$

$$\left.-2m_1^*\frac{i\xi_1\xi_2^2}{p^2(p^2+2{,}5)}+m_1^*\nu\frac{\xi_1^3}{p^4}-q_3^*\nu\frac{\xi_1^2}{p^4}+m_2^*\nu\frac{i\xi_1^2\xi_2}{p^4}\right],$$

$$\tilde H=-\frac{1}{2\pi}\left[(1-\nu)m_1^*\frac{i\xi_1^2\xi_2}{p^4}+m_1^*\frac{i\xi_2^3}{p^2(p^2+2{,}5)}-\right.$$

$$-(1-\nu)q_3^*\frac{\xi_1\xi_2}{p^4}+(1-\nu)m_2^*\frac{i\xi_1\xi_2^2}{p^4}-$$

$$\left.-m_2^*\frac{i\xi_1\xi_2^2}{p^2(p^2+2{,}5)}+m_2^*\frac{i\xi_1^3}{p^2(p^2+2{,}5)}-m_1^*\frac{i\xi_1^2\xi_2}{p^2(p^2+2{,}5)}\right],$$

$$\tilde Q_1=\frac{2{,}5}{2\pi}\left[m_1^*\frac{\xi_2^2}{p^2(p^2+2{,}5)}-m_2^*\frac{\xi_1\xi_2}{p^2(p^2+2{,}5)}\right]-\frac{q_3^*}{2\pi}\frac{i\xi_1}{p^2},$$

$$\tilde{Q}_2=\frac{2,5}{2\pi}\left[m_2^*\frac{\xi_1^2}{p^2(p^2+2,5)}-m_1^*\frac{\xi_1\xi_2}{p^2(p^2+2,5)}\right]-\frac{q_3^*}{2\pi}\frac{i\xi_2}{p^2}. \quad (9)$$

Обозначим

$$\tilde{\Phi}_1(\xi_1,\xi_2)=\frac{i\xi_1^3}{p^4},\quad \tilde{\Phi}_2(\xi_1,\xi_2)=\frac{i\xi_1^2\xi_2}{p^4},$$

$$\tilde{\Phi}_3(\xi_1,\xi_2)=\frac{i\xi_1^2\xi_2}{p^2(p^2+2,5)},$$

$$\tilde{\Phi}_4(\xi_1,\xi_2)=\frac{i\xi_1^3}{p^2(p^2+2,5)},\quad \tilde{\Phi}_5(\xi_1,\xi_2)=\frac{i\xi_1}{p^2},$$

$$\tilde{\Phi}_6(\xi_1,\xi_2)=\frac{\xi_1^2}{p^4},$$

$$\tilde{\Phi}_7(\xi_1,\xi_2)=\frac{\xi_1\xi_2}{p^4},\quad \tilde{\Phi}_8(\xi_1,\xi_2)=\frac{\xi_1^2}{p^2(p^2+2,5)},$$

$$\tilde{\Phi}_9(\xi_1,\xi_2)=\frac{\xi_1\xi_2}{p^2(p^2+2,5)}. \quad (10)$$

Тогда изгибающие моменты, крутящий момент и перерезывающие силы в пространстве трансформант запишутся так

$$\tilde{M}_1=-\frac{1}{2\pi}\Big[m_1^*\tilde{\Phi}_1(\xi_1,\xi_2)+2m_1^*\tilde{\Phi}_3(\xi_2,\xi_1)-q_3^*\tilde{\Phi}_6(\xi_1,\xi_2)+$$
$$+m_2^*\tilde{\Phi}_2(\xi_1,\xi_2)-2m_2^*\tilde{\Phi}_3(\xi_1,\xi_2)+m_2^*\nu\tilde{\Phi}_1(\xi_2,\xi_1)-$$
$$-q_3^*\nu\tilde{\Phi}_6(\xi_2,\xi_1)+m_1^*\nu\tilde{\Phi}_2(\xi_2,\xi_1)\Big],$$

$$\tilde{M}_2=-\frac{1}{2\pi}\Big[m_2^*\tilde{\Phi}_1(\xi_2,\xi_1)+2m_2^*\tilde{\Phi}_3(\xi_1,\xi_2)-$$
$$-q_3^*\tilde{\Phi}_6(\xi_2,\xi_1)+m_1^*\tilde{\Phi}_2(\xi_2,\xi_1)-2m_1^*\tilde{\Phi}_3(\xi_2,\xi_1)+$$
$$+m_1^*\nu\tilde{\Phi}_1(\xi_1,\xi_2)-q_3^*\nu\tilde{\Phi}_6(\xi_1,\xi_2)+m_2^*\nu\tilde{\Phi}_2(\xi_1,\xi_2)\Big],$$

$$\tilde{H}=-\frac{1}{2\pi}\Big[(1-\nu)m_1^*\tilde{\Phi}_2(\xi_1,\xi_2)+m_1^*\tilde{\Phi}_4(\xi_2,\xi_1)-$$
$$-(1-\nu)q_3^*\tilde{\Phi}_7(\xi_1,\xi_2)+(1-\nu)m_2^*\tilde{\Phi}_2(\xi_2,\xi_1)-$$
$$-m_2^*\tilde{\Phi}_3(\xi_2,\xi_1)+m_2^*\tilde{\Phi}_4(\xi_1,\xi_2)-m_1^*\tilde{\Phi}_3(\xi_1,\xi_2)\Big],$$

$$\tilde{Q}_1=\frac{2,5}{2\pi}\Big[m_1^*\tilde{\Phi}_8(\xi_2,\xi_1)-m_2^*\tilde{\Phi}_9(\xi_1,\xi_2)\Big]-\frac{q_3^*}{2\pi}\tilde{\Phi}_5(\xi_1,\xi_2),$$

$$\tilde{Q}_2=\frac{2,5}{2\pi}\Big[m_2^*\tilde{\Phi}_8(\xi_1,\xi_2)-m_1^*\tilde{\Phi}_9(\xi_1,\xi_2)\Big]-\frac{q_3^*}{2\pi}\tilde{\Phi}_5(\xi_2,\xi_1). \quad (11)$$

Необходимо теперь обратить соотношения (11). Сначала найдём оригиналы функций (10) с использованием интегрального преобразования Фурье [30]

$$F^{-1}\Big[\tilde{f}(\xi_1,\xi_2)\Big]=f(x_1,x_2)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(\xi_1,\xi_2)e^{-i(\xi_1x_1+\xi_2x_2)}d\xi_1d\xi_2. \quad (12)$$

Получим

$$\Phi_1(x_2,x_1)=\frac{x_2(3x_1^2+x_2^2)}{2(x_1^2+x_2^2)^2},$$

$$\Phi_2(x_2,x_1)=-\frac{x_1(3x_1^2+x_2^2)}{2(x_1^2+x_2^2)^2},$$

$$\Phi_3(x_2,x_1)=\frac{x_1}{2(x_1^2+x_2^2)}G_{0,1}(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2+x_2^2})-$$
$$-\frac{x_1(x_1^2-3x_2^2)}{2(x_1^2+x_2^2)^2}G_{1,2}(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2+x_2^2}),$$

$$\Phi_4(x_2,x_1)=\frac{3x_2}{2(x_1^2+x_2^2)}G_{0,1}(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2+x_2^2})-$$
$$-\frac{x_2(3x_1^2-x_2^2)}{2(x_1^2+x_2^2)^2}G_{1,2}(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2+x_2^2}),$$

$$\Phi_5(x_2,x_1)=\frac{x_2(x_1^2-x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2},$$

$$\Phi_7(x_2,x_1)=-\frac{1}{2}\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2},$$

$$\Phi_6(x_2,x_1)=-\frac{1}{2}\ln\frac{\gamma\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{2}-\frac{1}{4}\frac{x_2^2-x_1^2}{x_1^2+x_2^2},$$

$$\Phi_8(x_2,x_1)=$$
$$=\frac{1}{2}\left[G_{0,0}(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2+x_2^2})+\frac{x_2^2-x_1^2}{x_1^2+x_2^2}G_{1,1}(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2+x_2^2})\right],$$

$$\Phi_9(x_2,x_1)=\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}G_{1,1}(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2+x_2^2}), \quad (13)$$

где $G_{n,v}(rz)$ – специальная G-функция [31].

Применяя формулу обращения для двумерного интегрального преобразования Фурье (12) к трансформантам внутренних силовых факторов (11) и учитывая выражения (13), запишем выражения для M_1, M_2, H, Q_1, Q_2 в пространстве оригиналов

$$M_1=-\frac{1}{2\pi}\left[m_1^*\frac{x_1(x_1^2+3x_2^2)}{2(x_1^2+x_2^2)^2}+2m_1^*\left\{\frac{x_1}{2(x_1^2+x_2^2)}G_{0,1}\times\right.\right.$$
$$\left.\times(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2+x_2^2})-\frac{x_1(x_1^2-3x_2^2)}{2(x_1^2+x_2^2)^2}G_{1,2}(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2+x_2^2})\right\}+$$
$$+q_3^*\left\{\frac{1}{2}\ln\frac{\gamma\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{2}+\frac{1}{4}\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1^2+x_2^2}\right\}-m_2^*\frac{x_2(x_1^2+3x_2^2)}{2(x_1^2+x_2^2)^2}-$$
$$-2m_2^*\left\{\frac{x_2}{2(x_1^2+x_2^2)}G_{0,1}(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2+x_2^2})+\right.$$
$$\left.+\frac{x_2(3x_1^2-x_2^2)}{2(x_1^2+x_2^2)^2}G_{1,2}(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2+x_2^2})\right\}+m_2^*\nu\frac{x_2(3x_1^2+x_2^2)}{2(x_1^2+x_2^2)^2}+$$
$$\left.+q_3^*\nu\left\{\frac{1}{2}\ln\frac{\gamma\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{2}+\frac{1}{4}\frac{x_2^2-x_1^2}{x_1^2+x_2^2}\right\}-m_1^*\nu\frac{x_1(3x_1^2+x_2^2)}{2(x_1^2+x_2^2)^2}\right],$$

$$M_2=-\frac{1}{2\pi}\left[m_2^*\frac{x_2(3x_1^2+x_2^2)}{2(x_1^2+x_2^2)^2}+2m_2^*\left\{\frac{x_2}{2(x_1^2+x_2^2)}G_{0,1}\times\right.\right.$$
$$\left.\times(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2+x_2^2})+\frac{x_2(3x_1^2-x_2^2)}{2(x_1^2+x_2^2)^2}G_{1,2}(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2+x_2^2})\right\}+$$
$$+q_3^*\left\{\frac{1}{2}\ln\frac{\gamma\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{2}+\frac{1}{4}\frac{x_2^2-x_1^2}{x_1^2+x_2^2}\right\}-m_1^*\frac{x_1(3x_1^2+x_2^2)}{2(x_1^2+x_2^2)^2}-$$
$$-2m_1^*\left\{\frac{x_1}{2(x_1^2+x_2^2)}G_{0,1}(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2+x_2^2})-\frac{x_1(x_1^2-3x_2^2)}{2(x_1^2+x_2^2)^2}G_{1,2}\times\right.$$
$$\left.\times(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2+x_2^2})\right\}+m_1^*\nu\frac{x_1(x_1^2+3x_2^2)}{2(x_1^2+x_2^2)^2}+q_3^*\nu\times$$
$$\left.\times\left\{\frac{1}{2}\ln\frac{\gamma\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{2}+\frac{1}{4}\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1^2+x_2^2}\right\}-m_2^*\nu\frac{x_2(x_1^2+3x_2^2)}{2(x_1^2+x_2^2)^2}\right],$$

$$\begin{aligned}
&H=-\frac{1}{2\pi\left(x_1^2+x_2^2\right)}\times\\
&\times\Bigg[-(1-\nu)m_1^*\frac{x_2\left(x_1^2+3x_2^2\right)}{2\left(x_1^2+x_2^2\right)}+m_1^*\Bigg\{x_2G_{0,1}\left(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)-\\
&-\frac{x_2\left(3x_1^2-x_2^2\right)}{\left(x_1^2+x_2^2\right)}G_{1,2}\left(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\Bigg\}+\\
&+(1-\nu)q_3^*\frac{x_1x_2}{2}-(1-\nu)m_2^*\frac{x_1\left(3x_1^2-x_2^2\right)}{2\left(x_1^2+x_2^2\right)}-\\
&+m_2^*\Bigg\{x_1G_{0,1}\left(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)+\\
&+\frac{x_1\left(x_1^2-3x_2^2\right)}{\left(x_1^2+x_2^2\right)}G_{1,2}\left(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\Bigg\}\Bigg],\\
&Q_1=\frac{2,5}{2\pi}\Bigg[\frac{m_1^*}{2}\Bigg\{G_{0,0}\left(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)+\\
&+\frac{x_2^2-x_1^2}{x_1^2+x_2^2}G_{1,1}\left(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\Bigg\}-m_2^*\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}\times\\
&\times G_{1,1}\left(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\Bigg]-\frac{q_3^*}{2\pi}\frac{x_1\left(x_2^2-x_1^2\right)}{\left(x_1^2+x_2^2\right)},\\
&Q_2=\frac{2,5}{2\pi}\Bigg[\frac{m_2^*}{2}\Bigg\{G_{0,0}\left(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)+\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1^2+x_2^2}\times\\
&\times G_{1,1}\left(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\Bigg\}-m_1^*\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2}G_{1,1}\left(\sqrt{2,5}\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)\Bigg]-\\
&-\frac{q_3^*}{2\pi}\frac{x_2\left(x_1^2-x_2^2\right)}{\left(x_1^2+x_2^2\right)}. \qquad (14)
\end{aligned}$$

Видим, что полученные выражения для моментов имеют сингулярности в виде логарифмической особенности. Выражения для перерезывающих сил имеют ту же особенность, что и G-функция. Полученные решения могут быть в дальнейшем использованы как ядра интегральных представлений в задачах о равновесии пластин, ослабленных дефектами типа трещин и тонких включений.

5. Результаты исследований влияния упругих параметров на НДС пластины с использованием разработанной методики

Для исследования особенностей НДС изотропных пластин при сосредоточенных силовых воздействиях положим: $m_1^*=m_2^*=q_3^*=1$.

Результаты расчетов представлены в безразмерной декартовой системе координат x_1, x_2.

Численные исследования были проведены для следующих материалов пластин: золото и железо. Коэффициенты Пуассона (ν) для данных материалов равны: 0,42 и 0,28 соответственно [32].

На рис. 1–3 представлены графики изменения обобщенных моментов M_1, M_2, H вдоль оси абсцисс (x_2=0). На данных графиках видно, что при уменьшении коэффициента Пуассона значения обобщенных моментов увеличиваются.

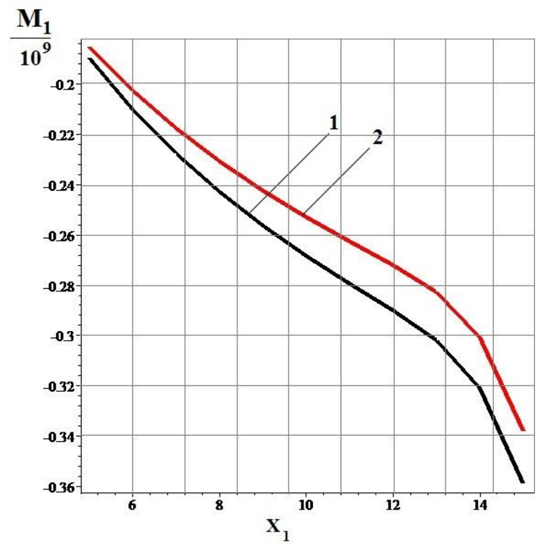

Рис. 1. Изгибающий момент M_1: 1 — материал золото; 2 — материал железо

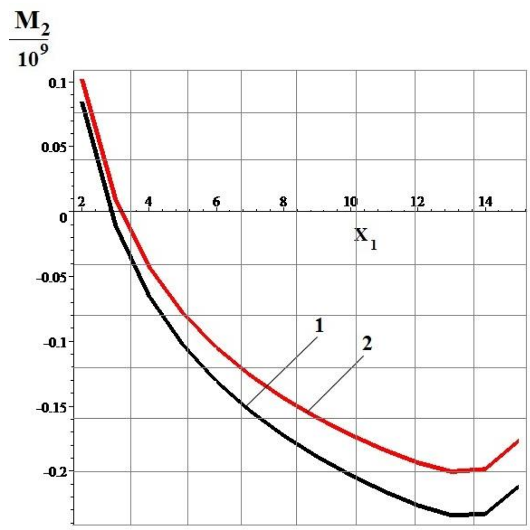

Рис. 2. Изгибающий момент M_2: 1 — материал золото; 2 — материал железо

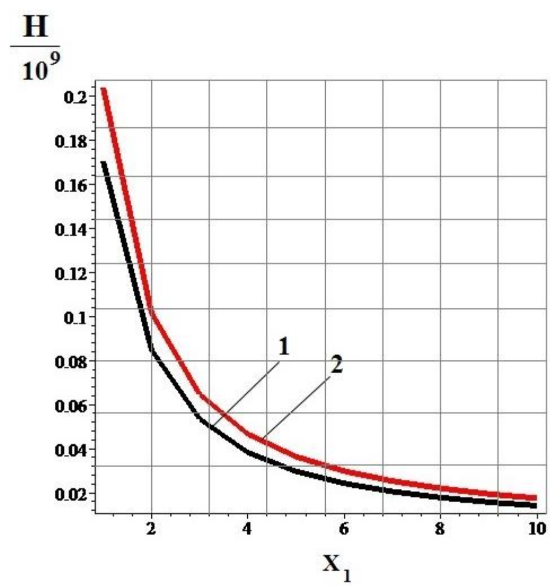

Рис. 3. Крутящий момент H: 1 — материал золото; 2 — материал железо

На рис. 4, 5 представлены графики обобщенных сил Q_1, Q_2 соответственно. Данные графики демонстрируют независимость обобщенных сил Q_1, Q_2 от упругих констант.

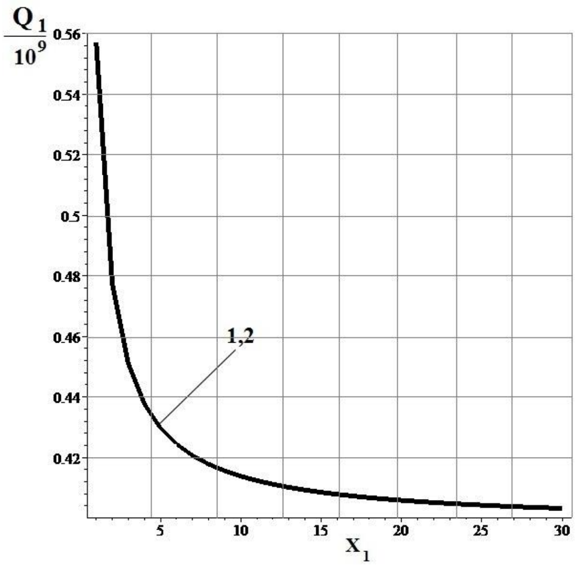

Рис. 4. Перерезывающая сила Q_1: 1 — материал золото; 2 — материал железо

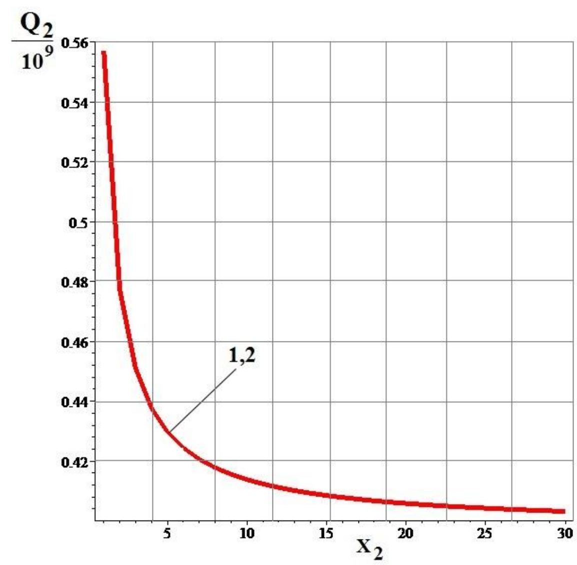

Рис. 5. Перерезывающая сила Q_2: 1 — материал золото; 2 — материал железо

Данные исследования позволили аналитически исследовать характер поведения внутренних силовых величин в зависимости от упругих постоянных различных материалов и исследовать характер особенностей моментов и перерезывающих сил при сосредоточенных воздействиях.

6. Обсуждение результатов, полученных с помощью данной методики

Как отмечалось выше, классическая теория Кирхгофа-Лява удовлетворительно описывает НДС сравнительно тонких изотропных пластин, но не учитывает явления, обусловленные сдвигами и обжатием.

Разработанный метод позволяет проводить расчет обобщенных перерезывающих сил и изгибающих моментов для пластин, подверженных действию сосредоточенной силы, приложенной в начале координат. В отличие от исследований, проведенных другими авторами, здесь использованы уравнения равновесия изотропных пластин на базе теории С. П. Тимошенко, описывающей НДС при изгибе. Это дает возможность рассматривать оболочки и пластины, которые имеют толщину порядка 1/5 по отношению к характерному размеру.

Поскольку в реальности усилия, действующие на конструктивные элементы, всегда являются распределенными (возможно, по очень малым, но конечным областям), результаты, полученные в данном исследовании, носят предварительный характер.

Полученное фундаментальное решение даст возможность решать ряд новых задач изгиба пластин средней толщины. При наличии сосредоточенных дислокаций фундаментальные решения, являющиеся функциями Грина, являются основой для построения потенциальных представлений в виде интегралов от скачков смещений, распределенных с неизвестной плотностью. Такие интегральные представления могут быть использованы при решении задач об изгибе пластин с различного рода дефектами, вырезами и надрезами. Вследствие большой изношенности энергетического, нефтеперерабатывающего и химического оборудования в Украине в настоящий момент особо актуальными вопросами являются проблемы продления ресурса работающего оборудования, даже при наличии в нем микродефектов. Расчет на прочность таких элементов при использовании теории оболочек и пластин средней толщины при наличии разного рода дефектов с учетом полученных в работе фундаментальных решений будет способствовать корректировке сроков межремонтных периодов, очередности замены изношенного оборудования.

Практическое значение полученных результатов заключается в возможности использования разработанных методов решения задач при расчетах, связанных с проектированием и определением рабочих параметров тонкостенных элементов конструкций из изотропных материалов при действии сосредоточенных силовых воздействий. Результаты работы могут быть использованы в научно-исследовательских институтах, проектных организациях и других исследовательских учреждениях, связанных с расчетами тонкостенных элементов конструкций.

Продолжением данного исследования является построение фундаментального решения трансверсально-изотропных пластин с использованием уточненных теорий.

7. Выводы

Построено фундаментальное решение уравнений статики изотропных пластин на базе обобщенной теории.

Достижение данной цели предусматривало сведение трехмерных уравнений теории упругости к двумерным путем разложения искомых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра относительно толщинной координаты. Данный подход позволил учесть поперечные касательные и нормальные напряжения. Так как классическая теория Кирхгофа-Лява не учитывает этих напряжений, то исследование на базе уточненных теорий НДС изотропных пластин при действии сосредоточенных силовых воздействий является актуальной научно-технической задачей. Фундаментальное решение полученных уравнений найдено с помощью двумерного интегрального преобразования Фурье и методики обращения, построенной с помощью специальной G-функции.

Проведены численные исследования НДС изотропных пластин. Эти исследования позволили выявить закономерности поведения компонент НДС в зависимости от упругих констант изотропного материала.

Полученное фундаментальное решение дает возможность решать ряд новых задач изгиба пластин средней толщины. При наличии сосредоточенных дислокаций фундаментальные решения, являющиеся функциями Грина, являются основой для построения потенциальных представлений в виде интегралов от скачков смещений, распределенных с неизвестной плотностью. Такие интегральные представления могут быть использованы при решении задач об изгибе пластин с различного рода дефектами, вырезами и надрезами.

Литература

1. Амбарцумян, С. А. Общая теория анизотропных оболочек [Текст] / С. А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
2. Гольденвейзер, А. Л. Исследование напряженного состояния сферической оболочки [Текст] / А. Л. Гольденвейзер // Прикладная математика и механика. – 1944. – Вып. 6. – С. 441–467.
3. Flügge, W. Concentrated forces on shells [Text] / W. Flügge // Proceedings of Xlth Internat. Congress of Applied Mechanics. – Munich: Springer Verlag, 1966. – P. 270–276. doi:10.1007/978-3-662-29364-5_34
4. Łukasiewicz, S. A. Introduction of concentrated loads in plates and shells [Text] / S. A. Łukasiewicz // Progress in Aerospace Sciences. – 1976. – Vol. 17. – P. 109–146. doi:10.1016/0376-0421(76)90006-3
5. Даревский, В. М. Контактные задачи теории оболочек (действие локальных нагрузок на оболочки) [Текст] / В. М. Даревский // Труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. – М.: Наука, 1966. – С. 927–933.
6. Жигалко, Ю. П. Расчет тонких упругих цилиндрических оболочек на локальные нагрузки (обзор литературы, метод и результате) [Текст] / Ю. П. Жигалко // Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань: Казан. ун-т, 1966. – Вып. 4. – С. 3–41.
7. Гольденвейзер, А. Л. К вопросу о расчете оболочек на сосредоточенные силы [Текст] / А. Л. Гольденвейзер // Прикладная математика и механика. – 1954. – Т. 8, № 2. – С. 181–186.
8. Векуа, И. Н. Вариационные принципы построения теории оболочек [Текст] / И. Н. Векуа. – Тбилиси: Тбилис. ун-т, 1970. – 300 с.
9. Reissner, E. Reflections on the theory of elastic plates [Text] / E. Reissner // Applied Mechanics Reviews. – 1985. – Vol. 38, № 11. – P. 1453–1464. doi:10.1115/1.3143699
10. Киль, Н. А. О действии местных нагрузок на оболочки [Текст] / Н. А. Киль // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1973. – № 3. – С. 43–46.
11. Ganowicz, R. On fundamental singularity in the theory of shallow cylindrical shells [Text] / R. Ganowicz // Arch. mech. Stosowanej. – 1973. – Vol. 25, № 6. – P. 985–992.
12. Jahanshahi, A. Force Singularities of Shallow Cylindrical Shells [Text] / A. Jahanshahi // Journal of Applied Mechanics. – 1963. – Vol. 30, № 3. – P. 342–345. doi:10.1115/1.3636559
13. Величко, П. М. Деформация оболочек положительной кривизны при сосредоточенных воздействиях [Текст] / П. М. Величко, В. К. Хижняк, В. П. Шевченко // Концентрация напряжений. – Киев: Наук. думка, 1971. – Вып. 3. – С. 31.
14. Величко, П. М. Исследования местных напряжений в пластинках и оболочках при сосредоточенных нагрузках [Текст]: мат. докл. / П. М. Величко, В. К. Хижняк, В. П. Шевченко // III Всесоюз. съезд по теорет. и прикл. механике. – М.: АН СССР, 1968. – С. 67.
15. Величко, П. М. Местные напряжения в оболочках положительной, нулевой и отрицательной кривизны [Текст] / П. М. Величко, В. К. Хижняк, В. П. Шевченко // Тр. X Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. – Тбилиси: Изд-во Мицниереба, 1975. – Т. 1. – С. 31–41.
16. Lukasiewicz, S. Local loads in plates and shells [Text] / S. Lukasiewicz // Alpen aan den Rijn, Sijthoff and Noordhoff. – Warszawa: PWM, 1979. – 569 p. doi:10.1007/978-94-009-9541-3
17. Sanders, J. L. Singular Solutions to the Shallow Shell Equations [Text] / J. L. Sanders // Journal of Applied Mechanics. – 1970. – Vol. 37, № 2. – P. 361–366. doi:10.1115/1.3408514
18. Simmonds, J. G. The Fundamental Solution for a Shallow Shell With an Arbitrary Quadratic Midsurface [Text] / J. G. Simmonds, M. R. Bradley // Journal of Applied Mechanics. – 1976. – Vol. 43, № 2. – P. 286–290. doi:10.1115/1.3423825
19. Владимиров, В. С. Обобщенные функции в математической физике [Текст] / В. С. Владимиров. – М.: Наука, 1976. – 280 с.
20. Шварц, Л. Математические методы для физических наук [Текст] / Л. Шварц. – М.: Мир, 1965. – 412 с.
21. Эдвардс, Р. Функциональный анализ [Текст] / Р. Эдвардс. – М.: Мир, 1969. – 1071 с.
22. Векуа, И. Н. Об одном методе расчета призматических оболочек [Текст] / И. Н. Векуа // Тр. Тбилис. матем. ин-та. – 1955. – № 21. – С. 191–253.
23. Векуа, И. Н. Теория тонких пологих оболочек переменной толщины [Текст] / И. Н. Векуа. – Тбилиси: Мецниереба, 1965. – 103 с.
24. Cicala, P. Sulla teoria elastica della plate sottile [Text] / P. Cicala // Gorn. Genio civile. – 1959. – Vol. 97, № 4. – P. 238–256.

25. Понятовский, В. В. К теории пластин средней толщины [Текст] / В. В. Понятовский // Прикладная математика и механика. – 1962. – Т. 26, № 2. – С. 335–341.
26. Понятовский, В. В. К теории изгиба анизотропных пластинок [Текст] / В. В. Понятовский [Текст] // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т. 28, № 6. – С. 1033–1039.
27. Понятовский, В. В. Уточненная теория трансверсально – изотропных пластин [Текст] / В. В. Понятовский // Прикладная математика и механика. – 1967. – Т. 28, № 6. – С. 72–92.
28. Хан, Х. Теория упругости: Основы линейной теории и ее применения [Текст] / Х. Хан. – М.: Мир, 1988. – 344 с.
29. Пелех, Б. Л. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений [Текст] / Б. Л. Пелех, В. А. Лазько. – К.: Наук. думка, 1982. – 296 с.
30. Снеддон, И. Преобразования Фурье [Текст] / И. Снеддон. – М.: Издательство иностранной литературы, 1955. – 668 с.
31. Хижняк, В. К. Смешанные задачи теории пластин и оболочек [Текст]: учебное пособие / В. К. Хижняк, В. П. Шевченко; ДонГУ. – Донецк: ДонГУ, 1980. – 128 с.
32. Дементьев, А. Д. Прикладные задачи теории упругости [Текст] / А. Д. Дементьев, Л. А. Назаров, Л. А. Назарова. – Новосибирск, 2002. – 224 с.

УДК 622.691
DOI: 10.15587/1729-4061.2015.48234

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПЛАСТИН ПРЯМОТОЧНЫХ КЛАПАНОВПОРШНЕВЫХ КОМПРЕССОРОВ, РАБОТАЮЩИХ В СИСТЕМЕ ГАЗЛИФТНОЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ НЕФТЯНЫХ СКВАЖИН

Ибрагим Абульфас оглы Габибов
Доктор технических наук, профессор
НИИ «Геотехнологические проблемы нефти, газа и химия»
пр. Азадлыг, 20, г. Баку, Азербайджан, AZ1010
E-mail: h.ibo@mail.ru

Натик Сабир оглы Сеидахмедов
Заместитель директора
Азербайджанский Государственный Научно-Исследовательский Институт по Охране Труда и Технике Безопасности
ул. Табриза, 108, г. Баку, Азербайджан, ФAZ1000
E-mail: n.natiq.az@mail.ru

Однією з основних причин виникнення відмов клапанів є поломка пластин, яка призводить до порушення їх герметичності. Часті зміни технологічних параметрів викликають вібраційні механічні коливання пластини в період закриття клапана і призводять до його поломки. Існуючі рівняння руху пластини прямоточних клапанів не дозволяють повністю оцінити їх працездатність в системі газліфтної експлуатації. В роботі зроблена спроба виведення рівняння руху пластин прямоточних клапанів

Ключові слова: поршневі компресори, прямоточні клапани, коливання пластини, герметичність, пружність, жорсткість, попутний нафтовий газ, газліфтна експлуатація

Одной из основных причин возникновения отказов клапанов является поломка пластин, которая приводит к нарушению их герметичности. Частые изменения технологических параметров вызывают вибрационные механические колебания пластины в период закрытия клапана и приводят к его поломке. Существующие уравнения движения пластины прямоточных клапанов не позволяют полностью оценить их работоспособность в системе газлифтной эксплуатации. В работе сделана попытка вывода уравнения движения пластин прямоточных клапанов

Ключевые слова: поршневые компрессоры, прямоточные клапаны, колебание пластины, герметичность, упругость, жесткость, попутный нефтяной газ, газлифтная эксплуатация

1. Введение

Как показывает многолетняя практика эксплуатации нефтегазопромысловых поршневых компрессоров в системе газлифтной эксплуатации нефтяных скважин, экономичность, безопасность, безотказность и герметичность работы клапанов резко снижается вследствие динамических процессов, т. е. частое изменение технологических параметров и физико-химического свойства попутного нефтяного газа в общей системе «добычи, сбора, подготовки и транспортировки газа» [1, 2].