

13. Расторгуев, Б. С. Методы динамического расчета зданий на устойчивость против прогрессирующего разрушения [Текст] / Б. С. Расторгуев // Вестник отделения строительных наук РААСН. – 2009. – Т. 1, Вып. 13.
14. Тамразян, А. Г., Филимонова Е. А. Оптимизация железобетонных конструкций с учетом анализа риска на примере железобетонной плиты перекрытия [Текст]: 3-я Всерос. (2-я Межд.) конф. // Бетон и железобетон взгляд в будущее. – 2014. – Т. 1. – С. 365–378.
15. He, Q. Effects on Response of Reinforced Concrete Substructures after Loss of Corner Column [Text] / Q. He, W. Yi // ACI Structural journal. – 2013. – Vol. 110, Issue 5. – P. 893–896.
16. Тихонов, И. Н., Мешков В. З. Армирование железобетонных конструкций с целью предотвращения прогрессирующего обрушения [Текст]: 3-я Всерос. (2-я Межд.) конф. // Бетон и железобетон взгляд в будущее. – 2014. – Т. 1. – С. 379–388.
17. Чанг, К. К. Последнее исследования в области железобетонных конструкций в национальном исследовательском центре сейсмостойкого строительства, Тайвань [Текст]: 3-я Всерос. (2-я Межд.) конф. / К. К. Чанг // Бетон и железобетон взгляд в будущее. – 2014. – Т. 2. – С. 161–173.

В рамках ізольованої системи, яка здійснює плоский рух і складена з обертового статично незрівноваженого несучого тіла та двох однакових математичних маятників, відносно руху яких перешкоджають сили в'язкого опору, досліджується умовна стійкість усталених рухів. Встановлено, що умовно асимптотично стійкими є окремі основні рухи, якщо вони ізольовані, чи сім'я, або псевдосім'я основних рухів

Ключові слова: несуче тіло, маятники, стійкість руху, космічний апарат, пасивний автобалансир, демпфер

В рамках изолированной системы, совершающей плоское движение и состоящей из вращающегося статически неуравновешенного несущего тела и двух одинаковых математических маятников, относительно движению которых препятствуют силы вязкого сопротивления, исследуется условная устойчивость установившихся движений. Установлено, что условно асимптотически устойчивыми являются отдельные основные движения, если они изолированы, или семья, или псевдосемья основных движений

Ключевые слова: несущее тело, маятники, устойчивость движения, космический аппарат, пассивный автобалансир, демпфер

УДК 531.38+531.36

DOI: 10.15587/1729-4061.2015.49269

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ ИЗОЛИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ, СОВЕРШАЮЩЕЙ ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

В. В. Пирогов

Кандидат физико-математических наук, доцент
Кафедра деталей машин и прикладной механики
Кировоградский национальный
технический университет
пр. Университетский, 8,
г. Кировоград, Украина, 25006
E-mail: vladimir-pirogovvv@rambler.ru

1. Введение

В идеальном случае космический аппарат (КА) или искусственный спутник Земли (ИСЗ) стабилизируемый вращением должен вращаться вокруг своей продольной оси, являющейся главной центральной осью инерции. Из-за неточного придания начального вращения КА или ИСЗ, а также из-за неуравновешенности относительно его продольной оси, возникают линейные и угловые отклонения (угол нутации) продольной оси от оси его вращения. Для уменьшения указанных отклонений используют активные или пассивные системы стабилизации. Среди пассивных систем стабилизации, на КА и ИСЗ стабилизируемых вращением, широкое применение нашли пассивные демпферы угла нутации [1–3].

2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

В связи с научно-техническим прогрессом в космической отрасли, в последнее время прослеживается тенденция уменьшения размеров и массы КА и ИСЗ. В соответствии с общепринятой классификацией [4, 5], КА и ИСЗ, масса которых составляет 0,1–500 кг, называются малыми. Обзор публикаций [6–9] показывает, что количество малых КА и ИСЗ постоянно возрастает. В связи с этим, как было указано в работах [10, 11], использование дорогостоящих, сложных и громоздких активных систем стабилизации на малых КА и ИСЗ, является не всегда оправданным и целесообразным решением. Поэтому наиболее приемлемым является вариант использования пассивных систем стабили-

зации, которые обладают рядом преимуществ перед активными системами (имеют небольшую массу и габаритные размеры, не потребляют энергию, конструктивно просты, надёжны и т. д.). Единственным серьёзным недостатком пассивных систем стабилизации, который ограничивает их распространение, является их невысокая точность. Например, в работах [12, 13], было показано, что пассивные демпферы не устраняют полностью отклонения продольной оси КА или ИСЗ от оси его вращения. Попытка объяснить возникающие отклонения была сделана в работах [13, 14]. Так для ртутного демпфера угла нутации, возникновение остаточного угла нутации объяснялось неуровновешенностью, образованной из-за большого поверхностного натяжения ртути. Учитывая то, что неуровновешенность от ртути не является максимально-возможной, то такая модель поведения жидкостного демпфера нутации не объясняет возникновения больших остаточных углов нутации. В работах [15–18] было показано, что маятниковые, шаровые или жидкостные демпферы угла нутации могут значительно влиять на движение КА или ИСЗ. При этом устойчивыми могут быть движения, в которых КА или ИСЗ вращается не вокруг продольной оси, а вокруг близкой к ней оси. Все это приводит к необходимости исследования устойчивости различных установившихся движений.

Для устранения недостатков пассивных демпферов угла нутации вместо них в [19, 20] было предложено использовать пассивные автобалансиры (АБ) (классические и неклассические).

Исследования, посвящённые процессу устранения классическими пассивными АБ (маятниковыми, шаровыми и жидкостными) больших углов нутации были проведены в работе [21]. В работе [22] был изучен процесс возникновения остаточного угла нутации при неправильной установке на космический аппарат классического АБ (двухшарового или двухмаятникового). В работе [23] был изучен процесс устранения линейных отклонений продольной оси КА или ИСЗ от оси вращения, вызванный неуровновешенностью КА или ИСЗ относительно продольной оси, неклассическими АБ в виде двух связанных абсолютно твердых тел.

3. Цель и задачи исследования

Целью данной работы является исследование процесса устранения линейных отклонений продольной оси КА или ИСЗ от оси вращения классическими пассивными АБ (маятниковыми или шаровыми), для трёх важных с точки зрения практики случаев, а именно:

- когда неуровновешенность есть и АБ может ее устранить;
- когда неуровновешенность отсутствует;
- когда неуровновешенность максимальная, которую могут устранить АБ.

Для достижения поставленной цели решались следующие задачи:

- построить модель движения системы, состоящей из вращающегося КА или ИСЗ с маятниковым (шаровым) пассивным АБ;
- исследовать условную устойчивость установившихся движений;
- исследовать характер переходных процессов.

4. Особенности исследования КА или ИСЗ стабилизированных вращением, как вращающихся изолированных систем

В результате обзора работ [12, 13, 15–18, 24–26] установлено, что для исследования процесса устранения отклонений продольной оси КА или ИСЗ стабилизированных вращением от оси их вращения, используют изолированные системы (ИС) с вязким рассеиванием (диссипацией) энергии, состоящих из вращающегося несущего тела (НТ) и присоединенных тел (ПТ). Относительным движениям ПТ препятствуют силы вязкого сопротивления (внутренние диссипативные силы). Кроме того, на ПТ могут действовать внутренние потенциальные силы. Полная механическая энергия ИС равна:

$$E = T + \Pi, \quad (1)$$

где T – кинетическая, Π – потенциальная энергия системы.

Отметим, что ИС называют системы, на которые не действуют внешние силы [27]. Так как система изолированная, то для нее имеют место законы сохранения движения центра масс (второй интеграл) и кинетического момента (первый интеграл) системы. Не ограничивая общности, будем считать, что центр масс системы – точка G неподвижный. Принимая за начало отсчета точку G , будем иметь

$$r_G = 0, \quad (2)$$

где r_G – радиус-вектор точки G ;

$$K_G = \text{const}, \quad (3)$$

где K_G – вектор кинетического момента ИС, найденный относительно ее центра масс.

Во время переходных процессов ПТ двигаются относительно НТ. В связи с тем, что к ИС не подводится энергия, имеем

$$dE / dt = -2\Phi, \quad (4)$$

и со временем относительные движения ПТ останавливаются, при этом НТ и ПТ начинают вращаться как одно целое вокруг оси, на которой лежит неизменный вектор кинетического момента системы. В (4) Φ – диссипативная функция Релея.

На установившихся движениях полная механическая энергия E является постоянной функцией и не возрастает вдоль траектории движения ИС. В работе [28], для конкретных ИС, составленных из НТ и ПТ, которые образуют пассивные АБ, было предложено различать основные и побочные установившиеся движения. На основных установившихся движениях НТ вращается вокруг продольной оси $Z = Z_G$ (рис. 1, а), а на побочных – нет (рис. 1, б). На рис. 1, а, б, ось Z_G не показана, а заштрихованной областью показано место установки пассивного АБ.

В механических системах, которыми являются КА или ИСЗ стабилизированные вращением с маятниковыми или шаровыми АБ, в отличие от известных, вместе с изолированными установившимися движениями

могут появляться одно- или многопараметрические семьи установившихся движений. Поскольку на практике осуществляются только устойчивые движения, то исследование таких ИС сводится к выделению всех установившихся движений и исследованию их на условную устойчивость (при условии, что имеют место законы сохранения движения центра масс и кинетического момента системы).

Исследования условной устойчивости установившихся движений удобно проводить относительно подвижных осей, в связи с чем:

– условная устойчивость установившихся движений рассматривается для относительного положения равновесия ИС;

– для исследования условной устойчивости относительного положения равновесия ИС применима теория условной устойчивости стационарных движений нелинейных автономных систем.

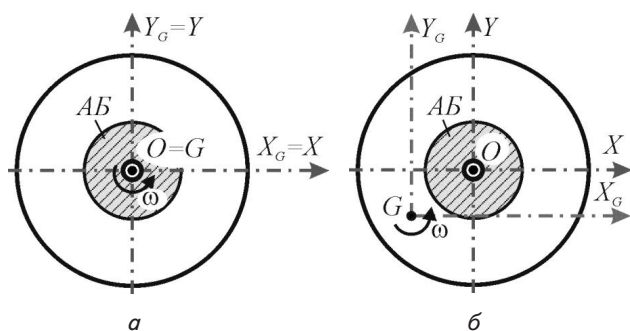


Рис. 1. Установившиеся движения ИС в случае плоского движения ИС: а – основные; б – побочные

5. Исследование условной устойчивости основных движений изолированной системы совершающей плоское движение

5. 1. Описание теоретико-механической модели изолированной системы

Общее описание модели. НТ имеет массу M , центр масс в точке O и осевые моменты инерции A, B, C относительно его главных центральных осей инерции X, Y, Z (рис. 2). Ось Z проходит через точку O и направлена на нас (на рис. 2, а, б, ось Z не показана). Статическую неуравновешенность НТ относительно оси Z создает неподвижная относительно НТ материальная точка D массой μ , расположенная в плоскости XOY (рис. 2, а, б). Координаты точки D относительно осей XOY имеют вид $(e, 0, 0)$. На ось Z посажены два одинаковых математических маятника длиной $l_1=l_2=l$ и массой $m_1=m_2=m$, расположенных в плоскости XOY (рис. 2, а).

Отметим, что в рассматриваемой модели вместо маятников можно рассматривать шары массой m , которые двигаются по кольцевым дорожкам радиуса l (рис. 2, б). Причем шары принимаются за материальные точки, или l – расстояние от оси Z до центра масс шара, и осевым моментом инерции шара относительно собственного центра масс пренебрегаем. В дальнейшем, для краткости, будем ссылаться лишь на маятники.

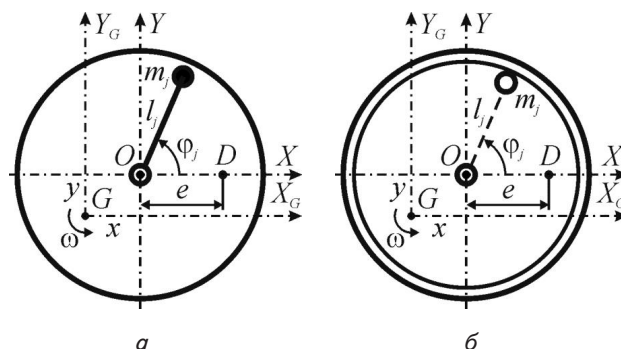


Рис. 2. Теоретико-механическая модель изолированной системы в случае ее плоского движения:

а – присоединенные тела в виде маятников;

б – присоединенные тела в виде шаров

Описание движения маятников и НТ. Положение j -го маятника определяет угол поворота φ_j , который отсчитывается от оси X , причем ось X выходит из точки O , вокруг которой вращается маятник (рис. 2, а). При движении маятника относительно НТ, на него действует момент сил вязкого сопротивления $-H_j \dot{\varphi}_j$, где H_j – коэффициент сил вязкого сопротивления.

Так как система изолированная, то для нее имеют место равенства (2) и (3). Введем неподвижные оси $G\xi\eta\zeta$, причем ось ζ направим вдоль вектора K_G (на рис. 2, а, б, оси $G\xi\eta\zeta$ – не показаны). Оси $OXYZ$, которые жестко связаны с НТ, описывают его движение относительно осей $G\xi\eta\zeta$ и определяют его текущее положение.

Плоское движение НТ будем рассматривать как движение плоской фигуры связанной с осями OXY в плоскости X_GGY_G (рис. 2, а, б). После поворота осей $G\xi\eta$ вокруг оси ζ на угол γ , получаем оси GX_GY_G . Оси GX_GY_G переходят в оси OXY после поступательных перемещений на x, y вдоль соответствующих координатных осей (рис. 2, а, б). В общем случае, плоское движение ИС определяют пять обобщенных координат $(\varphi_1, \varphi_2, \gamma, x, y)$. Отметим, что угол γ – циклическая координата.

Как и в работе [23] полагаем, что в силу начальных условий НТ совершало плоское движение. Силы, возникающие при движении маятников относительно НТ, не будут нарушать плоского движения НТ.

Считаем также, что ось Z – наибольшего момента инерции. В противном случае предполагаем, что существует активная система по поддержанию плоского движения НТ, причем ее масса и создаваемые силы – малы, и их можно не учитывать.

5. 2. Массо-инерционные характеристики системы

Тензор инерции системы относительно осей $OXYZ$ имеет вид:

$$J_o = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & 0 \\ -J_{xy} & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где

$$J_x = A + ml^2(\sin^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_2),$$

$$\begin{aligned} J_{xy} &= ml^2(\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2) / 2, \\ J_y &= B + \mu e^2 + ml^2(\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2), \\ J_z &= C + \mu e^2 + 2ml^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Тензор инерции системы относительно осей $G X_G Y_G Z_G$ имеет вид:

$$\begin{aligned} J_G &= J_O - M_\Sigma \begin{pmatrix} y^2 & -xy & 0 \\ -xy & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 + y^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} J_{x_G} & -J_{x_G y_G} & 0 \\ -J_{x_G y_G} & J_{y_G} & 0 \\ 0 & 0 & J_{z_G} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $M_\Sigma = M + \mu + 2m$ – суммарная масса системы.

Осевые и центробежные моменты инерции системы относительно осей $G X_G Y_G Z_G$ имеют вид:

$$\begin{aligned} J_{x_G} &= J_x - M_\Sigma y^2, \quad J_{x_G y_G} = J_{xy} - M_\Sigma xy, \\ J_{y_G} &= J_y - M_\Sigma x^2, \quad J_{z_G} = J_z - M_\Sigma (x^2 + y^2). \end{aligned} \quad (8)$$

5. 3. Уравнения движения изолированной системы в размерном и безразмерном виде

Первая группа уравнений (вторые интегралы) получена с помощью закона сохранения движения центра масс системы:

$$\begin{aligned} M_\Sigma x + \mu e + ml(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) &= 0, \\ M_\Sigma y + ml(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Второе уравнение (первый интеграл), относящееся ко второй группе, получено с помощью закона сохранения кинетического момента относительно центра масс системы:

$$J_{z_G} \omega + ml \sum_{j=1}^2 \dot{\varphi}_j (l + x \cos \varphi_j + y \sin \varphi_j) = J_z \omega_0, \quad (10)$$

где ω – угловая скорость вращения осей $G X_G Y_G Z_G$; ω_0 – угловая скорость вращения системы на основном движении, как одного целого, вокруг оси $\zeta = Z_G = Z$.

Третья группа уравнений получена с помощью теоремы об изменении момента количества движения материальной точки:

$$\begin{aligned} ml^2(\dot{\omega} + \dot{\varphi}_j) + H\dot{\varphi}_j + ml[(\dot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y + \dot{\omega}x)\cos \varphi_j - \\ - (\dot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x - \dot{\omega}y)\sin \varphi_j] = 0, \quad / j=1,2 / . \end{aligned} \quad (11)$$

Из уравнений (9)–(11) видно, что в общем случае динамику системы характеризуют восемь размерных параметров: $M, \mu, e, m, l, C, H, \omega_0$.

Для выделения существенно различных параметров приведем уравнения (9)–(11) к безразмерному виду:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 &= \xi + \tilde{e}_0 + (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) / 2 = 0, \\ \tilde{a}_2 &= \eta + (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) / 2 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_3 &= (R_j - \xi^2 - \eta^2)R_\omega + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \varphi_j' \left(\frac{1}{2\tilde{R}_m} + \xi \cos \varphi_j + \eta \sin \varphi_j \right) = R_j; \\ \tilde{a}_{j+3} &= \varphi_j'' + R_\omega' + h\varphi_j' - 2\tilde{R}_m [(\xi'' - \\ &- 2R_\omega \eta' - R_\omega^2 \xi - R_\omega' \eta) \sin \varphi_j - \\ &- (\eta'' + 2R_\omega \xi' - R_\omega^2 \eta + R_\omega' \xi) \cos \varphi_j] = 0, \quad / j=1,2 / . \end{aligned} \quad (12)$$

В (12) введены следующие безразмерные: – переменные и время

$$\xi = \frac{x}{r^*}, \quad \eta = \frac{y}{r^*}, \quad R_\omega = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \left(\frac{d}{dt} = \omega_0 \frac{d}{d\tau} \right); \quad (13)$$

– параметры

$$\begin{aligned} \tilde{e}_0 &= \frac{\mu e}{2ml}, \quad 2\tilde{R}_m = \frac{2m}{M_\Sigma} = R_m, \quad h = \frac{H}{ml^2 \omega_0}, \\ R_j &= \frac{C + \mu e^2 + 2ml^2}{M_\Sigma l^{*2}}. \end{aligned} \quad (14)$$

В (13) и (14) $r^* = 2ml / M_\Sigma$ – наибольшее расстояние, на которое может отклониться материальная точка, которая создает неуравновешенность, от центра масс НТ так, чтобы ее могли уравновесить маятники и при этом НТ вращалось бы вокруг оси $Z = Z_G$. В уравнениях (10)–(12) штрих обозначает дифференцирование по безразмерному времени τ , а точка – по времени t .

Безразмерный осевой момент инерции системы \tilde{J}_{z_G} имеет вид:

$$\tilde{J}_{z_G} = R_j - \xi^2 - \eta^2, \quad (15)$$

или с учетом первых двух уравнений системы (12)

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{z_G} &= R_j - [\tilde{e}_0 + (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) / 2]^2 - \\ &- (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)^2 / 4. \end{aligned} \quad (16)$$

Из системы уравнений (12) видно, что в общем случае динамику системы характеризуют четыре существенно различных безразмерных параметра:

$$h \geq 0, \quad 0 \leq \tilde{e}_0 \leq 1, \quad R_j > 0, \quad \tilde{R}_m > 0.$$

5. 4. Анализ основных и побочных установившихся движений

Учитывая то, что на любом установившемся движении безразмерные координаты $\varphi_1, \varphi_2, \xi, \eta$ и угловая скорость R_ω постоянны, уравнения установившихся движений, учитывая уравнения (12), будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 &= \xi + \tilde{e}_{x0}, \quad \tilde{a}_2 = \eta + \tilde{e}_{y0}, \quad \tilde{a}_3 = (R_j - \xi^2 - \eta^2)R_\omega = R_j, \\ \tilde{a}_{j+3} &= 2\tilde{R}_m R_\omega^2 (\xi \sin \varphi_j - \eta \cos \varphi_j) = 0, \quad / j=1,2 / , \end{aligned} \quad (17)$$

$$e_{x0} = \tilde{e}_0 + (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) / 2, \quad e_{y0} = (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) / 2 \quad (18)$$

– соответственно безразмерная неуравновешенность по оси X и Y.

Основные движения. Считаем, что маятники устранили неуравновешенность и система вращается вокруг продольной оси НТ, тогда на основном установившемся движении:

$$\tilde{\xi} = 0, \tilde{\eta} = 0, \tilde{R}_\omega, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 - \text{const.} \quad (19)$$

Подставляя (19) в уравнения (17) и учитывая уравнения (18), получим:

$$\tilde{a}_1 = e_{x_0} = 0, \tilde{a}_2 = e_{y_0} = 0, \tilde{a}_3 = \tilde{R}_\omega = 1, \tilde{a}_{j+3} \equiv 0, / j=1,2 /. \quad (20)$$

Из третьего уравнения системы (20) получаем, что на основных движениях $\tilde{R}_\omega = 1$. В результате решения первых двух уравнений \tilde{a}_1 и \tilde{a}_2 системы (20), были найдены основные движения для следующих случаев:

1. $0 < \tilde{e}_0 < 1$ – неуравновешенность есть и маятники могут ее устранить с определённым запасом (рис. 3, а), существует одно (изолированное) основное движение. Из второго уравнения системы (20) найдем, что $\sin \tilde{\varphi}_1 = -\sin \tilde{\varphi}_2$. Ищем существенно отличные движения, не принимая во внимание замену местами маятников и изменение углов с шагом 2π . Тогда, учитывая, что $\tilde{\varphi}_1 = -\tilde{\varphi}_2$, первое уравнение системы (20) преобразуется к виду:

$$\cos \tilde{\varphi}_1 = -\tilde{e}_0, \quad (21)$$

или

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1 = -\tilde{\varphi}_2 = \pi - \arccos \tilde{e}_0 = (\pi / 2) + \tilde{\varphi}_0, \\ (\tilde{\varphi}_0 = \arcsin \tilde{e}_0, \tilde{\varphi}_0 \in (0, \pi / 2)). \end{aligned} \quad (22)$$

2. $\tilde{e}_0 = 0$ – неуравновешенность отсутствует (рис. 3, б), существует однопараметрическая семья основных движений. Из (21) получаем, что $\cos \tilde{\varphi}_1 = 0$, откуда $\tilde{\varphi}_1 = \pi / 2$. Из первых двух уравнений системы (20) имеем:

$$\tilde{\varphi}_1 = \theta + \pi / 2, \tilde{\varphi}_2 = \theta - \pi / 2, \theta \in [0, \pi), \quad (23)$$

где θ – параметр, который определяет некоторое движение из однопараметрической семьи основных движений. Отметим, что $\theta \in [0, \pi)$, так как для остальных значений $\theta \in [\pi, 2\pi)$ можно получить те же самые установившиеся движения всего лишь меняя местами маятники.

3. $\tilde{e}_0 = 1$ – неуравновешенность наибольшая, которую могут устранить маятники (рис. 3, в), существует одно основное движение. Из (21) получаем, что $\cos \tilde{\varphi}_1 = -1$, откуда $\tilde{\varphi}_1 = \pi$. Из первых двух уравнений системы (20) имеем:

$$\tilde{\varphi}_1 = \pi, \tilde{\varphi}_2 = -\pi. \quad (24)$$

Побочные движения. На побочных движениях:

$$e_{x_0}^2 + e_{y_0}^2 > 0. \quad (25)$$

Если $\tilde{e}_0 \neq 0$, получаем следующих три случая.

1. $e_{x_0} = 0, e_{y_0} \neq 0$. Тогда из уравнений (18) получаем, что $\cos \varphi_j = 0$ и $e_{x_0} = \tilde{e}_0 \neq 0$. Поэтому этот случай не даёт решений.

2. $e_{x_0} \neq 0, e_{y_0} = 0$. Тогда из уравнений (18) получаем, что $\sin \varphi_j = 0, (j=1,2)$. Получаем следующие побочные движения:

а) маятники отклонены в противоположную сторону от точки, создающей неуравновешенность (рис. 4, а):

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \pi; \quad (26)$$

б) маятники отклонены в сторону точки, создающей неуравновешенность (рис. 4, б):

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0; \quad (27)$$

в) маятники отклонены по разные стороны от точки, создающей неуравновешенность (рис. 4, в):

$$\varphi_{1,2} = 0, \varphi_{2,1} = \pi. \quad (28)$$

3. Случай когда $e_{x_0} \neq 0, e_{y_0} \neq 0$. Тогда получаем тождество:

$$\text{ctg} \varphi_j = \frac{\cos \varphi_j}{\sin \varphi_j} \equiv \frac{e_{x_0}}{e_{y_0}}, / j=1,2 /. \quad (29)$$

Будем искать решение системы (29) в виде:

$$\varphi_j = \gamma + k_j \pi, \cos \varphi_j = \cos(\gamma + k_j \pi) = \cos \gamma (-1)^{k_j}, / j=1,2 /, \quad (30)$$

где γ – некоторый параметр. Тогда система (29) будет иметь вид:

$$\text{ctg} \gamma = \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} \equiv \frac{\tilde{e}_0 + e(k) \cos \gamma}{e(k) \sin \gamma},$$

откуда получаем $\tilde{e}_0 / [e(k) \sin \gamma] = 0$, что невозможно, так как $\tilde{e}_0 \neq 0$. Поэтому данный случай не даёт решений.

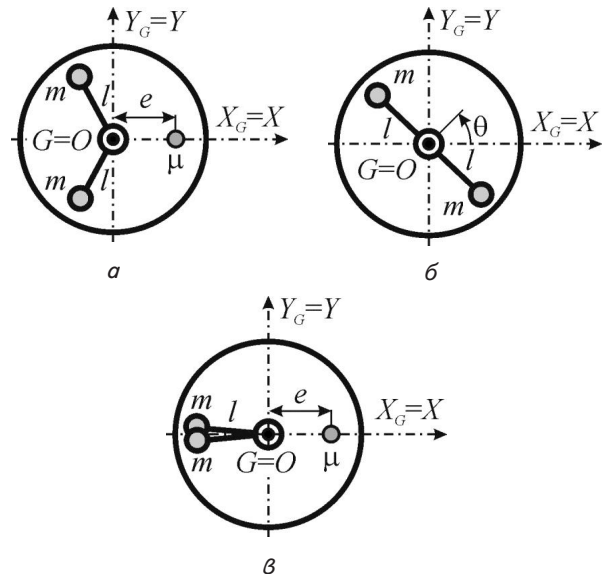


Рис. 3. Основные установившиеся движения: а – случай, когда $0 < \tilde{e}_0 < 1$; б – случай, когда $\tilde{e}_0 = 0$; в – случай, когда $\tilde{e}_0 = 1$

Если $\tilde{e}_0 = 0$, то, учитывая (30), получим, что маятники будут отклонены вдоль некоторой оси и повернутой

на угол γ относительно оси X (рис. 4, з). Так как маятники одинаковые и при изменении угла γ на угол $\gamma + \pi$ маятники меняют ориентацию на противоположную, получаем однопараметрическую семью побочных движений:

$$\varphi_1 = \gamma + \pi, \varphi_2 = \gamma - \pi, \gamma \in [0, \pi). \quad (31)$$

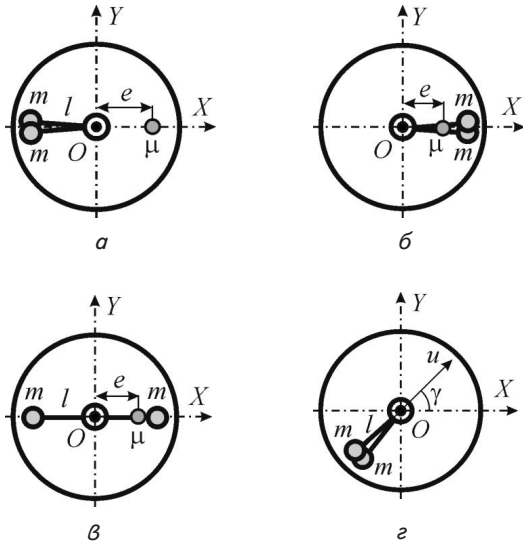


Рис. 4. Побочные установившиеся движения:

а – случай, когда $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi$; б – случай, когда

$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$; в – случай, когда $\varphi_{1,2} = 0, \varphi_{2,1} = \pi$; г – случай, когда $\varphi_1 = \gamma + \pi, \varphi_2 = \gamma - \pi$

5. 5. Исследование условной устойчивости основных движений первым методом Ляпунова

5. 5. 1. Случай когда $0 < \epsilon_0 < 1$

Исследуем устойчивость основного движения с помощью двух последних уравнений системы (12). Рассмотрим возмущенное движение:

$$\xi = u, \eta = v, \varphi_1 = \tilde{\varphi}_1 + \alpha_1, \varphi_2 = \tilde{\varphi}_2 + \alpha_2, R_\omega = 1 + p, \quad (32)$$

где $u, v, \alpha_1, \alpha_2, p$ – возмущения ($|u|, |v|, |\alpha_1|, |\alpha_2|, |p| \ll 1$); $0, 0, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, 1$ – невозмущенное движение.

Учитывая (32) и (22), из первых двух уравнений системы (12) получим:

$$\tilde{a}_1 = u - \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{2} \cos \tilde{\varphi}_0 = 0, \tilde{a}_2 = v - \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{2} \sin \tilde{\varphi}_0 = 0. \quad (33)$$

Из третьего уравнения системы (12) получим:

$$\tilde{a}_3 = R_J p + \frac{(\alpha'_1 + \alpha'_2)}{4\tilde{R}_m} = 0. \quad (34)$$

Учитывая (32) и (22), уравнения маятников примут вид:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_4 &= \alpha''_1 + p' + h\alpha'_1 - 2\tilde{R}_m [(u'' - 2v' - u) \cos \tilde{\varphi}_0 + (v'' + 2u' - v) \sin \tilde{\varphi}_0] = 0, \\ \tilde{a}_5 &= \alpha''_2 + p' + h\alpha'_2 + 2\tilde{R}_m [(u'' - 2v' - u) \cos \tilde{\varphi}_0 - (v'' + 2u' - v) \sin \tilde{\varphi}_0] = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Для удобства интерпретации условной устойчивости основного движения введем новые переменные:

$$\gamma_1 = (\alpha_1 + \alpha_2) / 2, \gamma_2 = (\alpha_1 - \alpha_2) / 2. \quad (36)$$

Тогда из уравнений (33) и (34) получим:

$$\begin{aligned} u &= \gamma_2 \cos \tilde{\varphi}_0, u' = \gamma'_2 \cos \tilde{\varphi}_0, u'' = \gamma''_2 \cos \tilde{\varphi}_0, \\ v &= \gamma_1 \sin \tilde{\varphi}_0, v' = \gamma'_1 \sin \tilde{\varphi}_0, v'' = \gamma''_1 \sin \tilde{\varphi}_0, \\ p &= -\gamma'_1 / (2\tilde{R}_m R_J), p' = -\gamma''_1 / (2\tilde{R}_m R_J). \end{aligned} \quad (37)$$

Учитывая (36), уравнения (35) после преобразований будут иметь вид:

$$\begin{aligned} L_1 &= (\tilde{a}_4 + \tilde{a}_5) / 2 = \gamma''_1 + h\gamma'_1 + p' - 2\tilde{R}_m (v'' + 2u' - v) \sin \tilde{\varphi}_0 = 0, \\ L_2 &= (\tilde{a}_4 - \tilde{a}_5) / 2 = \gamma''_2 + h\gamma'_2 - 2\tilde{R}_m (u'' - 2v' - u) \cos \tilde{\varphi}_0 = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Исключая из уравнений (38) переменные u, v, p , с помощью уравнений (37), и группируя соответствующие составляющие возле γ_1, γ_2 и их производных, окончательно получим:

$$\begin{aligned} L_1 &= (1 - qR_m - R_m \sin^2 \tilde{\varphi}_0) \gamma''_1 + h\gamma'_1 + R_m \gamma_1 \sin^2 \tilde{\varphi}_0 - R_m \gamma'_2 \sin 2\tilde{\varphi}_0 = 0, \\ L_2 &= (1 - R_m \cos^2 \tilde{\varphi}_0) \gamma''_2 + h\gamma'_2 + R_m \gamma_2 \cos^2 \tilde{\varphi}_0 + R_m \gamma'_1 \sin 2\tilde{\varphi}_0 = 0, \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$\frac{1}{2\tilde{R}_m R_J} = qR_m,$$

$$\left(C = M\rho_0^2, \rho_0^2 \sim e^2 - l^2, \left[q = l^2 (M + \mu + nm) / \left[\rho_0^2 \left(M + \mu \frac{e^2}{\rho_0^2} + nm \frac{l^2}{\rho_0^2} \right) \right] \sim 1 \right] \right).$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} a_{11} &= (1 - qR_m - R_m \sin^2 \tilde{\varphi}_0) \lambda^2 + h\lambda + R_m \sin^2 \tilde{\varphi}_0, \\ a_{12} &= -a_{21} = -R_m \lambda \sin 2\tilde{\varphi}_0, \\ a_{22} &= (1 - R_m \cos^2 \tilde{\varphi}_0) \lambda^2 + h\lambda + R_m \cos^2 \tilde{\varphi}_0. \end{aligned} \quad (40)$$

Тогда характеристическое уравнение системы (39) имеет вид:

$$\Delta(\lambda) = |a_{ij}|_1^2 = a_4 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0, \quad (41)$$

где

$$\begin{aligned} a_4 &= (1 - R_m \cos^2 \tilde{\varphi}_0) [1 - R_m (q + \sin^2 \tilde{\varphi}_0)], \\ a_3 &= h[2 - R_m (1 + q)], \\ a_2 &= h^2 + R_m - R_m^2 \cos^2 \tilde{\varphi}_0 (q - 2 \sin^2 \tilde{\varphi}_0), \\ a_1 &= hR_m, a_0 = 0, 25R_m^2 \sin^2 2\tilde{\varphi}_0. \end{aligned} \quad (42)$$

В соответствии с теоремой Ляпунова об устойчивости движения по первому приближению, основное движение асимптотически устойчиво, если выполняются условия:

$$\text{Re}(\lambda_i) < 0, / i = \overline{1, 5}, \quad (43)$$

где λ_i – i -й корень характеристического уравнения (41). Условия асимптотической устойчивости основного движения, в соответствии с критерием Рауса-Гурвица, имеют следующий вид:

$$a_i > 0, \quad /i=0,5/, \quad \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \quad \Delta_3 = a_3 \Delta_2 - a_4 a_1^2 > 0. \quad (44)$$

Вторая группа условий (44) имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= hR_m [h^2 + R_m (1 - 0,5 \sin^2 2\tilde{\varphi}_0) + \\ &R_m^2 \cos^2 \tilde{\varphi}_0 (3 \sin^2 \tilde{\varphi}_0 - q \cos^2 \tilde{\varphi}_0)] > 0, \\ \Delta_3 &= h^2 R_m \{2h^2 - R_m [1 - h^2(1+q) - \sin^2 2\tilde{\varphi}_0] + \\ &+ 2R_m^2 \cos^2 \tilde{\varphi}_0 (4 \sin^2 \tilde{\varphi}_0 - q \cos^2 \tilde{\varphi}_0) + \\ &+ R_m^3 \cos^2 \tilde{\varphi}_0 [q^2 \cos^2 \tilde{\varphi}_0 - 4 \sin^2 \tilde{\varphi}_0 (1+q)]\} > 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Условия (45) будут выполняться в случае, когда $R_m \ll 1$.

В общем случае анализ условий (45) и получение корней характеристического уравнения (41) в аналитическом виде невозможно, поэтому корни характеристического уравнения (41) будем определять приближенно – методом прямого разложения корней полинома по степеням малого параметра.

В случае когда $R_m \ll 1$, корни характеристического уравнения (41) имеют вид:

$$\lambda_{1,2} \approx -h, \quad \lambda_3 \approx -R_m \tilde{e}_0^2 / h, \quad \lambda_4 \approx -R_m (1 - \tilde{e}_0^2) / h, \quad (46)$$

или в размерном виде

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &\approx -\frac{H}{ml^2 \omega_0}, \quad \lambda_3 \approx -\frac{\omega_0 \mu^2 e^2}{2M_\Sigma H}, \\ \lambda_4 &\approx -\frac{\omega_0}{2M_\Sigma H} (4m^{21} - \mu^2 e^2). \end{aligned} \quad (47)$$

Видно, что корни (46) или (47) действительные и отрицательные, поэтому рассматриваемое основное движение асимптотически устойчиво, а переходные процессы апериодические.

5. 5. 2. Случай когда $\tilde{e}_0 = 0$

В рассматриваемом случае система уравнений (39) имеет вид:

$$\begin{aligned} L_1 &= (1 - qR_m) \gamma_1'' + h\gamma_1' = 0, \\ L_2 &= (1 - R_m) \gamma_2'' + h\gamma_2' + R_m \gamma_2 = 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Видно, что система уравнений (48) распадается на два независимых уравнения. В первое уравнение системы (48) входит переменная γ_1 , во второе – γ_2 .

Характеристическое уравнение второго уравнения системы (48) имеет вид:

$$(1 - R_m)v^2 + hv + R_m = 0. \quad (49)$$

Корни уравнения (49) имеют вид:

$$v_{1,2} = -\frac{1}{2(1 - R_m)} \left[h \pm \sqrt{h^2 - 4R_m(1 - R_m)} \right], \quad (50)$$

или в размерном виде

$$\begin{aligned} v_{1,2} &= -\frac{M_\Sigma}{2(M_\Sigma - 2m)} \times \\ &\times \left[\frac{H}{ml^2 \omega_0} \pm \sqrt{\frac{H^2 M_\Sigma^2 - 8m^{31} \omega_0^2 (M_\Sigma - 2m)}{M_\Sigma^2 m^{21} \omega_0^2}} \right]. \end{aligned} \quad (51)$$

Анализируя корни (50), видно, что условие (43) имеет место, когда $R_m < 1$. Как видно из корней (50) и (51), переходные процессы имеют аperiodический или колебательно-затухающий характер (в зависимости от параметров системы), и имеет место асимптотическая устойчивость по γ_2 .

Характеристическое уравнение первого уравнения системы (48) имеет вид:

$$(1 - qR_m)\mu^2 + h\mu = 0. \quad (52)$$

Корни уравнения (52) имеют вид:

$$\mu_1 = -h / (1 - qR_m), \quad \mu_2 = 0, \quad (53)$$

или в размерном виде

$$\mu_1 = -\frac{HM_\Sigma}{ml^2 \omega_0 (M_\Sigma - 2qm)}, \quad \mu_2 = 0. \quad (54)$$

Анализируя корни (53), видно, что условие (43) имеет место, когда $qR_m < 1$.

Таким образом, со временем $\gamma_2 \rightarrow 0$, $\gamma_1 \rightarrow \text{const}$. Из этого следует, что со временем неуравновешенность полностью устраняется. Скорость стремления к нулю возмущения γ_2 полностью характеризуют действительные части корней (53) или (54).

Объясним детальнее появление нулевого корня μ_2 , рассмотрев переменные γ_1 и γ_2 . Введем новые углы, которые характеризуют положение маятников относительно направления вектора неуравновешенности (рис. 5, а, б):

$$\theta_1 = \tilde{\theta} - \varphi_1, \quad \theta_2 = \varphi_2 - \tilde{\theta},$$

откуда

$$\varphi_1 = \tilde{\theta} - \theta_1, \quad \varphi_2 = \tilde{\theta} + \theta_2, \quad (55)$$

где $\tilde{\theta}$ – угол, который определяет направление, от которого отсчитываются углы θ_1 и θ_2 . Пусть маятники отклонились от основного движения (рис. 5, а), и заняли положение, показанное на рисунке (рис. 5, б). Из рис. 5, а, б, получаем, что $\tilde{\theta} = \theta + \pi$. Так как в общем случае $\theta_1 \neq \theta_2$, то, учитывая выражения (32), (36) и (55), получим:

$$\gamma_1 = [2\tilde{\theta} - (\tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2) + \theta_2 - \theta_1] / 2, \quad \gamma_2 = [-(\theta_1 + \theta_2) + \tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_1] / 2.$$

Из рис. 5, а, получаем, что $\tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2 = 2(\pi + \gamma_0) = 2\tilde{\theta}$, $\tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_1 = \pi$. Тогда γ_1 и γ_2 после преобразований будут иметь вид:

$$\gamma_1 = (\theta_2 - \theta_1) / 2, \quad \gamma_2 = [\pi - (\theta_1 + \theta_2)] / 2. \quad (56)$$

Поскольку со временем $\gamma_1 \rightarrow \text{const}$, а $\gamma_2 \rightarrow 0$, то после того, как движение установится, углы θ_1 и θ_2 неравны между собой, так как $\theta_2 - \theta_1 = 2\Delta\phi = \text{const}$, но их сумма при этом $\theta_1 + \theta_2 = \pi$. Заметим, что при $\text{const} = 0$ основное

движение совпадает с невозмущенным движением, что соответствует параметру $\tilde{\theta}$. При изменении const имеет место согласованное вращение маятников в одну сторону относительно направления вектора неуравновешенности вокруг точки O (рис. 5, а), при этом маятники расположены один напротив другого. Поэтому, нулевой корень отвечает за переход от одного к другому основному установившемуся движению из однопараметрической семьи.

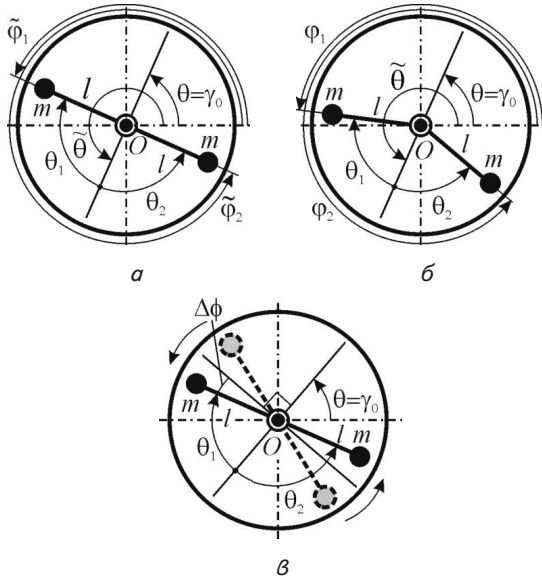


Рис. 5. Однопараметрическая семья основных движений: а – маятники на основном движении; б – отклонение маятников от основного движения; в – однопараметрическая семья основных движений

5. 5. 3. Случай когда $\tilde{e}_0 = 1$

В рассматриваемом случае система уравнений (39) имеет вид:

$$L_1 = [1 - R_m(1+q)]\gamma_1'' + h\gamma_1' + R_m\gamma_1 = 0, L_2 = \gamma_2'' + h\gamma_2' = 0. \quad (57)$$

Видно, что система уравнений (57) распадается на два независимых уравнения. В первое уравнение системы (57) входит переменная γ_1 , во второе – γ_2 . Характеристическое уравнение первого уравнения системы (57) имеет вид:

$$[1 - R_m(1+q)]v^2 + hv + R_m = 0. \quad (58)$$

Корни уравнения (58) имеют вид:

$$v_{1,2} = -\frac{1}{2[1 - R_m(1+q)]} \left[h \pm \sqrt{h^2 - 4R_m[1 - R_m(1+q)]} \right], \quad (59)$$

или в размерном виде

$$v_{1,2} = -\frac{M_\Sigma}{2[M_\Sigma - 2m(1+q)]} \times \left\{ \frac{H}{ml^2\omega_0} \pm \sqrt{\frac{H^2M_\Sigma^2 - 8m^3l^4\omega_0^2[M_\Sigma - 2m(1+q)]}{M_\Sigma^2m^2l^4\omega_0^2}} \right\}. \quad (60)$$

Анализируя корни (59), видно, что условие (43) имеет место, когда $R_m(1+q) < 1$. Переходные процессы,

как видно из корней (59) и (60), имеют аperiodический или колебательно-затухающий характер (в зависимости от параметров системы), причем имеет место асимптотическая устойчивость по γ_1 .

Характеристическое уравнение второго уравнения системы (57) имеет вид:

$$\kappa^2 + h\kappa = 0. \quad (61)$$

Корни уравнения (61) имеют вид:

$$\kappa_1 = -h, \kappa_2 = 0, \quad (62)$$

или в размерном виде

$$\kappa_1 = -H/(ml^2\omega_0), \kappa_2 = 0. \quad (63)$$

Поскольку $\gamma_1 \rightarrow 0, \gamma_2 \rightarrow const$, то со временем неуравновешенность полностью устраняется. Скорость стремления к нулю возмущения γ_1 полностью характеризуют действительные части корней (62) или (63).

Объясним детальнее появление нулевого корня κ_2 , рассмотрев переменные γ_1 и γ_2 . На основном движении маятники занимают положение, показанное на рис. 6, а. Пусть маятники отклонились от основного движения и заняли положение, показанное на рис. 6, б. Можно показать, что отклонение маятников от основного движения на величину до первого порядка малости включительно не влияет на устойчивость основного движения.

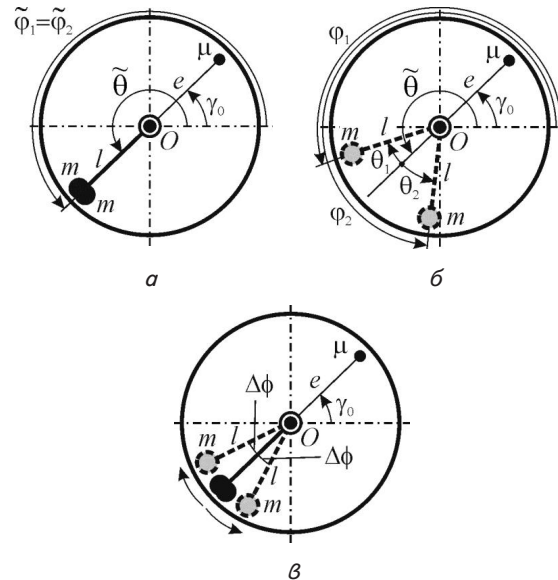


Рис. 6. Однопараметрическая псевдосемья основных движений: а – маятники на основном движении; б – отклонение маятников от основного движения; в – однопараметрическая псевдосемья основных движений

Из рис. 6, в, получаем, что величина изменения неуравновешенности относительно направления вектора неуравновешенности имеет вид:

$$s_\mu = \mu e^2 - 2ml \cos \Delta\phi \approx \mu e^2 - 2ml \left(1 - \frac{\Delta\phi^2}{2} \right). \quad (64)$$

Учитывая, что на основном движении в рассматриваемом случае $\mu e^2 = 2ml$, из (64) получаем, что

$s_\mu \approx m l \Delta\phi^2$. В связи с тем, что $\Delta\phi \ll 1$, получаем, что отклонения маятников от основного движения на величину с точностью до первого порядка малости включительно, не влияет на устойчивость основного движения. Поскольку со временем $\gamma_1 \rightarrow 0$, а $\gamma_2 \rightarrow \text{const}$, то после того, как движение установится, с учетом (56), получаем, что $\theta_2 \rightarrow \theta_1$, $\theta_1 + \theta_2 \rightarrow \text{const} = 2\Delta\phi$. В рассматриваемом случае на основном движении имеет место согласованное вращение маятников в разные стороны относительно направления вектора неуровновешенности вокруг точки О (рис. 6, в), причем данные движения можно рассматривать как семью псевдодвижений, а нулевой корень отвечает за переход от одного к другому установившемуся движению из однопараметрической псевдосемьи.

5. 6. Исследование условной устойчивости установившихся движений (основных и побочных)

Для исследования на условную устойчивость установившихся движений используем подход, основанный на теории условной устойчивости стационарных движений механических систем с первыми (в частности – циклическими) интегралами, предложенный в работах [29, 30].

Учитывая, что рассматриваемая ИС не содержит элементов, накапливающих потенциальную энергию, $\Pi = 0$. Тогда полная энергия системы примет вид

$$E = T = \frac{K_G^2}{2J_{z_G}}, \tag{65}$$

где K_G – постоянная величина равная модулю момента количества движения системы K_G , J_{z_G} – осевой момент инерции системы на стационарном движении. Для исследования на условную устойчивость установившихся движений, исследуем на условный экстремум осевой момент инерции системы \tilde{J}_{z_G} с использованием критерия Сильвестра. Согласно теоремам Румянцева-Сальвадори [31], на устойчивых изолированных стационарных движениях \tilde{J}_{z_G} принимает максимальное значение, а на неустойчивых не будет принимать даже неизолированного максимума.

5. 6. 1. Исследование условной устойчивости основных движений

Исследование на условный экстремум \tilde{J}_{z_G} , как функции ξ, η . Учитывая выражение (15), первые частные производные от \tilde{J}_{z_G} по ξ, η имеют вид:

$$\partial\tilde{J}_{z_G} / \partial\xi = -2\xi = 0, \quad \partial\tilde{J}_{z_G} / \partial\eta = -2\eta = 0. \tag{66}$$

Необходимое условие существования экстремума выполняется при $\xi, \eta = 0$. Заметим, что это соответствует основным движениям системы. Вторые частные производные от \tilde{J}_{z_G} по ξ, η имеют вид:

$$a_{11} = \frac{\partial^2\tilde{J}_{z_G}}{\partial\xi^2} = -2, \quad a_{22} = \frac{\partial^2\tilde{J}_{z_G}}{\partial\eta^2} = -2, \\ a_{12} = a_{21} = \frac{\partial^2\tilde{J}_{z_G}}{\partial\xi\partial\eta} = \frac{\partial^2\tilde{J}_{z_G}}{\partial\eta\partial\xi} = 0. \tag{67}$$

Введем в рассмотрение квадратную матрицу 2-го порядка А, составленную из элементов (67). Тогда ее главные диагональные миноры имеют вид:

$$\Delta_1 = a_{11}, \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{68}$$

Учитывая (67) и (68), получаем, что $\Delta_1 = -2 < 0$, $\Delta_2 = 4 > 0$. Тогда \tilde{J}_{z_G} принимает максимальное значение и основные движения устойчивы (при условии их существования).

Исследование на условный экстремум \tilde{J}_{z_G} , как функции φ_j . Учитывая выражение (16), вторые частные производные от \tilde{J}_{z_G} по φ_j имеют вид:

$$\frac{\partial^2\tilde{J}_{z_G}}{\partial\varphi_j^2} = a_{jj} = \tilde{e}_0 \cos\varphi_j + \frac{1}{2}\cos(\varphi_j - \varphi_i), \\ \frac{\partial^2\tilde{J}_{z_G}}{\partial\varphi_j\partial\varphi_i} = \frac{\partial^2\tilde{J}_{z_G}}{\partial\varphi_i\partial\varphi_j} = a_{ji} = -\cos(\varphi_j - \varphi_i) / 2, \\ /j, i = 1, 2, \quad j \neq i /. \tag{69}$$

На основном движении, когда $0 < \tilde{e}_0 < 1$, получим:

$$a_{11} = a_{22} = -1/2, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2} - \tilde{e}_0^2, \\ \Delta_1 = -1/2 < 0, \quad \Delta_2 = \tilde{e}_0^2(1 - \tilde{e}_0^2) > 0. \tag{70}$$

Учитывая (70), \tilde{J}_{z_G} принимает максимальное значение, поэтому основное движение устойчиво.

На основных движениях, когда $\tilde{e}_0 = 0$ или $\tilde{e}_0 = 1$, получим:

$$a_{11} = a_{22} = -1/2, \quad a_{12} = a_{21} = \pm 1/2, \\ \Delta_1 = -1/2 < 0, \quad \Delta_2 = 0. \tag{71}$$

В (71) знак “+” соответствует случаю, когда $\tilde{e}_0 = 0$, а знак “-” – когда $\tilde{e}_0 = 1$. Учитывая (71), критерий Сильвестра не дает ответа об устойчивости или неустойчивости рассматриваемого основного движения.

5. 6. 2. Исследование условной устойчивости побочных движений

Устойчивость побочных движений при $\tilde{e}_0 = 0$. Когда маятники отклонены по разные стороны от точки, создающей неуровновешенность ($\varphi_{1,2} = 0, \varphi_{2,1} = \pi$), получим:

$$a_{11} = \tilde{e}_0 - \frac{1}{2}, \quad a_{22} = -\left(\tilde{e}_0 + \frac{1}{2}\right), \quad a_{12} = a_{21} = \frac{1}{2}, \\ \Delta_1 = \tilde{e}_0 - \frac{1}{2}, \quad \Delta_2 = -\tilde{e}_0^2 < 0. \tag{72}$$

Учитывая (72), \tilde{J}_{z_G} не может принять максимальное значение, поэтому рассматриваемое побочное движение неустойчиво.

Когда маятники отклонены в сторону точки, создающей неуровновешенность ($\varphi_1 = \varphi_2 = 0$), получим:

$$a_{11} = a_{22} = \tilde{e}_0 + \frac{1}{2}, \quad a_{12} = a_{21} = -\frac{1}{2}, \\ \Delta_1 = \tilde{e}_0 + \frac{1}{2} > 0, \quad \Delta_2 = \tilde{e}_0(1 + \tilde{e}_0) > 0. \tag{73}$$

Учитывая (73), \tilde{J}_{z_c} принимает минимальное значение, поэтому рассматриваемое побочное движение неустойчиво.

Когда маятники отклонены в противоположную сторону от точки, создающей неуравновешенность ($\varphi_1 = \varphi_2 = \pi$), получим:

$$a_{11} = a_{22} = \frac{1}{2} - \tilde{e}_0, \quad a_{12} = a_{21} = -\frac{1}{2}. \tag{74}$$

Учитывая (74), \tilde{J}_{z_c} не может принять максимальное значение, поэтому рассматриваемое побочное движение неустойчиво.

Устойчивость побочных движений при $\tilde{e}_0 = 0$. Когда маятники отклонены в одну сторону ($\varphi_1 = \varphi_2$), получим:

$$a_{11} = a_{22} = 1/2, \quad a_{12} = a_{21} = -1/2, \quad \Delta_1 = 1/2 > 0, \quad \Delta_2 = 0. \tag{75}$$

Учитывая (75), \tilde{J}_{z_c} не может принять максимальное значение, поэтому рассматриваемое побочное движение неустойчиво.

6. Численный эксперимент

Исследуется влияние параметров системы на характер переходных процессов и на скорость прихода системы к основному движению. Параметры расчетных данных подобраны для КА стабилизи-

рованного вращением, корпус которого выполнен в форме прямого кругового цилиндра, а его масса и радиус боковой поверхности соответственно составляют $M=100$ кг, $R=0,5$ м. Для устранения неуравновешенности на КА установлен двухмаятниковый АБ, масса маятника которого составляет $m=0,6$ кг ($m/M=6 \cdot 10^{-3}$). Другие фиксированные параметры имеют значение: $H=0,025$ кг \times м²/с, $\mu=1,1$ кг, $l=0,5$ м, $e=0,45$ м. На рис. 7, а-е показаны переходные процессы во время прихода системы к основному движению.

Для случаев, когда:

а) $0 < \tilde{e}_0 < 1$ (рис. 7, а), $\tilde{e}_0 = 0$ (рис. 7, б), $\tilde{e}_0 = 1$ (рис. 7, д), при $\omega_0=0,524$ рад/с, характер переходных процессов – аperiodический;

б) $0 < \tilde{e}_0 < 1$ (рис. 7, б), $\tilde{e}_0 = 0$ (рис. 7, з), $\tilde{e}_0 = 1$ (рис. 7, е), при $\omega_0=5,24$ рад/с, характер переходных процессов – колебательно-затухающий.

Следует отметить, что с увеличением скорости вращения КА или ИСЗ, как видно из рис. 7, время прихода системы к основному движению значительно уменьшается. Это указывает на то, что использование пассивных АБ наиболее эффективно при больших угловых скоростях вращения КА или ИСЗ.

Аналогичный характер переходные процессы будут иметь при фиксированном значении угловой скорости и изменении значения коэффициента сил вязкого сопротивления. Так, при больших силах сопротивления переходные процессы будут аperiodическими, а при малых – колебательно-затухающими.

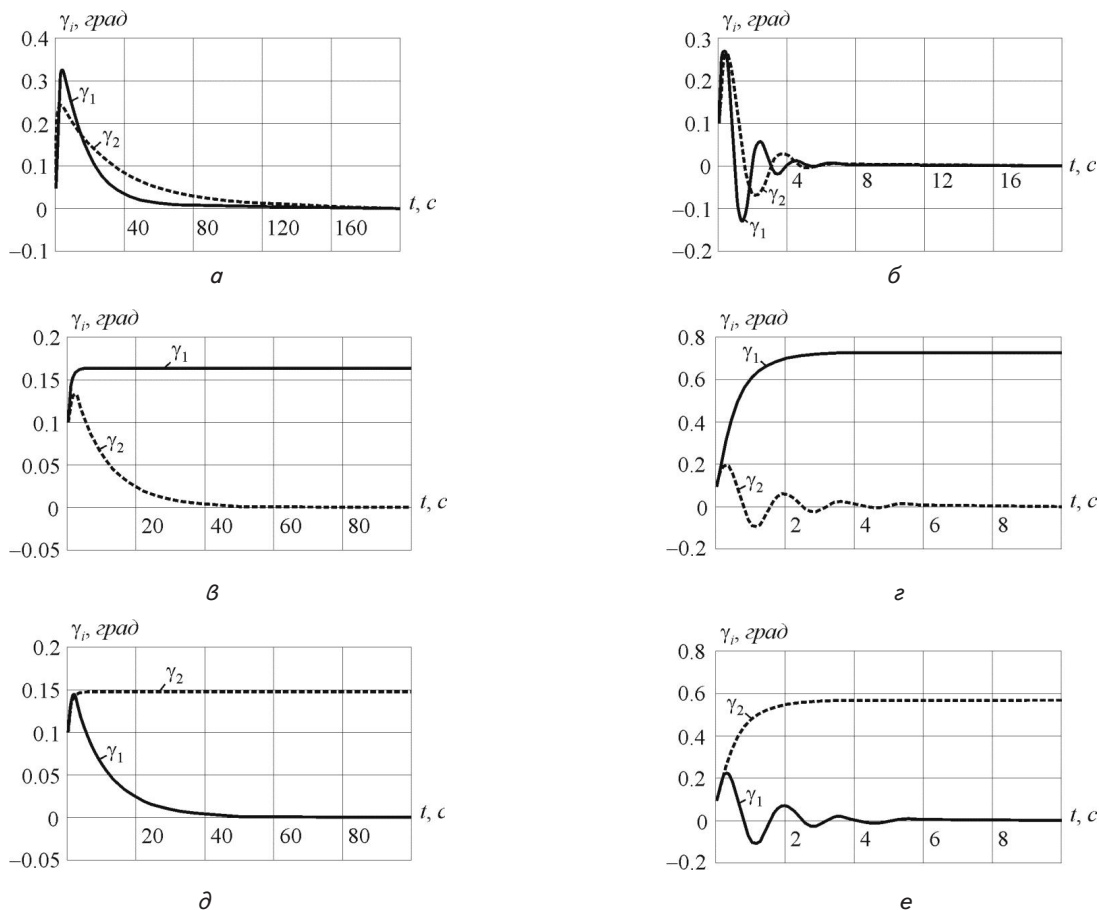


Рис. 7. Переходные процессы: а – при $0 < \tilde{e}_0 < 1$ и $\omega_0=0,524$ рад/с; б – при $0 < \tilde{e}_0 < 1$ и $\omega_0=5,24$ рад/с; в – при $\tilde{e}_0 = 0$ и $\omega_0=0,524$ рад/с; з – при $\tilde{e}_0 = 0$ и $\omega_0=5,24$ рад/с; д – при $\tilde{e}_0 = 1$ и $\omega_0=0,524$ рад/с; е – при $\tilde{e}_0 = 1$ и $\omega_0=5,24$ рад/с

7. Выводы

Таким образом, в рассматриваемой работе были получены следующие результаты:

– построена плоская модель ИС, состоящая из вращающегося статически неуравновешенного НТ и двух одинаковых математических маятников, насаженных на продольную ось НТ, и относительному движению которых препятствуют силы вязкого сопротивления;

– установлено, что условно асимптотически устойчивыми являются отдельные основные движения, если они изолированные, или семья, или псевдосемья основных движений, а побочные движения неустойчивы;

– переходные процессы в зависимости от параметров системы могут быть аperiodическими или колебательно-затухающими.

Литература

1. Артюхин, Ю. П. Системы управления космических аппаратов, стабилизированных вращением [Текст] / Ю. П. Артюхин, Л. И. Каргу, В. Л. Симаев. – М.: Наука, 1979. – 296 с.
2. Каргу, Л. И. Системы угловой стабилизации космических аппаратов [Текст] / Л. И. Каргу. – М.: Машиностроение, 1980. – 172 с.
3. Попов, В. И. Системы ориентации и стабилизации космических аппаратов [Текст] / В. И. Попов. – М.: Машиностроение, 1986. – 184 с.
4. Зинченко, О. Н. Малые оптические спутники ДЗЗ [Электронный ресурс] / О. Н. Зинченко // Ракурс, Москва, 2011. – Режим доступа: http://www.racurs.ru/www_download/articles/Micro_Satellites.pdf
5. Овчинников, М. Ю. Малые мира сего [Электронный ресурс] / М. Ю. Овчинников // Компютерра. – 2007. – № 15. – С. 37–43. – Режим доступа: <http://old.computerra.ru/2007/683/315829/>
6. Блинов, В. Н. Малые космические аппараты. В 3 кн. Кн. 3: Миниспутники. Унифицированные космические платформы для малых космических аппаратов: справочное пособие [Текст] / В. Н. Блинов, Н. Н. Иванов, Ю. Н. Сеченов, В. В. Шалай. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2010. – 348 с.
7. Малые космические аппараты информационного обеспечения [Текст] / под ред. В. Ф. Фатеева. – М.: Радиотехника, 2010. – 320 с.
8. Gidlund, S. Design Study for a Formation-Flying Nanosatellite Cluster [Electronic resource] / S. Gidlund // Lulea University of Technology, Department of Space Science, Kanada, 2005. – 128 p. – Available at: <http://epubl.ltu.se/1402-1617/2005/147/>
9. Small Spacecraft Technology State of the Art [Electronic resource]. – Mission Design Division Staff. – Ames Research Center, Moffett Field, California, 2014. – 200 p. – Available at: https://www.nasa.gov/sites/default/files/files/Small_Spacecraft_Technology_State_of_the_Art_2014.pdf
10. Макриденко, Л. А. Концептуальные вопросы создания и применения малых космических аппаратов [Текст] / Л. А. Макриденко, С. Н. Волков, В. П. Ходненко и др. // Вопросы электромеханики. Труды НПП ВНИИЭМ. – 2010. – Т. 114, № 1. – С. 15–26.
11. Гриценко, А. А. Использование стабилизированных вращением малых космических аппаратов в системах спутниковой связи на ГЕО и НЕО орбитах [Электронный ресурс] / А. А. Гриценко. – ЗАО Информационный Космический Центр “Северная Корона”. – 2001. – Режим доступа: http://www.spacecenter.ru/Resurses/IEEE_2001_2.doc
12. Fonseca, I. M. SACI-2 Attitude Control Subsystem [Text] / I. M. Fonseca, M. C. Santos // INPE. – 2002. – Vol. 3. – P. 197–209. – Available at: http://www2.dem.inpe.br/ijar/SACI_2BlockDiagram.pdf
13. Рейтер, Г. С. Вращательное движение пассивных космических аппаратов [Текст] / Г. С. Рейтер, У. Т. Томсон. – Проблемы ориентации искусственных спутников Земли. – М.: Наука, 1966. – С. 336–350.
14. Hubert, C. Surface Tension Lockup in the IMAGE Nutation Damper – Anomaly and Recovery [Electronic resource] / C. Hubert, D. Swanson. – NASA GSFC Flight Mechanics Symposium, 2001. – Available at: http://image.gsfc.nasa.gov/publication/document/2001_hubert_swanson.pdf
15. Alper, J. R. Analysis of pendulum damper for satellite wobble damping [Text] / J. R. Alper // Journal of Spacecraft and Rockets. – 1965. – Vol. 2, Issue 1. – P. 50–54. doi: 10.2514/3.28120
16. Cloutier, G. J. Nutation damper instability on spin-stabilized spacecraft [Text] / G. J. Cloutier // AIAA Journal. – 1969. – Vol. 7, Issue 11. – P. 2110–2115. doi: 10.2514/3.5565
17. Janssens, F. L. On the stability of spinning satellites [Text] / F. L. Janssens, J. C. Van der Ha // Acta Astronautica. – 2011. – Vol. 68, Issues 7–8. – P. 778–789. doi: 10.1016/j.actaastro.2010.08.008
18. Likins, P. W. Effects of energy dissipation on the free body motions of spacecraft [Text] / P. W. Likins. – JPL, Technical Report No 32.860, NASA, California Institute of Technology Pasadena, California, 1966. – 70 p. – Available at: <http://www.aoe.vt.edu/~cdhall/courses/aoe4065/NASADesignSPs/sp8016.pdf>
19. Пирогов, В. В. Стабилизация оси вращения тела в пространстве пассивными автобалансирующими устройствами [Текст]: тезисы докл. / В. В. Пирогов // Актуальные проблемы российской космонавтики: Труды XXX Академических чтений по космонавтике. – М.: Комиссия РАН по разработке научного наследия пионеров освоения космического пространства, 2006. – С. 96. – Режим доступа: <http://www.ihst.ru/~akm/30t5.pdf>
20. Филимонович, Г. Б. Использование пассивных автобалансирующих устройств как демпферов угла нутации быстровращающихся спутников [Текст]: сб. пр. / Г. Б. Филимонович, В. В. Пирогов, И. И. Филимонович // Системне проектування та аналіз характеристик аерокосмічної техніки. – 2008. – Т. VIII. – С. 105–115.

21. Филimoniхин, Г. Б. Дослідження процесу усунення пасивними автобалансирами великих кутів нутації [Текст] / Г. Б. Филimoniхин, В. В. Пирогов, И. И. Филimoniхина // Східно-Європейський журнал передових технологій. – 2013. – Т. 6, № 7(66). – С. 34–38. – Режим доступа: <http://journals.urau.ua/eejet/article/view/18705>
22. Filimonikhin, G. B. Stability of Steady-State Motion of an Isolated System Consisting of a Rotating Body and Two Pendulums [Text] / G. B. Filimonikhin, I. I. Filimonikhina, V. V. Pirogov // International Applied Mechanics. – 2014. – Vol. 50, Issue 4. – P. 459–469. doi: 10.1007/s10778-014-0651-9
23. Filimonikhin, G. B. Stabilization of the Rotation Axis of a Solid by Coupled Perfectly Rigid Bodies [Text] / G. B. Filimonikhin, V. V. Pirogov // International Applied Mechanics. – 2005. – Vol. 41, Issue 8. – P. 937–943. doi: 10.1007/s10778-005-0164-7
24. Kane, T. R. Spacecraft Dynamics [Text] / T. R. Kane, P. W. Likins, D. A. Levinson. – McGraw-Hill, New York, 1983. – 436 p.
25. Mirer, S. A. Optimal Parameters of a Spin-Stabilized Satellite with a Pendulum-Like Damper [Text] / S. A. Mirer, V. A. Sarychev // Cosmic Research. – 1997. – Vol. 35, Issue 6. – P. 609–615.
26. Томпсон Дж., М. Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике [Текст] / М. Т. Томпсон Дж.; пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 254 с.
27. Ольховский, И. И. Курс теоретической механики для физиков [Текст] / И. И. Ольховский. – М.: Наука, 1970. – 569 с.
28. Філімоніхін, Г. Б. Стабілізація маятниками положення осі обертання ізольованого абсолютно твердого тіла [Текст] / Г. Б. Філімоніхін // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2002. – Вип. 7-8. – С. 67–71.
29. Filimonikhin, G. B. Attitude stabilization of the rotational axis of a carrying body by pendulum dampers [Text] / G. B. Filimonikhin, V. V. Pirogov, I. I. Filimonikhina // International Applied Mechanics. – 2007. – Vol. 43, Issue 10. – P. 1167–1173. doi: 10.1007/s10778-007-0117-4
30. Filimonikhina, I. I. Conditions for balancing a rotating body in an isolated system with automatic balancers [Text] / I. I. Filimonikhina, G. B. Filimonikhin // International Applied Mechanics. – 2007. – Vol. 43, Issue 11. – P. 1276–1282. doi: 10.1007/s10778-007-0132-5
31. Нелинейная механика [Текст] / под ред. В. М. Матросова, В. В. Румянцева, А. В. Карапетяна. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 432 с.

Розглядається задача про розподіл радіальних та окружних напружень в стінці порожнистого циліндричного квазитвердого ядра вихрової трубки. Рішення базується на використанні двох інших відомих рівнянь з лінійної теорії пружності – задачі Ламе і задачі про напружений стан труби, що обертається. Наведено порівняння отриманих рівнянь з відомими рівняннями для суцільного вихору

Ключові слова: квазитверде ядро вихоря, розподіл напруги в стінці, вплив структури течії

Рассматривается точное решение задачи о распределении радиальных и окружных напряжений в стенке полого цилиндрического квазитвердого ядра вихровой трубки. Решение основано на использовании двух других известных уравнений из линейной теории упругости – задачи Ламе и задачи о напряженном состоянии вращающейся трубы. Приведено сравнение полученных уравнений с известными для сплошного вихря

Ключевые слова: квазитвердое ядро вихря, распределение напряжения в стенке, влияние структуры течения

УДК 531.3:532.5

DOI: 10.15587/1729-4061.2015.51081

АНАЛИЗ ВРАЩЕНИЯ НЕВЯЗКОЙ ВИХРОВОЙ ТРУБКИ

В. А. Бударин

Кандидат технических наук, доцент
Кафедра теоретической, общей
и нетрадиционной энергетики
Одесский национальный
политехнический университет
пр. Шевченко, 1, г. Одесса,
Украина, 65044
E-mail: vit-b@inbox.ru

1. Введение

Понятие вихровой трубки вводится в механику жидкости по аналогии с понятием трубки тока и описывается математически с помощью теорем Гельмгольца и теоремы Стокса для односвязной области вращения [1–3]. Течения такого типа широко представлены в природе от мелких пыльных вихрей до тропических ураганов. Большое распространение получили технические устройства с различными вращающимися рабочими телами, к числу которых можно отнести центробежные сепараторы различных видов, вихревые горелки, вихревые трубы и т. д. Существуют также не-

гативные последствия возникновения вихревых трубок, к числу которых можно отнести воронки вблизи всасывающих патрубков насосов и газовых турбин.

Важность вихревых течений в природе и технике потребовала разработки методов расчета для различных частных случаев. Однако современное математическое описание таких течений не нашло инженерной реализации и существует фактически отдельно от решения практических задач. Известно большое количество теоретических работ, призванных уменьшить существующий разрыв, однако в настоящее время инженерный расчет проводится по полуэмпирическим методикам, которые имеют ограниченную область