

В рамках механичної системи, яка здійснює просторовий рух і складена з обертового статично незрівноваженого несучого тіла та двох однакових математичних маятників, відносно руху яких перешкоджають сили в'язкого опору, досліджується умовна стійкість основних рухів. Встановлено, що основні рухи, в яких відбувається стабілізація положення осі обертання несучого тіла, умовно асимптотично стійкі

Ключові слова: несуче тіло, маятники, стійкість руху, космічний апарат, пасивний автобалансир, демпфер

В рамках механической системы, совершающей пространственное движение и состоящей из вращающегося статически неуравновешенного несущего тела и двух одинаковых математических маятников, относительно движению которых препятствуют силы вязкого сопротивления, исследуется условная устойчивость основных движений. Установлено, что основные движения, в которых наступает стабилизация положения оси вращения несущего тела, условно асимптотически устойчивы

Ключевые слова: несущее тело, маятники, устойчивость движения, космический аппарат, пассивный автобалансир, демпфер

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА СТАБИЛИЗАЦИИ ПОЛОЖЕНИЯ ОСИ ВРАЩЕНИЯ НЕСУЩЕГО ТЕЛА МАЯТНИКОВЫМ АВТОБАЛАНСИРОМ

В. В. Пирогов

Кандидат физико-математических наук, доцент
Кафедра деталей машин и прикладной механики
Кировоградский национальный
технический университет
пр. Университетский, 8,
г. Кировоград, Украина, 25030
E-mail: vladimir-pirogovvv@rambler.ru

1. Введение

Известно [1, 2], что для космических аппаратов (КА) стабилизированных вращением, возникает две основные технические задачи – это задача ориентации и стабилизации. Задача ориентации заключается в обеспечении необходимого положения оси вращения КА в пространстве, а задача стабилизации или устранения угла нутации – в совмещении продольной оси КА с осью вращения.

Отметим, что на подавляющем большинстве КА стабилизированных вращением используют пассивные способы ориентации и устранения угла нутации. Пассивный процесс устранения угла нутации быстротечный и происходит за несколько оборотов КА, а пассивный процесс ориентации (осуществляется за счет магнитного поля Земли, сил гравитации, солнечного ветра и т. д.) – долговременный и длится от нескольких часов до нескольких суток.

Известно также [1, 2], что угол нутации вызван двумя причинами:

- неточностью придания начального вращения КА;
- неуравновешенностью КА относительно его продольной оси.

Для уменьшения угла нутации, вызванного неточностью придания начального вращения КА, используют пассивные демпферы угла нутации [1–3], которые получили широкое распространение на ряде метеорологических, исследовательских и спутниках связи серии “Pioneer”, “Explorer”, “TIROS”, “TELSTAR”, “SYNKOM”, “ATC”, “ESSA”, “Meteosat”, “Gms”, “SCD”, “HESSI”, “MSG” и др.

В связи с вышесказанным, актуально построить теоретико-механическую модель, описывающую динамику вращающегося КА с присоединенными телами, и исследовать устойчивость установившихся движений, на которых наступает стабилизация положения оси вращения КА.

2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

Учитывая активное развитие микроэлектроники, технологий и материалов, в космической отрасли различных стран прослеживается тенденция к увеличению доли так называемых малых КА [4, 5], масса которых не превышает 1000 кг. Малые КА обладают рядом важных преимуществ [6–8] перед большими КА, а именно:

- сравнительно малыми сроками реализации проекта (не более 3–4 лет);
- меньшими расходами и рисками, связанными с разработкой, выводом на орбиту и их дальнейшей эксплуатацией;
- возможностью создания простых, надежных и универсальных платформ для решения различных научных и народнохозяйственных задач.

На дальнейшее активное применение и увеличение доли малых КА указывает и развитие так называемых «кластерных» космических систем связи, дистанционного зондирования космического пространства и Земли, на базе мини-, микро- и наноспутников [9–11]. Такие космические системы имеют повышенный охват

пространства, высокую оперативность и надежность системы в целом за счет формирования и поддержания орбитальной группировки.

Важно отметить, что степень реализации различных задач (например, раннего обнаружения изменений в природной среде, глобального контроля и прогнозирования состояния атмосферной и «космической» погоды, радиомониторинга и видеонаблюдения территорий и объектов, гравиметрии, геодезии, радиофизики и др.), проводимых в космическом пространстве с помощью малых КА, во многом зависит от технических и эксплуатационных характеристик систем стабилизации. Учитывая размеры и массу малых КА, к системам стабилизации предъявляются очень жесткие ограничения (небольшая масса и габаритные размеры, низкое потребление энергии, простота конструкции, надёжность и т. д.). В наибольшей степени таким требованиям удовлетворяют пассивные системы стабилизации [12, 13]. Несмотря на это, применение пассивных систем стабилизации довольно ограничено, ввиду их невысокой точности. Например, по данным работ [14–16], для различных КА стабилизируемых вращением с установленными на них пассивными демпферами угла нутации (маятниковыми, шаровыми, жидкостными), остаточный угол нутации достигал значений $0,5 \div 5$ градусов, и наблюдался даже через длительный промежуток времени.

Попытка объяснить возникновение таких «аномальных» остаточных углов нутации, для жидкостных демпферов угла нутации, была сделана в работах [15, 16]. Так, возникновение угла нутации объяснялось неуравновешенностью, образованной из-за большого поверхностного натяжения ртути. Поверхностные силы натяжения не могут собрать вместе всю ртуть, поэтому они ее собирают отдельными частями. Но учитывая то, что неуравновешенность от ртути не является максимально-возможной, такая модель не объясняет больших остаточных углов нутации, которые возникают при использовании, например, спиртовых демпферов угла нутации (известно, что спирт имеет небольшое поверхностное натяжение).

В работах [17, 18] исследовалась динамика вращающегося КА и маятникового демпфера угла нутации. В работах [19–23] исследовалась динамика вращающегося КА и демпфера угла нутации в виде массы на пружине, которая двигается или параллельно продольной оси КА, или в плоскости перпендикулярной к ней. Было показано, что демпферы угла нутации могут значительно влиять на движение КА, при этом устойчивыми могут быть движения, в которых КА вращается не вокруг продольной оси, а вокруг близкой к ней оси.

Отметим, что и ранние [16, 17, 19–22], и современные [14, 15, 18, 23] работы, посвященные исследованию динамики и устойчивости движений системы вращающийся КА-демпфер, имеют один общий существенный недостаток, который и сегодня не позволяет объяснить возникающие остаточные углы нутации. А именно, не учитывается тот факт, что пассивные демпферы угла нутации (маятниковые, шаровые и жидкостные) одновременно обладают свойствами пассивных автобаланси́ров (АБ). Все это приводит к необходимости исследования устойчивости установившихся движений систем, в которых тела, присоединённые к вращающемуся КА, проявляют свойства не только демпфера, но и АБ.

Для повышения точности и эффективности пассивных систем стабилизации, используемых на вращающихся КА, в [24, 25], вместо пассивных демпферов угла нутации предложено использовать пассивные классические (маятниковые, шаровые) и неклассические (в виде абсолютно твёрдых тел, определённым образом насаженных на продольную ось КА) АБ.

Исследования, посвящённые процессу устранения классическими пассивными АБ больших углов нутации, были проведены в работе [26]. Была установлена аналогия в работе различных типов АБ и демпферов угла нутации (маятниковых, шаровых и жидкостных). Кроме того, было установлено, что на скорость изменения угла нутации существенно влияет соотношение между осевыми моментами инерции КА и коэффициентом сил вязкого сопротивления.

В работе [27] был изучен процесс возникновения остаточного угла нутации. Было установлено, что неправильная установка на КА пассивного классического (двухшарового или двухмаятникового) АБ или демпфера угла нутации может привести к неустранимому остаточному углу нутации даже в случае «устойчивого» с большим запасом КА (когда поперечные осевые моменты инерции КА больше продольного).

В работах [28, 29] изучен процесс устранения неклассическим (в виде двух связанных одинаковых твёрдых тел, насаженных на продольную ось КА) и классическим (двухмаятниковым) АБ линейных отклонений продольной оси КА от оси вращения, вызванных неуравновешенностью КА относительно продольной оси. Было установлено, что движения, в которых продольная ось КА совпадает с его осью вращения, условно асимптотически устойчивы.

В работе [30] найдены условия работоспособности пассивных АБ на КА стабилизированных вращением, а также установлено, что установившиеся движения, в которых продольная ось КА не совпадает с его осью вращения, неустойчивы.

3. Цель и задачи исследования

Целью данной работы является исследование процесса устранения как линейных, так и угловых отклонений продольной оси КА от оси вращения классическими пассивными АБ (маятниковыми или шаровыми), для трёх важных с точки зрения практики случаев, а именно:

- когда неуравновешенность есть и АБ может ее устранить;
- когда неуравновешенность отсутствует;
- когда неуравновешенность максимальная, которую могут устранить АБ.

Для достижения поставленной цели решались следующие задачи:

- построить модель пространственного движения системы, состоящей из вращающегося КА с маятниковым (шаровым) пассивным АБ;
- исследовать устойчивость установившихся движений, в которых продольная ось КА совпадает с осью вращения;
- исследовать влияние параметров системы на скорость прихода системы к основному движению.

4. Особенности системы, состоящей из КА стабилизированного вращением и демпфера угла нутации или АБ

Система, состоящая из КА стабилизированного вращением и демпфера угла нутации или АБ, имеет следующие важные особенности [29]:

1) система рассматривается как изолированная (ИС), с вязким рассеиванием (диссипацией) энергии, состоящая из вращающегося несущего тела (НТ) и присоединенных к нему тел (ПТ);

2) относительным движениям ПТ препятствуют силы вязкого сопротивления (внутренние диссипативные силы);

3) так как система изолированная, то для нее имеют место законы сохранения движения центра масс (за центр масс и начало отсчета системы принимаем точку G)

$$r_G = 0 \tag{1}$$

и кинетического момента системы

$$K_G = \text{const}, \tag{2}$$

где в (1) и (2) r_G – радиус-вектор точки G, K_G – вектор кинетического момента ИС, найденный относительно ее центра масс;

4) у конкретных ИС, состоящих из НТ и ПТ, которые образуют пассивные АБ, существуют основные (рис. 1, а) и побочные (рис. 1, б) установившиеся движения [24] (на рис. 1, а, б, заштрихованной областью показано место установки пассивного АБ). На основных движениях, в которых наступает стабилизация положения оси вращения НТ, продольная ось НТ совпадает с его осью вращения, а на побочных – нет.

В рассматриваемой ИС, в которой ПТ образуют маятниковые или шаровые пассивные АБ, в отличие от известных, вместе с изолированными установившимися движениями могут появляться одно- или многопараметрические семьи установившихся движений. Поскольку на практике осуществляются только устойчивые движения, то исследование таких ИС сводится к выделению установившихся движений и исследованию их на условную устойчивость (при условии, что имеют место законы сохранения движения центра масс и кинетического момента системы). Исследование условной устойчивости установившихся движений удобно проводить относительно подвижных осей, в связи с чем условная устойчивость установившихся движений рассматривается для относительного положения равновесия ИС.

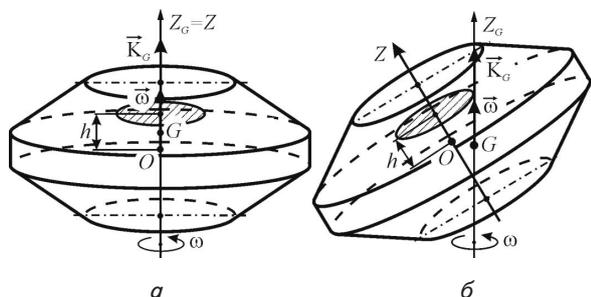


Рис. 1. Установившиеся движения изолированной системы в случае ее пространственного движения: а – основные; б – побочные

5. Исследование условной устойчивости основных движений изолированной системы, совершающей пространственное движение

5.1. Описание теоретико-механической модели изолированной системы

Общее описание модели. НТ имеет массу M, центр масс в точке O и осевые моменты инерции A, B, C относительно его главных центральных осей инерции X, Y, Z (рис. 2, а). Неуравновешенность НТ относительно оси Z создают k неподвижных относительно НТ материальных точек, расположенных в плоскостях $X_i D_i Y_i$, параллельных плоскости XOY (рис. 2, а). Положение плоскости $X_i D_i Y_i$ задаёт координата d_i , отсчитываемая по оси Z. Материальная точка имеет массу μ_i и её положение задаёт эксцентриситет e_i и угол $\gamma_i / i=1, k$ (рис. 2, б). На ось Z насажены n математических маятников длины l_j и массы m_j , расположенных в плоскостях $X_j O_j Y_j$, параллельных плоскости XOY (рис. 2, а, б). Положение плоскости $X_j O_j Y_j$ задаёт координата h_j , отсчитываемая по оси Z.

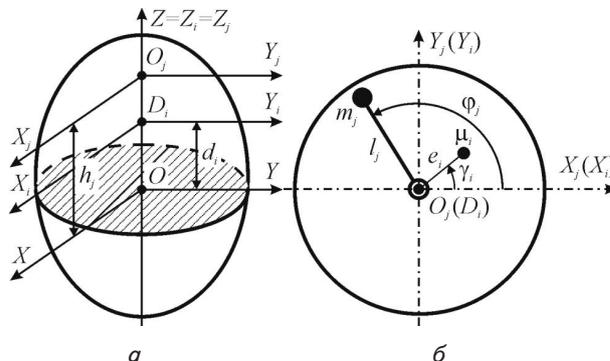


Рис. 2. Теоретико-механическая модель изолированной системы: а – несущее тело; б – плоскости расположения точек, создающих неуравновешенность или присоединенные тела, образующие пассивный АБ

Отметим, что вместо маятников можно рассматривать шары массой m_j , движущиеся по кольцевым дорожкам радиуса l_j , причем шары принимаются за материальные точки, или l_j – расстояние от оси Z_j до центра масс j-го шара и осевым моментом инерции шара относительно собственного центра масс пренебрегаем. В дальнейшем, для краткости, будем ссылаться лишь на маятники.

Описание движения маятников и НТ. Положение j-го маятника определяет угол поворота ϕ_j , отсчитываемый от оси X_j , параллельной оси X, причем ось X_j выходит из точки O_j , вокруг которой вращается маятник (рис. 2, б). При движении маятника относительно НТ, на него действует момент сил вязкого сопротивления $-H_{j1} l_j^2 \dot{\phi}_j$, где $H_{j1} l_j^2$ – коэффициент момента сил вязкого сопротивления, приведённый к плечу l_j .

Так как система изолированная, то для нее имеют место равенства (1) и (2). Введём неподвижные оси $G\xi\eta\zeta$, причём ось ζ направим вдоль вектора K_G (на рис. 2, 3 оси $G\xi\eta\zeta$ – не показаны). Оси OXYZ, жёстко связанные с НТ, описывают его движение относительно осей $G\xi\eta\zeta$ и определяют его текущее положение.

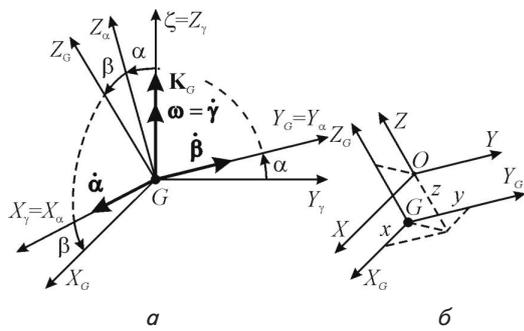


Рис. 3. Модель движения изолированной системы: а – поворот несущего тела; б – поступательное перемещение несущего тела

При первом повороте осей $G\xi\eta\zeta$ вокруг оси ζ на угол γ , соответствующем первому углу поворота Эйлера-Крылова, оси $G\xi\eta\zeta$ переходят в оси $GX_\gamma Y_\gamma Z_\gamma$, $Z_\gamma = \zeta$ (оси $G\xi\eta\zeta$ и первый поворот на рис. 3, а, не показаны). После второго поворота на угол α вокруг оси X_γ оси $GX_\gamma Y_\gamma Z_\gamma$ переходят в оси $GX_\alpha Y_\alpha Z_\alpha$, $X_\alpha = X_\gamma$. После третьего поворота на угол β вокруг оси Y_α , оси $GX_\alpha Y_\alpha Z_\alpha$ переходят в оси $GX_G Y_G Z_G$, $Y_\alpha = Y_G$, определяющие конечную угловую ориентацию НТ (рис. 3, а). Оси $GX_G Y_G Z_G$ переходят в оси $OXYZ$ после поступательных перемещений на x, y, z вдоль соответствующих координатных осей (рис. 3, б).

В соответствии с результатами работы [30], ниже рассмотрим случай статически неуравновешенного НТ. Статическую неуравновешенность создает неподвижная относительно НТ материальная точка, расположенная в плоскости $X_1O_1Y_1$. В этой же плоскости находится пара одинаковых маятников. Плоскость $X_1O_1Y_1$ находится на расстоянии h от плоскости $ХОУ$. Неуравновешенность и маятники характеризуют такие параметры: $\mu_i = \mu$, $e_i = e_0$, $\gamma_i = \gamma_0$, $m_j = m$, $l_j = l$, $d_j = h_j = h$, $i = 1, 2$.

Учитывая описание ИС, ее пространственное движение определяют восемь обобщенных координат: $\phi_1, \phi_2, \gamma, \alpha, \beta, x, y, z$. Заметим, что угол γ – циклическая координата.

5. 2. Массо-инерционные характеристики системы

Тензор инерции ИС относительно осей $OXYZ$ имеет вид:

$$J_O = \begin{pmatrix} J_x & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_y & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_z \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где

$$J_x = A + \mu(h^2 + e_0^2 \sin^2 \gamma_0) + m \left(2h^2 + l^2 \sum_{j=1}^2 \sin^2 \phi_j \right),$$

$$J_{xy} = \frac{1}{2} \left(\mu e_0^2 \sin 2\gamma_0 + ml^2 \sum_{j=1}^2 \sin 2\phi_j \right),$$

$$J_{xz} = h \left(\mu e_0 \cos \gamma_0 + ml \sum_{j=1}^2 \cos \phi_j \right),$$

$$J_y = B + \mu(h^2 + e_0^2 \cos^2 \gamma_0) + m \left(2h^2 + l^2 \sum_{j=1}^2 \cos^2 \phi_j \right),$$

$$J_{yz} = h \left(\mu e_0 \sin \gamma_0 + ml \sum_{j=1}^2 \sin \phi_j \right),$$

$$J_z = C + \mu e_0^2 + 2ml^2. \tag{4}$$

Тензор инерции ИС относительно осей $GX_G Y_G Z_G$ имеет вид:

$$J_G = J_O - M_\Sigma \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} J_{x_G} & -J_{x_G y_G} & -J_{x_G z_G} \\ -J_{x_G y_G} & J_{y_G} & -J_{y_G z_G} \\ -J_{x_G z_G} & -J_{y_G z_G} & J_{z_G} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $M_\Sigma = M + \mu + 2m$ – масса всей системы.

5. 3. Уравнения движения изолированной системы в размерном и безразмерном виде

Первая группа уравнений (вторые интегралы) получена с помощью закона сохранения движения центра масс системы:

$$M_\Sigma x + \mu e_0 \cos \gamma_0 + ml(\cos \phi_1 + \cos \phi_2) = 0,$$

$$M_\Sigma y + \mu e_0 \sin \gamma_0 + ml(\sin \phi_1 + \sin \phi_2) = 0,$$

$$M_\Sigma z + h(\mu + 2m) = 0. \tag{6}$$

Вторая группа уравнений (первые интегралы) получена с помощью закона сохранения кинетического момента относительно центра масс системы:

$$J_{x_G} \Omega_x - J_{x_G y_G} \Omega_y - J_{x_G z_G} \Omega_z - ml(z+h) \sum_{j=1}^2 \dot{\phi}_j \cos \phi_j =$$

$$= -K \cos \alpha \sin \beta,$$

$$-J_{x_G y_G} \Omega_x + J_{y_G} \Omega_y - J_{y_G z_G} \Omega_z - ml(z+h) \sum_{j=1}^2 \dot{\phi}_j \sin \phi_j = K \sin \alpha,$$

$$-J_{x_G z_G} \Omega_x - J_{y_G z_G} \Omega_y + J_{z_G} \Omega_z +$$

$$+ ml \sum_{j=1}^2 \phi_j (1 + x \cos \phi_j + y \sin \phi_j) = K \cos \alpha \cos \beta, \tag{7}$$

где

$$K = J_z \omega_0,$$

$$\Omega_x = \dot{\alpha} \cos \beta - \omega \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\Omega_y = \dot{\beta} + \omega \sin \alpha,$$

$$\Omega_z = \dot{\alpha} \sin \beta + \omega \cos \alpha \cos \beta. \tag{8}$$

Третья группа уравнений получена с помощью теоремы об изменении момента количества движения материальной точки:

$$\begin{aligned} & H\dot{\varphi}_j + ml[\dot{\varphi}_j] + \ddot{y} \cos \varphi_j - \ddot{x} \sin \varphi_j + \dot{\Omega}_z(1 + x \cos \varphi_j + y \sin \varphi_j) - \\ & -(z + h_1)(\dot{\Omega}_y \sin \varphi_j + \dot{\Omega}_x \cos \varphi_j) + 2\Omega_z(\dot{x} \cos \varphi_j + \dot{y} \sin \varphi_j) - \\ & -\Omega_x^2(y + l \sin \varphi_j) \cos \varphi_j + \Omega_y^2(x + l \cos \varphi_j) \sin \varphi_j - \\ & -\Omega_z^2(y \cos \varphi_j - x \sin \varphi_j) - \Omega_x \Omega_y(y \sin \varphi_j - x \cos \varphi_j) - \\ & -l \cos 2\varphi_j) - \Omega_z(z + h_1)(\Omega_x \sin \varphi_j - \Omega_y \cos \varphi_j) = 0, \\ & /j = \overline{1, 2} /. \end{aligned} \quad (9)$$

Из уравнений (6)–(9) видно, что в общем случае динамику системы характеризуют двенадцать размерных параметров:

$$M, \mu, m, e_0, \gamma_0, l, h, A, B, C, H, \omega_0.$$

Для выделения существенно различных параметров приведем уравнения (6), (7), (9) к безразмерному виду:

– вторые интегралы

$$\begin{aligned} \tilde{b}_1 &= \xi + R_m(2\tilde{e}_0 \cos \gamma_0 + \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) = 0, \\ \tilde{b}_2 &= \eta + R_m(2\tilde{e}_0 \sin \gamma_0 + \sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) = 0, \\ \tilde{b}_3 &= \zeta + 2R_m R_h \left(\frac{\tilde{e}_0}{R_e} + 1 \right) = 0; \end{aligned} \quad (10)$$

– первые интегралы

$$\begin{aligned} \tilde{b}_4 &= \tilde{J}_{x_G} \tilde{\Omega}_x - \tilde{J}_{x_G Y_G} \tilde{\Omega}_y - \tilde{J}_{x_G Z_G} \tilde{\Omega}_z - \\ & - R_m R_J (\zeta + R_h) \sum_{j=1}^2 \varphi'_j \cos \varphi_j + \cos \alpha \sin \beta = 0, \\ \tilde{b}_5 &= -\tilde{J}_{x_G Y_G} \tilde{\Omega}_x + \tilde{J}_{Y_G} \tilde{\Omega}_y - \tilde{J}_{Y_G Z_G} \tilde{\Omega}_z - \\ & - R_J R_m (\zeta + R_h) \sum_{j=1}^2 \varphi'_j \sin \varphi_j - \sin \alpha = 0, \\ \tilde{b}_6 &= -\tilde{J}_{x_G Z_G} \tilde{\Omega}_x - \tilde{J}_{Y_G Z_G} \tilde{\Omega}_y + \tilde{J}_{Z_G} \tilde{\Omega}_z + \\ & + R_m R_J \sum_{j=1}^2 \varphi'_j (1 + \xi \cos \varphi_j + \eta \sin \varphi_j) - \cos \alpha \cos \beta = 0; \end{aligned} \quad (11)$$

– уравнения движения маятников

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{j+6} &= \varphi''_j + \tilde{H} \varphi'_j + \eta'' \cos \varphi_j - \xi'' \sin \varphi_j + \\ & + \tilde{\Omega}'_z (1 + \xi \cos \varphi_j + \eta \sin \varphi_j) - (\zeta + R_h) \times \\ & \times (\tilde{\Omega}'_y \sin \varphi_j + \tilde{\Omega}'_x \cos \varphi_j) + 2\tilde{\Omega}'_z (\xi' \cos \varphi_j + \eta' \sin \varphi_j) - \\ & - \tilde{\Omega}_x^2 (\eta + \sin \varphi_j) \cos \varphi_j + \tilde{\Omega}_y^2 (\xi + \cos \varphi_j) \sin \varphi_j - \\ & - \tilde{\Omega}_x^2 (\eta + \sin \varphi_j) \cos \varphi_j + \tilde{\Omega}_y^2 (\xi + \cos \varphi_j) \sin \varphi_j - \\ & - \tilde{\Omega}_z^2 (\eta \cos \varphi_j - \xi \sin \varphi_j) - \tilde{\Omega}_x \tilde{\Omega}_y (\eta \sin \varphi_j - \xi \cos \varphi_j) - \\ & - \cos 2\varphi_j) - \tilde{\Omega}_z (\zeta + R_h) \times \\ & \times (\tilde{\Omega}_x \sin \varphi_j - \tilde{\Omega}_y \cos \varphi_j) = 0, /j = \overline{1, 2} /. \end{aligned} \quad (12)$$

B (11)

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{x_G} &= \tilde{J}_x + R_m R_J \sum_{j=1}^2 \sin^2 \varphi_j - R_J (\eta^2 + \zeta^2), \\ \tilde{J}_{y_G} &= \tilde{J}_y + R_m R_J \sum_{j=1}^2 \cos^2 \varphi_j - R_J (\xi^2 + \zeta^2), \\ \tilde{J}_{z_G} &= 1 - R_J (\xi^2 + \eta^2), \\ \tilde{J}_{x_G Y_G} &= \left[\frac{R_m}{2} \left(2R_e \tilde{e}_0 \sin 2\gamma_0 + \sum_{j=1}^2 \sin 2\varphi_j \right) - \xi \eta \right] R_J, \\ \tilde{J}_{x_G Z_G} &= \left[R_m R_h \left(2\tilde{e}_0 \cos \gamma_0 + \sum_{j=1}^2 \cos \varphi_j \right) - \xi \zeta \right] R_J, \\ \tilde{J}_{y_G Z_G} &= \left[R_m R_h \left(2\tilde{e}_0 \sin \gamma_0 + \sum_{j=1}^2 \sin \varphi_j \right) - \eta \zeta \right] R_J, \end{aligned} \quad (13)$$

– безразмерные осевые и центробежные моменты инерции системы, найденные относительно центральных осей X_G, Y_G, Z_G .

В (10)–(13) введены следующие безразмерные:

– переменные и время

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{l}, \quad \zeta = \frac{z}{l}, \\ R_\omega &= \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \left(\frac{d \cdot}{dt} = \omega_0 \frac{d \cdot}{d\tau} \right); \end{aligned} \quad (14)$$

– параметры

$$\begin{aligned} \tilde{J}_x &= \frac{A + \mu(h^2 + e_0^2 \sin^2 \gamma_0) + 2mh^2}{J_z}, \\ \tilde{J}_y &= \frac{B + \mu(h^2 + e_0^2 \cos^2 \gamma_0) + 2mh^2}{J_z}, \\ \tilde{H} &= \frac{H}{ml^2 \omega_0}, \quad R_m = \frac{m}{M_\Sigma}, \quad R_J = \frac{M_\Sigma l^2}{J_z}, \\ R_h &= \frac{h}{l}, \quad R_e = \frac{e_0}{l}, \quad \tilde{e}_0 = \frac{\mu e_0}{2ml}. \end{aligned} \quad (15)$$

В уравнениях (7)–(9), (11), (12) штрих обозначает дифференцирование по безразмерному времени τ , а точка – по времени t .

Из третьего уравнения системы (10) получаем, что

$$\zeta = -2R_m R_h (R_e + \tilde{e}_0) / R_e = \text{const}. \quad (16)$$

Введем новый безразмерный параметр

$$\zeta_h = \zeta + R_h = \text{const}. \quad (17)$$

В связи с тем, что уравнение \tilde{b}_3 – отдельное алгебраическое уравнение, то координата ζ , равно как и координата ζ_h , на устойчивость установившихся движений влиять не будет. Поэтому в дальнейшем уравнение \tilde{b}_3 использовать не будем.

5. 4. Анализ основных установившихся движений

На любом установившемся движении безразмерные координаты $\varphi_1, \varphi_2, \alpha, \beta, \xi, \eta, \zeta$ и угловая скорость R_ω – постоянны. Тогда уравнения установившихся движений получаем из уравнений (10)–(12), полагая все производные от указанных координат и угловой скорости равными нулю:

$$\begin{aligned} \tilde{b}_1 &= \xi + R_m(2\tilde{e}_0 \cos \gamma_0 + \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) = 0, \\ \tilde{b}_2 &= \eta + R_m(2\tilde{e}_0 \sin \gamma_0 + \sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) = 0; \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \tilde{b}_4 &= \tilde{J}_{x_G} \tilde{\Omega}_x - \tilde{J}_{x_G y_G} \tilde{\Omega}_y - \tilde{J}_{x_G z_G} \tilde{\Omega}_z + \cos \alpha \sin \beta = 0, \\ b_5 &= -\tilde{J}_{x_G y_G} \tilde{\Omega}_x + \tilde{J}_{y_G} \tilde{\Omega}_y - \tilde{J}_{y_G z_G} \tilde{\Omega}_z - \sin \alpha = 0, \\ \tilde{b}_6 &= -\tilde{J}_{x_G z_G} \tilde{\Omega}_x - \tilde{J}_{y_G z_G} \tilde{\Omega}_y + \tilde{J}_z \tilde{\Omega}_z - \cos \alpha \cos \beta = 0; \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{j+6} &= -\tilde{\Omega}_x^2 (\eta + \sin \varphi_j) \cos \varphi_j + \tilde{\Omega}_y^2 (\xi + \cos \varphi_j) \sin \varphi_j - \\ &- \tilde{\Omega}_z^2 (\eta \cos \varphi_j - \xi \sin \varphi_j) - \\ &- \tilde{\Omega}_x \tilde{\Omega}_y (\eta \sin \varphi_j - \xi \cos \varphi_j - \cos 2\varphi_j) - \\ &- \tilde{\Omega}_z (\zeta + R_h) (\tilde{\Omega}_x \sin \varphi_j - \tilde{\Omega}_y \cos \varphi_j) = 0, \quad / j=1,2 /; \end{aligned} \tag{20}$$

где в (19), (20) на установившемся движении

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_x &= -R_\omega \cos \alpha \sin \beta, \\ \tilde{\Omega}_y &= R_\omega \sin \alpha, \\ \tilde{\Omega}_z &= R_\omega \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned} \tag{21}$$

В дальнейшем будем рассматривать только основные движения, так как для устранения неуравновешенности НТ маятниками необходимо, чтобы из всех установившихся движений устойчивыми были только они.

На основном установившемся движении маятники устранили неуравновешенность и система вращается вокруг продольной оси НТ, тогда:

$$\xi = 0, \eta = 0, \alpha = 0, \beta = 0, \zeta, \tilde{R}_\omega, \tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 = \text{const.} \tag{22}$$

Подставляя (22) в равенства (21), найдем:

$$\tilde{\Omega}_x = 0, \tilde{\Omega}_y = 0, \tilde{\Omega}_z = \tilde{R}_\omega. \tag{23}$$

Подставляя (22) и (23) в уравнения (18)–(20), найдем:

$$\begin{aligned} \tilde{b}_1 &= 2\tilde{e}_0 \cos \gamma_0 + \cos \tilde{\varphi}_1 + \cos \tilde{\varphi}_2 = 0, \\ \tilde{b}_2 &= 2\tilde{e}_0 \sin \gamma_0 + \sin \tilde{\varphi}_1 + \sin \tilde{\varphi}_2 = 0, \\ \tilde{b}_4 &= -\tilde{J}_{x_G z_G} \tilde{R}_\omega = 0, \tilde{b}_5 = -\tilde{J}_{y_G z_G} \tilde{R}_\omega = 0, \\ \tilde{b}_6 &= \tilde{R}_\omega - 1 = 0, \tilde{b}_7, \tilde{b}_8 \equiv 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Из уравнения \tilde{b}_6 системы (24) получаем, что на основных движениях $\tilde{R}_\omega = 1$. Из уравнений \tilde{b}_4, \tilde{b}_5 находим, что $\tilde{J}_{x_G z_G}, \tilde{J}_{y_G z_G} = 0$. Но эти два равенства выполняются на основных движениях автоматически, если равны нулю первые два уравнения системы (24).

Решение уравнений \tilde{b}_1 и \tilde{b}_2 системы (24) имеет вид:

$$\cos \varphi_0 = -\tilde{e}_0. \tag{25}$$

Рассмотрим следующие случаи.

1. $0 < \tilde{e}_0 < 1$ (рис. 4, а). Решение первых двух уравнений системы (24) имеет вид:

$$\tilde{\varphi}_1 = \varphi_0 + \gamma_0, \tilde{\varphi}_2 = -\varphi_0 + \gamma_0, \gamma_0 \in [0, 2\pi), \tag{26}$$

где

$$\varphi_0 = \pi - \arccos \tilde{e}_0, \varphi_0 \in (\pi/2, \pi). \tag{27}$$

2. $\tilde{e}_0 = 0$. Параметр γ_0 (направление вектора неуравновешенности) теряет смысл. Поэтому, вместо него введем некоторый параметр θ , определяющий одно конкретное движение из однопараметрической семьи основных движений, образуемой при этом (рис. 4, б). Из (25) получаем, что $\cos \varphi_0 = 0$, откуда $\varphi_0 = \pi/2$, тогда решение первых двух уравнений системы (24) имеет вид:

$$\tilde{\varphi}_1 = \frac{\pi}{2} + \theta, \tilde{\varphi}_2 = -\frac{\pi}{2} + \theta, \theta \in [0, \pi). \tag{28}$$

3. $\tilde{e}_0 = 1$ (рис. 4, в). Из (25) получаем, что $\cos \varphi_0 = -1$, откуда $\varphi = \pi$. Тогда решение первых двух уравнений системы (24) имеет вид:

$$\tilde{\varphi}_1 = \pi + \gamma_0, \tilde{\varphi}_2 = -\pi + \gamma_0, \forall \gamma_0 \in [0, 2\pi). \tag{29}$$

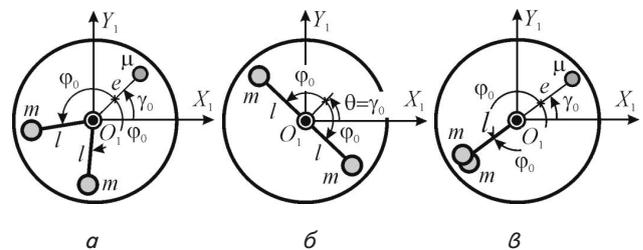


Рис. 4. Основные установившиеся движения: а – случай $0 < \tilde{e}_0 < 1$; б – случай $\tilde{e}_0 = 0$; в – случай $\tilde{e}_0 = 1$

5. 5. Тензор инерции системы на основном движении

На основном движении $x = y = 0, J_{x_G z_G} = 0, J_{y_G z_G} = 0$, и безразмерный тензор инерции системы относительно осей $G X_G Y_G Z_G$ имеет вид:

$$\hat{J}_G = \begin{pmatrix} \hat{J}_{x_G} & -\hat{J}_{x_G y_G} & 0 \\ -\hat{J}_{x_G y_G} & \hat{J}_{y_G} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{J}_{z_G} \end{pmatrix}. \tag{30}$$

В (30) осевые и центробежные моменты инерции системы имеют вид:

$$\begin{aligned} \hat{J}_{x_G} &= A + \mu(h^2 + e_0^2 \sin^2 \gamma_0) + m \left(2h^2 + l^2 \sum_{j=1}^2 \sin^2 \varphi_j \right) - M_x z^2, \\ \hat{J}_{x_G y_G} &= \frac{1}{2} \left(\mu e_0^2 \sin 2\gamma_0 + ml^2 \sum_{j=1}^2 \sin 2\varphi_j \right), \\ \hat{J}_{y_G} &= B + \mu(h^2 + e_0^2 \cos^2 \gamma_0) + m \left(2h^2 + l^2 \sum_{j=1}^2 \cos^2 \varphi_j \right) - M_y z^2, \\ \hat{J}_{z_G} &= C + \mu e_0^2 + 2ml^2. \end{aligned} \tag{31}$$

Подставив (26) в (31), получим:

$$\begin{aligned}\hat{J}_{x_G} &= A + \mu(h^2 + e_0^2 \sin^2 \gamma_0) + 2m(h^2 + l^2 f) - M_{\Sigma} z^2, \\ \hat{J}_{y_G} &= B + \mu(h^2 + e_0^2 \cos^2 \gamma_0) + 2m[h^2 + l^2(1-f)] - M_{\Sigma} z^2, \\ \hat{J}_{z_G} &= C_G = C + \mu e_0^2 + 2ml^2, \\ \hat{J}_{x_G y_G} &= (\mu e_0^2 + 2ml^2 \cos 2\varphi_0) \sin 2\gamma_0 / 2,\end{aligned}\quad (32)$$

где

$$f = (\cos^2 \varphi_0 - \cos 2\varphi_0 \cos^2 \gamma_0) = \tilde{e}_0^2 \sin^2 \gamma_0 + (1 - \tilde{e}_0^2) \cos^2 \gamma_0. \quad (33)$$

Важно отметить, что параметр f в зависимости от величины и направления неуравновешенности изменяется в пределах $0 \leq f \leq 1$.

Заметим, что главные центральные осевые моменты инерции системы – A_G, B_G, C_G можно найти, решив задачу о нахождении главных осевых моментов инерции центрального тензора инерции:

$$\begin{aligned}\det|\hat{J}_G - \lambda E| &= \begin{vmatrix} \hat{J}_{x_G} - \lambda & -\hat{J}_{x_G y_G} & 0 \\ -\hat{J}_{x_G y_G} & \hat{J}_{y_G} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \hat{J}_{z_G} - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= [(\hat{J}_{x_G} - \lambda)(\hat{J}_{y_G} - \lambda) - \hat{J}_{x_G y_G}^2](\hat{J}_{z_G} - \lambda) = 0.\end{aligned}\quad (34)$$

Решением уравнения (34) будут главные центральные осевые моменты инерции системы:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{\hat{J}_{x_G} + \hat{J}_{y_G}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\hat{J}_{x_G} - \hat{J}_{y_G})^2 + 4\hat{J}_{x_G y_G}^2} = A_G, \\ \lambda_2 &= \frac{\hat{J}_{x_G} + \hat{J}_{y_G}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\hat{J}_{x_G} - \hat{J}_{y_G})^2 + 4\hat{J}_{x_G y_G}^2} = B_G, \\ \lambda_3 &= \hat{J}_{z_G} = C_G.\end{aligned}\quad (35)$$

5. 6. Исследование условной устойчивости основных движений первым методом Ляпунова

5. 6. 1. Случай когда $0 < \tilde{e}_0 < 1$

Линеаризация уравнений движения и введение новых переменных

Введем в рассмотрение возмущенное движение:

$$\begin{aligned}\xi &= u, \quad \eta = v, \quad \alpha = \alpha, \quad \beta = \beta, \quad R_{\omega} = 1 + p, \\ \varphi_1 &= \tilde{\varphi}_1 + \alpha_1 = \varphi_0 + \gamma_0 + \alpha_1, \\ \varphi_2 &= \tilde{\varphi}_2 + \alpha_2 = -\varphi_0 + \gamma_0 + \alpha_2,\end{aligned}\quad (36)$$

где $u, v, \alpha, \beta, p, \alpha_1, \alpha_2$ – отклонения от невозмущенного движения ($|u|, |v|, |\alpha|, |\beta|, |p|, |\alpha_1|, |\alpha_2| \ll 1$).

Введем новые переменные:

$$\gamma_1 = (\alpha_1 + \alpha_2) / 2, \quad \gamma_2 = (\alpha_1 - \alpha_2) / 2. \quad (37)$$

С учетом (36), (37), осевые и центробежные моменты инерции будут иметь вид:

$$\tilde{J}_{x_G} \approx \tilde{J}_{x_G}^{(0)} + \tilde{J}_{x_G}^{(1)}, \quad \tilde{J}_{y_G} \approx \tilde{J}_{y_G}^{(0)} + \tilde{J}_{y_G}^{(1)}, \quad \tilde{J}_{z_G} = \tilde{J}_{z_G}^{(0)},$$

$$\tilde{J}_{x_G y_G} \approx \tilde{J}_{x_G y_G}^{(0)} + \tilde{J}_{x_G y_G}^{(1)}, \quad \tilde{J}_{x_G z_G} \approx \tilde{J}_{x_G z_G}^{(1)}, \quad \tilde{J}_{y_G z_G} \approx \tilde{J}_{y_G z_G}^{(1)}, \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{J}_{x_G}^{(0)} &= \tilde{J}_x + 2R_m R_J f - R_J \zeta^2, \quad \tilde{J}_{y_G}^{(0)} = \tilde{J}_y + 2R_m R_J (1-f) - R_J \zeta^2, \\ J^{(0)} &= 1, \quad \tilde{J}_{x_G y_G}^{(0)} = R_m R_J \sin 2\gamma_0 (R_e \tilde{e}_0 + \cos 2\varphi_0), \\ \tilde{J}_{x_G}^{(1)} &= 2R_m R_J (\gamma_1 \sin 2\gamma_0 \cos 2\varphi_0 + \gamma_2 \cos 2\gamma_0 \sin 2\varphi_0), \\ \tilde{J}_{y_G}^{(1)} &= -\tilde{J}_{x_G}^{(1)}, \\ \tilde{J}_{x_G z_G}^{(1)} &= 2R_m R_J (\gamma_1 \cos 2\varphi_0 \cos 2\gamma_0 - \gamma_2 \sin 2\varphi_0 \sin 2\gamma_0), \\ \tilde{J}_{x_G z_G}^{(1)} &= -[2R_m R_h (\gamma_2 \sin \varphi_0 \cos \gamma_0 + \gamma_1 \cos \varphi_0 \sin \gamma_0) + u \zeta] R_J, \\ \tilde{J}_{y_G z_G}^{(1)} &= [2R_m R_h (\gamma_1 \cos \varphi_0 \cos \gamma_0 - \gamma_2 \sin \varphi_0 \sin \gamma_0) - v \zeta] R_J.\end{aligned}\quad (39)$$

Линеаризованные уравнения движения системы в новых переменных γ_1 и γ_2 имеют вид:

– вторые интегралы

$$\begin{aligned}\tilde{b}_1 &= u - 2R_m (\gamma_2 \sin \varphi_0 \cos \gamma_0 + \gamma_1 \cos \varphi_0 \sin \gamma_0) = 0, \\ \tilde{b}_2 &= v + 2R_m (\gamma_1 \cos \varphi_0 \cos \gamma_0 - \gamma_2 \sin \varphi_0 \sin \gamma_0) = 0;\end{aligned}\quad (40)$$

– первые интегралы

$$\begin{aligned}\tilde{b}_4 &= \tilde{J}_A (\alpha' - \beta) - R_m \tilde{J}_{AB} (\beta' + \alpha) + \beta + \\ &+ R_J [u \zeta + 2R_m R_h (\gamma_2 \sin \varphi_0 \cos \gamma_0 + \gamma_1 \cos \varphi_0 \sin \gamma_0)] - \\ &- 2R_m R_J \zeta_h (\gamma_1' \cos \varphi_0 \cos \gamma_0 - \gamma_2' \sin \varphi_0 \sin \gamma_0) = 0, \\ \tilde{b}_5 &= -R_m \tilde{J}_{AB} (\alpha' - \beta) + \tilde{J}_B (\beta' + \alpha) - \alpha + \\ &+ R_J [v \zeta - 2R_m R_h (\gamma_1 \cos \varphi_0 \cos \gamma_0 - \gamma_2 \sin \varphi_0 \sin \gamma_0)] - \\ &- 2R_m R_J \zeta_h (\gamma_2' \sin \varphi_0 \cos \gamma_0 + \gamma_1' \cos \varphi_0 \sin \gamma_0) = 0, \\ \tilde{b}_6 &= p + 2R_m R_J \gamma_1' = 0;\end{aligned}\quad (41)$$

– уравнение движения маятников

$$\begin{aligned}L_1 &= \frac{\tilde{b}_7 + \tilde{b}_8}{2} = \gamma_1'' + \tilde{H} \gamma_1' + p' - \\ &- \zeta_h \cos \varphi_0 [(\alpha'' - 2\beta' - \alpha) \cos \gamma_0 + (\beta'' + 2\alpha' - \beta) \sin \gamma_0] - \\ &- \cos \varphi_0 [(u'' - 2v' - u) \sin \gamma_0 - (v'' + 2u' - v) \cos \gamma_0] = 0, \\ L_2 &= \frac{\tilde{b}_7 - \tilde{b}_8}{2} = \gamma_2'' + \tilde{H} \gamma_2' + \\ &+ \zeta_h \sin \varphi_0 [(\alpha'' - 2\beta' - \alpha) \sin \gamma_0 - (\beta'' + 2\alpha' - \beta) \cos \gamma_0] - \\ &- \sin \varphi_0 [(u'' - 2v' - u) \cos \gamma_0 + (v'' + 2u' - v) \sin \gamma_0] = 0.\end{aligned}\quad (42)$$

В (41) введены новые безразмерные параметры

$$\begin{aligned}\tilde{J}_A &= \tilde{J}_{x_G}^{(0)}, \quad \tilde{J}_B = \tilde{J}_{y_G}^{(0)}, \quad \tilde{J}_{AB} = \tilde{J}_{x_G y_G}^{(0)} / R_m = \\ &= R_J \sin 2\gamma_0 (R_e \tilde{e}_0 + \cos 2\varphi_0).\end{aligned}\quad (43)$$

После исключения части переменных u, v, p , уравнения первого приближения в новых переменных γ_1 и γ_2 принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\tilde{b}_4 &= \tilde{J}_A \alpha' - R_m \tilde{J}_{AB} \alpha - R_m \tilde{J}_{AB} \beta' + \\ &+ (1 - \tilde{J}_A) \beta - 2R_m R_J \zeta_h [(\gamma_1' \cos \gamma_0 - \gamma_1 \sin \gamma_0) \cos \varphi_0 - \\ &- (\gamma_2' \sin \gamma_0 + \gamma_2 \cos \gamma_0) \sin \varphi_0] = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{b}_5 &= -R_m \tilde{J}_{AB} \alpha' - (1 - \tilde{J}_B) \alpha + \tilde{J}_B \beta' + R_m \tilde{J}_{AB} \beta - \\ &- 2R_J R_m \zeta_h [(\gamma_1' \sin \gamma_0 + \gamma_1 \cos \gamma_0) \cos \varphi_0 + \\ &+ (\gamma_2' \cos \gamma_0 - \gamma_2 \sin \gamma_0) \sin \varphi_0] = 0, \\ L_1 &= -\zeta_h \cos \varphi_0 (\alpha'' \cos \gamma_0 + 2\alpha' \sin \gamma_0 - \alpha \cos \gamma_0 + \\ &+ \beta'' \sin \gamma_0 - 2\beta' \cos \gamma_0 - \beta \sin \gamma_0) + \\ &+ (1 - 2R_m R_J - 2R_m \cos^2 \varphi_0) \gamma_1'' + \tilde{H} \gamma_1' + \\ &+ 2R_m \cos^2 \varphi_0 \gamma_1 + 2R_m \sin 2\varphi_0 \gamma_2 = 0, \\ L_2 &= \zeta_h \sin \varphi_0 (\alpha'' \sin \gamma_0 - \\ &- 2\alpha' \cos \gamma_0 - \alpha \sin \gamma_0 - \beta'' \cos \gamma_0 - \\ &- 2\beta' \sin \gamma_0 + \beta \cos \gamma_0) - 2R_m \sin 2\varphi_0 \gamma_1' + \\ &+ (1 - 2R_m \sin^2 \varphi_0) \gamma_2'' + \tilde{H} \gamma_2' + 2R_m \sin^2 \varphi_0 \gamma_2 = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Характеристическое уравнение и необходимые условия устойчивости

Характеристическое уравнение системы (44) имеет вид:

$$\Delta(\lambda) = |a_{ij}|_4^4 = a_6 \lambda^6 + a_5 \lambda^5 + a_4 \lambda^4 + a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0, \quad (45)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= a_0^{(2)} R_m^2 + a_0^{(4)} R_m^4, \quad a_1 = a_1^{(1)} R_m + a_1^{(2)} R_m^2 + a_1^{(3)} R_m^3, \\ a_i &= a_i^{(0)} + a_i^{(1)} R_m + a_i^{(2)} R_m^2 + a_i^{(3)} R_m^3 + a_i^{(4)} R_m^4, \\ a_j &= a_j^{(0)} + a_j^{(1)} R_m + a_j^{(2)} R_m^2 + a_j^{(3)} R_m^3, \quad / i = 2, 4, 6; j = 3, 5 / , \end{aligned} \quad (46)$$

и коэффициенты:

– при R_m^0

$$\begin{aligned} a_6^{(0)} &= \tilde{J}_A \tilde{J}_B, \quad a_5^{(0)} = 2\tilde{H} a_6^{(0)}, \quad a_4^{(0)} = \tilde{H}^2 \tilde{J}_A \tilde{J}_B + (1 - \tilde{J}_A)(1 - \tilde{J}_B), \\ a_3^{(0)} &= 2\tilde{H}(1 - \tilde{J}_A)(1 - \tilde{J}_B), \quad a_2^{(0)} = \tilde{H} a_3^{(0)} / 2; \end{aligned}$$

– при R_m

$$\begin{aligned} a_6^{(1)} &= -2 \langle \tilde{J}_A \tilde{J}_B + R_J \{ \tilde{J}_A \tilde{J}_B + \zeta_h^2 [\tilde{J}_A f + \tilde{J}_B (1-f)] \} \rangle, \\ a_5^{(1)} &= \tilde{H} a_6^{(1)}, \\ a_4^{(1)} &= -2 \{ 1 - \tilde{J}_A - \tilde{J}_B + R_J [(1 - \tilde{J}_A)(1 - \tilde{J}_B) - \\ &- 3\zeta_h^2 - \zeta_h^2 (\tilde{J}_A + \tilde{J}_B)(2\tilde{e}_0^2 - 1) \cos 2\gamma_0] \}, \\ a_3^{(1)} &= \tilde{H} a_4^{(1)}, \\ a_2^{(1)} &= 2 \{ (1-f)(1 - \tilde{J}_A)(1 - \tilde{J}_B - R_J \zeta_h^2) + \\ &+ f(1 - \tilde{J}_B)(1 - \tilde{J}_A - R_J \zeta_h^2) \}, \\ a_1^{(1)} &= \tilde{H} a_2^{(1)}; \end{aligned}$$

– при R_m^2

$$\begin{aligned} a_6^{(2)} &= 4\tilde{J}_A \tilde{J}_B \tilde{e}_0^2 (1 - \tilde{e}_0^2) - \tilde{J}_{AB}^2 + R_J \{ 4\tilde{J}_A \tilde{J}_B (1 - \tilde{e}_0^2) + \\ &+ \zeta_h^2 [4(\tilde{J}_A + \tilde{J}_B) \tilde{e}_0^2 (1 - \tilde{e}_0^2) - 2\tilde{J}_{AB} \sin 2\gamma_0 (2\tilde{e}_0^2 - 1)] \} + \\ &+ R_J^2 \zeta_h^2 (1 - \tilde{e}_0^2) [4\zeta_h^2 \tilde{e}_0^2 + 4(\tilde{J}_A \cos^2 \gamma_0 + \tilde{J}_B \sin^2 \gamma_0)], \\ a_5^{(2)} &= -2\tilde{H} \tilde{J}_{AB} [\tilde{J}_{AB} + R_J \zeta_h^2 \sin 2\gamma_0 (2\tilde{e}_0^2 - 1)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4^{(2)} &= -\tilde{J}_{AB}^2 (1 + \tilde{H}^2) + 4\tilde{e}_0^2 (1 - \tilde{e}_0^2) \times \\ &\times (1 - \tilde{J}_A)(1 - \tilde{J}_B) + R_J \{ 4(1 - \tilde{e}_0^2) \times \\ &\times (1 - \tilde{J}_A - \tilde{J}_B) + 4\zeta_h^2 [\tilde{e}_0^2 (1 - \tilde{e}_0^2) (3\tilde{J}_A + 3\tilde{J}_B - 2) - \\ &- \tilde{J}_{AB} \sin 2\gamma_0 (2\tilde{e}_0^2 - 1)] \} + 4R_J^2 \zeta_h^2 (1 - \tilde{e}_0^2) \times \\ &\times [3\zeta_h^2 \tilde{e}_0^2 + (\tilde{J}_A \cos 2\gamma_0 - \tilde{J}_B \cos 2\gamma_0 - 3)], \\ a_3^{(2)} &= -2\tilde{H} \tilde{J}_{AB} [\tilde{J}_{AB} + 2R_J \zeta_h^2 \sin 2\gamma_0 (2\tilde{e}_0^2 - 1)], \\ a_2^{(2)} &= -\tilde{H}^2 \tilde{J}_{AB}^2 + 4\tilde{e}_0^2 (1 - \tilde{e}_0^2) \times \\ &\times (2 - 2\tilde{J}_A - 2\tilde{J}_B + 3\tilde{J}_A \tilde{J}_B) - R_J \{ 4(1 - \tilde{J}_A - \tilde{J}_B)(1 - \tilde{e}_0^2) - \\ &- 2\zeta_h^2 [2\tilde{e}_0^2 (1 - \tilde{e}_0^2) (3\tilde{J}_A + 3\tilde{J}_B - 4) - \tilde{J}_{AB} \sin 2\gamma_0 (2\tilde{e}_0^2 - 1)] \} + \\ &+ 4R_J^2 \zeta_h^2 (1 - \tilde{e}_0^2) [3\zeta_h^2 \tilde{e}_0^2 + (1 - \tilde{J}_A \sin^2 \gamma_0 - \tilde{J}_B \cos^2 \gamma_0)], \\ a_1^{(2)} &= -2\tilde{H} R_J \tilde{J}_{AB} \zeta_h^2 \sin 2\gamma_0 (2\tilde{e}_0^2 - 1), \\ a_0^{(2)} &= 4\tilde{e}_0^2 (1 - \tilde{e}_0^2) (1 - \tilde{J}_A - R_J \zeta_h^2) (1 - \tilde{J}_B - R_J \zeta_h^2); \end{aligned}$$

– при R_m^3

$$\begin{aligned} a_6^{(3)} &= 2\tilde{J}_{AB} [\tilde{J}_{AB} + R_J \tilde{J}_{AB} - 2R_J^2 \zeta_h^2 \sin 2\gamma_0 (1 - \tilde{e}_0^2)], \\ a_5^{(3)} &= 2\tilde{J}_{AB}^2 (1 + R_J), \\ a_4^{(3)} &= 2R_J \tilde{J}_{AB} [\tilde{J}_{AB} - 4R_J \zeta_h^2 \sin 2\gamma_0 (1 - \tilde{e}_0^2)], \\ a_3^{(3)} &= 2\tilde{H} R_J \tilde{J}_{AB}^2, \\ a_2^{(3)} &= -2\tilde{J}_{AB} [\tilde{J}_{AB} + 2R_J^2 \zeta_h^2 \sin 2\gamma_0 (1 - \tilde{e}_0^2)], \\ a_1^{(3)} &= -2\tilde{H} \tilde{J}_{AB}^2; \end{aligned}$$

– при R_m^4

$$\begin{aligned} a_6^{(4)} &= -4J_{AB}^2 (\tilde{e}_0^2 + R_J) (1 - \tilde{e}_0^2), \\ a_4^{(4)} &= -12\tilde{J}_{AB}^2 \tilde{e}_0^2 (1 - \tilde{e}_0^2), \\ a_2^{(4)} &= -4\tilde{J}_{AB}^2 (1 - \tilde{e}_0^2) [3\tilde{e}_0^2 - R_J], \\ a_0^{(4)} &= -4\tilde{J}_{AB}^2 \tilde{e}_0^2 (1 - \tilde{e}_0^2). \end{aligned} \quad (47)$$

Согласно теореме Ляпунова об устойчивости движения по первому приближению, основное движение асимптотически устойчиво, когда:

$$\text{Re}(\lambda_i) < 0, \quad / i = \overline{1, 6} / , \quad (48)$$

где λ_i – i-й корень характеристического уравнения (45). Критерий Рауса-Гурвица дает следующие условия асимптотической устойчивости основного движения:

$$\begin{aligned} a_1 &> 0, \quad / i = \overline{0, 6} / , \quad \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \\ \Delta_3 &= a_3 \Delta_2 - a_4 a_1^2 > 0. \end{aligned} \quad (49)$$

Из (47) видно, что случаи отсутствия ($\tilde{e}_0 = 0$) и максимальной ($\tilde{e}_0 = 1$) неустойчивости являются критическими по Ляпунову случаями одного нулевого корня и нуждаются в отдельном изучении.

Приближенное определение корней характеристического уравнения

В общем случае аналитически найти корни полинома (45) или провести анализ условий (49) критерия Рауса-Гурвица невозможно. Поэтому ниже проведем исследование в случае, когда масса маятников намного меньше массы ИС, то есть $R_m \ll 1$.

Главные составляющие коэффициентов a_i полинома (45) и условия (49) дают такие необходимые условия устойчивости:

$$1 - \tilde{J}_A - R_J \zeta_h^2 > 0, 1 - \tilde{J}_B - R_J \zeta_h^2 > 0, \quad (50)$$

$$1 - \tilde{J}_A - R_J \zeta_h^2 < 0, 1 - \tilde{J}_B - R_J \zeta_h^2 < 0. \quad (51)$$

Эти условия более жесткие, чем условия, когда составное тело должно быть вытянутым ($1 < \tilde{J}_A, 1 < \tilde{J}_B$) или сплюснутым ($1 > \tilde{J}_A, 1 > \tilde{J}_B$).

Представим корни характеристического уравнения (45) разложениями:

$$\lambda = \lambda^{(0)} + \lambda^{(1)} R_m + \lambda^{(2)} R_m^2 + \dots \quad (52)$$

Тогда корни характеристического уравнения (45) имеют такие разложения:

$$\lambda_{1,2} \approx -\tilde{H}, \lambda_{3,4} \approx \pm ik - \frac{R_m R_J \zeta_h^2 (a + bf)(\tilde{H} \mp ik)}{c \tilde{J}_A \tilde{J}_B (1 - \tilde{J}_A)(1 - \tilde{J}_B)},$$

$$\lambda_{5,6} \approx -\frac{R_m [a_1^{(1)} \pm \sqrt{(a_1^{(1)})^2 - 4a_2^{(0)} a_0^{(2)}}]}{2a_2^{(0)}}, \quad (53)$$

где

$$k = \sqrt{(1 - \tilde{J}_A)(1 - \tilde{J}_B) \tilde{J}_A^{-1} \tilde{J}_B^{-1}},$$

$$a = \tilde{J}_B (1 - \tilde{J}_A)(1 + \tilde{J}_A - \tilde{J}_B)^2,$$

$$b = (\tilde{J}_A - \tilde{J}_B)(1 - \tilde{J}_A + \tilde{J}_B)^2,$$

$$c = [\tilde{H}^2 \tilde{J}_A \tilde{J}_B + (1 - \tilde{J}_A)(1 - \tilde{J}_B)]. \quad (54)$$

Действительные части корней (53) будут отрицательны только при выполнении условий (50).

Следовательно, из корней (53) характеристического уравнения (45), и из условий (50) видно, что:

- при одновременном выполнении условий (50), основное движение условно асимптотически устойчиво, а переходные процессы – колебательно-затухающие;
- величина безразмерного коэффициента трения \tilde{H} влияет лишь на скорость затухания переходных процессов, но не на устойчивость.

Проанализируем детальнее условия (50). При этом будем считать, что масса рассматриваемой ИС при изменении неуравновешенности не изменяется и поэтому, с учётом (15) $\mu = \text{const} \neq 0$ и $\tilde{e}_0 = 0$ только в случае, когда $e_0 = 0$. Чтобы основные движения были условно асимптотически устойчивы для любого $0 < \tilde{e}_0 < 1$ достаточно, чтобы эти условия выполнялись в наиболее жестких – предельных случаях (рис. 5):

- 1) $\tilde{e}_0 = 0$ ($\varphi_{01} = \pi/2$), $\gamma_{01} = 0$ (рис. 5, а);
- 2) $\tilde{e}_0 = 1$ ($\varphi_{02} = \pi$), $\gamma_{02} = \pi/2$ (рис. 5, б);
- 3) $\tilde{e}_0 = 0$ ($\varphi_{03} = \pi/2$), $\gamma_{03} = \pi/2$ (рис. 5, в);
- 4) $\tilde{e}_0 = 1$ ($\varphi_{04} = \pi$), $\gamma_{04} = 0$ (рис. 5, г).

Отличие случаев заключается в том, что в случаях 1, 2 маятники располагаются на оси Y (рис. 5, а, б соответственно), а в случаях 3, 4 – на оси X (рис. 5, в, г соответственно).

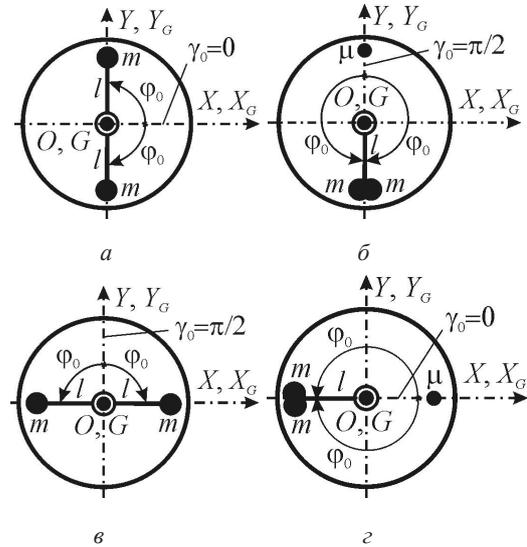


Рис. 5. Положение маятников на основном движении в граничных (критических) случаях: а – случай $\tilde{e}_0 = 0, \gamma_{01} = 0$; б – случай $\tilde{e}_0 = 1, \gamma_{02} = \pi/2$; в – случай $\tilde{e}_0 = 0, \gamma_{03} = \pi/2$; г – случай $\tilde{e}_0 = 1, \gamma_{04} = 0$

В предельных случаях тензор инерции системы – главный центральный и имеет вид:

$$\hat{J}_{Gi} = \text{diag}(A_{Gi}, B_{Gi}, C_G), / i = \overline{1,4} /, \quad (55)$$

где $\hat{J}_{x_{Gi}} = A_{Gi}, \hat{J}_{y_{Gi}} = B_{Gi}, \hat{J}_{z_G} = C_G$ – главные центральные моменты инерции системы (относительно осей X_G, Y_G, Z_G) на i -ом основном движении в граничных случаях.

Учитывая (32), будем иметь:

$$A_{G1} = A + \mu h^2 + 2m(h^2 + l^2) - M_\Sigma z^2, A_{G2} = A_{G1} + \mu e_0^2,$$

$$A_{G3} = A_{G1} - 2ml^2, B_{G1} = B + h^2(\mu + 2m) - M_\Sigma z^2,$$

$$B_{G3} = B_{G1} + 2ml^2, B_{G4} = B_{G3} + \mu e_0^2, / j = \overline{1,2}; i = \overline{3,4} /. \quad (56)$$

Из (56) видно, что A_{G2} и B_{G4} – наибольшие осевые моменты инерции системы.

Отметим, что безразмерные параметры \tilde{J}_A, \tilde{J}_B , учитывая (43) и предельные случаи, можно представить так:

$$\tilde{J}_{Ai} = A_{Gi}/C_G, \tilde{J}_{Bi} = B_{Gi}/C_G, / i = \overline{1,4} /. \quad (57)$$

Следовательно, действительные части корней λ_{1-5} характеристического уравнения (45) будут отрицательны при одновременном выполнении условий (50), которые с учетом (15), (57) и того, что $\zeta_h = \zeta + R_h$, в предельных случаях имеют вид

$$C_G - A_{Gi} - M_\Sigma h_z^2 > 0, C_G - B_{Gi} - M_\Sigma h_z^2 > 0, / i = \overline{1,4} /, \quad (58)$$

где $h_z = h + z$. В явном виде относительно параметров системы, в наиболее опасных случаях (когда A_{Gi} и B_{Gi}

достигают наибольших значений), условия (58) с учетом (56), принимают вид:

$$C - A - Mh > 0, C - B - Mh^2 > 0. \tag{59}$$

Для выяснения влияния нулевого корня характеристического уравнения (45) на устойчивость основных движений и характер переходных процессов исследуем ниже корни характеристического уравнения в критических случаях.

5. 6. 2. Случай когда $\tilde{e}_0 = 0$

Система уравнений (44) в случае, когда $\tilde{e}_0 = 0, \gamma_{01} = 0$, имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{b}_4 &= \tilde{J}_{A1}\alpha' + (1 - \tilde{J}_{A1})\beta + 2R_m R_J \zeta_h \gamma_2 = 0, \\ \tilde{b}_5 &= -(1 - \tilde{J}_{B1})\alpha + \tilde{J}_{B1}\beta' - 2R_m R_J \zeta_h \gamma_2' = 0, \\ L_1 &= (1 - 2R_J R_m)\gamma_1'' + \tilde{H}\gamma_1' = 0, \\ L_2 &= -\zeta_h(\beta'' + 2\alpha' - \beta) + (1 - 2R_m)\gamma_2'' + \\ &+ \tilde{H}\gamma_2' + 2R_m \gamma_2 = 0. \end{aligned} \tag{60}$$

В случае, когда $\tilde{e}_0 = 0, \gamma_{03} = \pi/2$, система (44) имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{b}_4 &= \tilde{J}_{A3}\alpha' + (1 - \tilde{J}_{A3})\beta + 2R_m R_J \zeta_h \gamma_2' = 0, \\ \tilde{b}_5 &= -(1 - \tilde{J}_{B3})\alpha + \tilde{J}_{B3}\beta' + 2R_m R_J \zeta_h \gamma_2 = 0, \\ L_1 &= (1 - 2R_J R_m)\gamma_1'' + \tilde{H}\gamma_1' = 0, \\ L_2 &= \zeta_h(\alpha'' - 2\beta' - \alpha) + (1 - 2R_m)\gamma_2'' + \tilde{H}\gamma_2' + 2R_m \gamma_2 = 0. \end{aligned} \tag{61}$$

Видно, что система уравнений (60) и (61) распадается на две независимых подсистемы. В первую подсистему системы уравнений (60) и (61) входит первое, второе и четвертое уравнение с переменными α, β, γ_2 , а во вторую – третье уравнение с переменной γ_2 .

Рассмотрим первую подсистему уравнений системы (60). Её характеристическое уравнение имеет вид:

$$\Delta(\lambda) = |b_{ij}|^3 = b_4 \lambda^4 + b_3 \lambda^3 + b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_0, \tag{62}$$

где

$$\begin{aligned} b_4 &= b_4^{(0)} + b_4^{(1)}R_m, b_3 = b_3^{(0)}, \\ b_2 &= b_2^{(0)} + b_2^{(1)}R_m, b_1 = b_1^{(0)}, b_0 = b_0^{(1)}R_m; \end{aligned} \tag{63}$$

и коэффициенты:

– при R_m^0

$$b_4^{(0)} = \tilde{J}_{A1}\tilde{J}_{B1}, b_3^{(0)} = \tilde{H}\tilde{J}_{A1}\tilde{J}_{B1},$$

$$b_2^{(0)} = (1 - \tilde{J}_{A1})(1 - \tilde{J}_{B1}), b_1^{(0)} = \tilde{H}b_2^{(0)};$$

– коэффициенты при R_m

$$b_4^{(1)} = -2\tilde{J}_{A1}(\tilde{J}_{B1} + R_J \zeta_h^2),$$

$$b_2^{(1)} = -2[1 - \tilde{J}_{A1} - \tilde{J}_{B1} - R_J \zeta_h^2(3 + \tilde{J}_{B1} - \tilde{J}_{A1})],$$

$$b_0^{(1)} = 2(1 - \tilde{J}_{B1})(1 - \tilde{J}_{A1} - R_J \zeta_h^2). \tag{64}$$

Критерий Рауса-Гурвица имеет вид:

$$\begin{aligned} b_i > 0, / i = \overline{0,4}/; \Delta_2 &= b_1 b_2 - b_0 b_3 > 0, \\ \Delta_3 &= b_3 \Delta_2 - b_4 b_1^2 > 0. \end{aligned} \tag{65}$$

Эти условия будут всегда выполняться при $R_m \ll 1$, но при выполнении условий:

$$1 - \tilde{J}_{A1} - R_J \zeta_h^2 > 0, 1 - \tilde{J}_{B1} - R_J \zeta_h^2 > 0. \tag{66}$$

С учетом (15), (56), (57) и того, что $\zeta_h = \zeta + R_h$, условия (66), в явном виде относительно параметров системы, после преобразований принимают вид:

$$C - A - Mh^2 > 0, C + 2ml^2 - B - Mh^2 > 0. \tag{67}$$

Так как в общем случае корни характеристического уравнения (62) получить невозможно, рассмотрен случай когда $R_m \ll 1$. Корни характеристического уравнения (62) имеют такие разложения:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\approx -\tilde{H}, \\ \lambda_{2,3} &\approx -\frac{R_m \tilde{H} R_J \zeta_h^2 (1 + \tilde{J}_{B1} - \tilde{J}_{A1})^2}{\tilde{J}_{B1}(1 - \tilde{J}_{A1})[\tilde{H}^2 \tilde{J}_{A1} \tilde{J}_{B1} + (1 - \tilde{J}_{A1})(1 - \tilde{J}_{B1})]} \pm \\ &\pm ik_{10} \left\{ 1 + \frac{R_m R_J \zeta_h^2 (1 + \tilde{J}_{B1} - \tilde{J}_{A1})^2}{\tilde{J}_{B1}(1 - \tilde{J}_{A1})[\tilde{H}^2 \tilde{J}_{A1} \tilde{J}_{B1} + (1 - \tilde{J}_{A1})(1 - \tilde{J}_{B1})]} \right\}, \\ \lambda_4 &\approx -\frac{2R_m (1 - \tilde{J}_{A1} - R_J \zeta_h^2)}{\tilde{H}(1 - \tilde{J}_{A1})}, \end{aligned} \tag{68}$$

где $k_{10} = \sqrt{(1 - \tilde{J}_{A1})(1 - \tilde{J}_{B1})\tilde{J}_{A1}^{-1}\tilde{J}_{B1}^{-1}}$.

По корням (68) видно, что переходные процессы в системе, носят колебательно-затухающий характер и имеет место асимптотическая устойчивость по α, β, γ_2 .

Характеристическое уравнение второй подсистемы системы уравнений (60) имеет вид:

$$[(1 - 2R_J R_m)\chi + \tilde{H}]\chi = 0. \tag{69}$$

Корни уравнения (69):

$$\chi_1 = -\tilde{H}/(1 - 2R_J R_m), \chi_2 = 0. \tag{70}$$

По корням (70) видно, что имеет место устойчивость по γ_1 .

Таким образом, со временем

$$\alpha, \beta, \gamma_2 \rightarrow 0, \gamma_1 \rightarrow \text{const}. \tag{71}$$

Из этого следует, что со временем угол нутации полностью устраняется. Скорость стремления к нулю возмущений α, β, γ_2 полностью характеризуют действительные части корней (68). Появление нулевого корня χ_2 , в этом случае, можно интерпретировать аналогично, как и в работе [29].

Рассмотрим первую подсистему уравнений системы (61). Её характеристическое уравнение имеет вид:

$$\Delta(\lambda) = |c_{ij}|^3 = c_4 \lambda^4 + c_3 \lambda^3 + c_2 \lambda^2 + c_1 \lambda + c_0, \tag{72}$$

где

$$\begin{aligned} b_i > 0, \quad /i = \overline{0,4}/; \quad \Delta_2 = b_1 b_2 - b_0 b_3 > 0, \\ \Delta_3 = b_3 \Delta_2 - b_4 b_1^2 > 0. \end{aligned} \quad (73)$$

и коэффициенты:

$$\begin{aligned} & - \text{при } R_m^0 \\ c_4^{(0)} &= \tilde{J}_{A3} \tilde{J}_{B3}, \quad c_3^{(0)} = \tilde{H} \tilde{J}_{A3} \tilde{J}_{B3}, \\ c_2^{(0)} &= (1 - \tilde{J}_{A3})(1 - \tilde{J}_{B3}), \quad c_1^{(0)} = \tilde{H}(1 - \tilde{J}_{A3})(1 - \tilde{J}_{B3}); \\ & - \text{при } R_m \\ c_4^{(1)} &= -2\tilde{J}_{B3}(\tilde{J}_{A3} + R_J \zeta_h^2), \\ c_2^{(1)} &= 2[R_J \zeta_h^2(3 + \tilde{J}_{A3} - \tilde{J}_{B3}) - (1 - \tilde{J}_{A3} - \tilde{J}_{B3})], \\ c_0^{(1)} &= 2(1 - \tilde{J}_{A3})(1 - \tilde{J}_{B3} - R_J \zeta_h^2). \end{aligned} \quad (74)$$

Условия (65) всегда будут выполняться при $R_m \ll 1$ и при выполнении условий:

$$1 - \tilde{J}_{A3} - R_J \zeta_h^2 > 0, \quad 1 - \tilde{J}_{B3} - R_J \zeta_h^2 > 0. \quad (75)$$

С учетом (15), (56), (57) и того, что $\zeta_h = \zeta + \dots$, условия (75), в явном виде относительно параметров системы, после преобразований принимают вид:

$$C + 2ml^2 - A - Mh^2 > 0, \quad C - B - Mh^2 > 0. \quad (76)$$

Так как в общем случае корни характеристического уравнения (72) получить невозможно, рассмотрен случай когда $R_m \ll 1$. Корни характеристического уравнения (72) имеют такие разложения:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\approx -\tilde{H}, \\ \lambda_{2,3} &\approx -\frac{R_m \tilde{H} R_J \zeta_h^2 (1 + \tilde{J}_{A3} - \tilde{J}_{B3})^2}{\tilde{J}_{A3} (1 - \tilde{J}_{B3}) [\tilde{H}^2 \tilde{J}_{A3} \tilde{J}_{B3} + (1 - \tilde{J}_{A3})(1 - \tilde{J}_{B3})]} \pm \\ &\pm ik_{30} \left\{ 1 + \frac{R_m R_J \zeta_h^2 (1 + \tilde{J}_{A3} - \tilde{J}_{B3})^2}{\tilde{J}_{A3} (1 - \tilde{J}_{B3}) [\tilde{H}^2 \tilde{J}_{A3} \tilde{J}_{B3} + (1 - \tilde{J}_{A3})(1 - \tilde{J}_{B3})]} \right\}, \\ \lambda_4 &\approx -\frac{2R_m (1 - \tilde{J}_{B3} - R_J \zeta_h^2)}{\tilde{H} (1 - \tilde{J}_{B3})}, \end{aligned} \quad (77)$$

где $k_{30} = \sqrt{(1 - \tilde{J}_{A3})(1 - \tilde{J}_{B3}) \tilde{J}_{A3}^{-1} \tilde{J}_{B3}^{-1}}$.

По корням (77) видно, что переходные процессы в системе, носят колебательно-затухающий характер и имеет место асимптотическая устойчивость по α, β, γ_2 . Корни второй подсистемы системы уравнений (61), имеют вид (70), причем имеет место устойчивость по γ_1 .

5. 6. 3. Случай когда $\tilde{e}_0 = 1$

Система уравнений (44) в случае, когда $\tilde{e}_0 = 1$, $\gamma_{02} = \pi/2$, имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{b}_4 &= \tilde{J}_{A2} \alpha' + (1 - \tilde{J}_{A2}) \beta - 2R_m R_J \zeta_h \gamma_1 = 0, \\ \tilde{b}_5 &= -(1 - \tilde{J}_{B2}) \alpha + \tilde{J}_{B2} \beta' + 2R_m R_J \zeta_h \gamma_1' = 0, \\ L_1 &= \zeta_h (\beta'' + 2\alpha' - \beta) + [1 - 2R_m (1 + R_J)] \gamma_1'' + \\ &+ \tilde{H} \gamma_1' + 2R_m \gamma_1 = 0, \end{aligned}$$

$$L_2 = \gamma_2'' + \tilde{H} \gamma_2' = 0. \quad (78)$$

В случае, когда $\tilde{e}_0 = 1$, $\gamma_{04} = 0$, система уравнений (44) имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{b}_4 &= \tilde{J}_{A4} \alpha' + (1 - \tilde{J}_{A4}) \beta + 2R_m R_J \zeta_h \gamma_1' = 0, \\ \tilde{b}_5 &= -(1 - \tilde{J}_{B4}) \alpha + \tilde{J}_{B4} \beta' + 2R_m R_J \zeta_h \gamma_1 = 0, \\ L_1 &= \zeta_h (\alpha'' - 2\beta' - \alpha) + [1 - 2R_m (1 + R_J)] \gamma_1'' + \tilde{H} \gamma_1' + 2R_m \gamma_1 = 0, \\ L_2 &= \gamma_2'' + \tilde{H} \gamma_2' = 0. \end{aligned} \quad (79)$$

Видно, что система уравнений (78) и (79) распадается на две независимых подсистемы. В первую подсистему системы уравнений (78) и (79) входит первое, второе и третье уравнение с переменными α, β, γ_1 , во вторую – четвертое уравнение с переменной γ_2 .

Рассмотрим первую подсистему уравнений системы (78). Её характеристическое уравнение имеет вид:

$$\Delta(\lambda) = |d_{ij}|_1^3 = d_4 \lambda^4 + d_3 \lambda^3 + d_2 \lambda^2 + d_1 \lambda + d_0, \quad (80)$$

где

$$\begin{aligned} d_4 &= d_4^{(0)} + d_4^{(1)} R_m, \quad d_3 = d_3^{(0)}, \\ d_2 &= d_2^{(0)} + d_2^{(1)} R_m, \quad d_1 = d_1^{(0)}, \quad d_0 = d_0^{(1)} R_m, \end{aligned} \quad (81)$$

и коэффициенты:

$$\begin{aligned} & - \text{при } R_m^0 \\ d_4^{(0)} &= \tilde{J}_{A2} \tilde{J}_{B2}, \quad d_3^{(0)} = \tilde{H} \tilde{J}_{A2} \tilde{J}_{B2}, \\ d_2^{(0)} &= (1 - \tilde{J}_{A2})(1 - \tilde{J}_{B2}), \quad d_1^{(0)} = \tilde{H}(1 - \tilde{J}_{A2})(1 - \tilde{J}_{B2}); \\ & - \text{коэффициенты при } R_m \\ d_4^{(1)} &= -2\tilde{J}_{A2} [\tilde{J}_{B2} (1 + R_J) + R_J \zeta_h^2], \\ d_2^{(1)} &= -2\{1 - \tilde{J}_{A2} - \tilde{J}_{B2} + R_J [(1 - \tilde{J}_{A2}) \times \\ &\times (1 - \tilde{J}_{B2}) - \zeta_h^2 (3 + \tilde{J}_{B2} - \tilde{J}_{A2})]\}, \\ d_0^{(1)} &= 2(1 - \tilde{J}_{B2})(1 - \tilde{J}_{A2} - R_J \zeta_h^2). \end{aligned} \quad (82)$$

Условия (65) всегда будут выполняться при $R_m \ll 1$ и при выполнении условий:

$$1 - \tilde{J}_{A2} - R_J \zeta_h^2 > 0, \quad 1 - \tilde{J}_{B2} - R_J \zeta_h^2 > 0. \quad (83)$$

С учетом (15), (56), (57) и того, что $\zeta_h = \zeta + R_h$, условия (83), в явном виде относительно параметров системы, после преобразований принимают вид:

$$C - A - Mh^2 > 0, \quad C + \mu e_0^2 + 2ml^2 - B - Mh^2 > 0. \quad (84)$$

Так как в общем случае корни характеристического уравнения (80) получить невозможно, рассмотрен случай когда $R_m \ll 1$. Корни характеристического уравнения (80) имеют такие разложения:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\approx -\tilde{H}, \quad \lambda_{2,3} \approx -\frac{R_m \tilde{H} R_J \zeta_h^2 (1 + \tilde{J}_{B2} - \tilde{J}_{A2})^2}{\tilde{J}_{B2} (1 - \tilde{J}_{A2}) [\tilde{H}^2 \tilde{J}_{A2} \tilde{J}_{B2} + (1 - \tilde{J}_{A2})(1 - \tilde{J}_{B2})]} \pm \\ &\pm ik_{20} \left\{ 1 + \frac{R_m R_J \zeta_h^2 (1 + \tilde{J}_{B2} - \tilde{J}_{A2})^2}{\tilde{J}_{B2} (1 - \tilde{J}_{A2}) [\tilde{H}^2 \tilde{J}_{A2} \tilde{J}_{B2} + (1 - \tilde{J}_{A2})(1 - \tilde{J}_{B2})]} \right\}, \end{aligned}$$

$$\lambda_4 \approx -\frac{2R_m(1-\tilde{J}_{A2}-R_J\zeta_h^2)}{\tilde{H}(1-\tilde{J}_{A2})}, \tag{85}$$

где $k_{20} = \sqrt{(1-\tilde{J}_{A2})(1-\tilde{J}_{B2})\tilde{J}_{A2}^{-1}\tilde{J}_{B2}^{-1}}$.

По корням (85) видно, что переходные процессы в системе, носят колебательно-затухающий характер и имеет место асимптотическая устойчивость по α, β, γ_1 .

Для второй подсистемы системы уравнений (78) находим:

$$(\mu + \tilde{H})\mu = 0. \tag{86}$$

Корни уравнения (86) имеют вид:

$$\mu_1 = -\tilde{H}, \mu_2 = 0. \tag{87}$$

По корням (87) видно, что имеет место устойчивость по γ_2 .

Таким образом, со временем

$$\alpha, \beta, \gamma_1 \rightarrow 0, \gamma_2 \rightarrow \text{const}. \tag{88}$$

Из этого следует, что со временем угол нутации полностью устраняется. Скорость стремления к нулю возмущений α, β, γ_1 полностью характеризуют действительные части корней (85). Появление нулевого корня μ_2 можно интерпретировать аналогично, как и в работе [29].

Рассмотрим первую подсистему уравнений системы (79). Её характеристическое уравнение имеет вид:

$$\Delta(\lambda) = |f_{ij}|_1^3 = f_4\lambda^4 + f_3\lambda^3 + f_2\lambda^2 + f_1\lambda + f_0, \tag{89}$$

где

$$f_4 = f_4^{(0)} + f_4^{(1)}R_m, f_3 = f_3^{(0)}, \tag{90}$$

$$f_2 = f_2^{(0)} + f_2^{(1)}R_m, f_1 = f_1^{(0)}, f_0 = f_0^{(1)}R_m,$$

и коэффициенты:

– при R_m^0

$$f_4^{(0)} = \tilde{J}_{A4}\tilde{J}_{B4}, f_3^{(0)} = \tilde{H}\tilde{J}_{A4}\tilde{J}_{B4},$$

$$f_2^{(0)} = (1-\tilde{J}_{A4})(1-\tilde{J}_{B4}), f_1^{(0)} = \tilde{H}(1-\tilde{J}_{A4})(1-\tilde{J}_{B4});$$

– при R_m

$$f_4^{(1)} = -2\tilde{J}_{B4}[\tilde{J}_{A4}(1+R_J)+R_J\zeta_h^2],$$

$$f_2^{(1)} = -2\{1-\tilde{J}_{A4}-\tilde{J}_{B4} + R_J[(1-\tilde{J}_{A4})(1-\tilde{J}_{B4})-\zeta_h^2(3+\tilde{J}_{A4}-\tilde{J}_{B4})]\},$$

$$f_0^{(1)} = 2(1-\tilde{J}_{A4})(1-\tilde{J}_{B4}-R_J\zeta_h^2). \tag{91}$$

Условия (64) всегда будут выполняться при $R_m \ll 1$ и при выполнении условий:

$$1-\tilde{J}_{A4}-R_J\zeta_h^2 > 0, 1-\tilde{J}_{B4}-R_J\zeta_h^2 > 0. \tag{92}$$

С учетом (15), (56), (57) и того, что $\zeta_h = \zeta + R_h$, условия (92), в явном виде относительно параметров системы, после преобразований принимают вид:

$$C + \mu e_0^2 + 2ml^2 - A - Mh^2 > 0, C - B - Mh^2 > 0. \tag{93}$$

Так как в общем случае корни характеристического уравнения (89) получить невозможно, рассмотрим случай когда $R_m \ll 1$. Корни характеристического уравнения (89) имеют такие разложения:

$$\lambda_1 \approx -\tilde{H}, \lambda_{2,3} \approx -\frac{R_m\tilde{H}R_J\zeta_h^2(1+\tilde{J}_{A4}-\tilde{J}_{B4})^2}{\tilde{J}_{A4}(1-\tilde{J}_{B4})[\tilde{H}^2\tilde{J}_{A4}\tilde{J}_{B4}+(1-\tilde{J}_{A4})(1-\tilde{J}_{B4})]} \pm \pm ik_{40} \left\{ 1 + \frac{R_m R_J \zeta_h^2 (1 + \tilde{J}_{A4} - \tilde{J}_{B4})^2}{\tilde{J}_{A4} (1 - \tilde{J}_{B4}) [\tilde{H}^2 \tilde{J}_{A4} \tilde{J}_{B4} + (1 - \tilde{J}_{A4})(1 - \tilde{J}_{B4})]} \right\},$$

$$\lambda_4 \approx -\frac{2R_m(1-\tilde{J}_{B4}-R_J\zeta_h^2)}{\tilde{H}(1-\tilde{J}_{B4})}, \tag{94}$$

где $k_{40} = \sqrt{(1-\tilde{J}_{A4})(1-\tilde{J}_{B4})\tilde{J}_{A4}^{-1}\tilde{J}_{B4}^{-1}}$.

В данном случае, по корням (94) видно, что переходные процессы в системе носят колебательно-затухающий характер и имеет место асимптотическая устойчивость по α, β, γ_1 . Корни второй подсистемы системы уравнений (79) имеют вид (87), причем имеет место устойчивость по γ_2 .

6. Численный эксперимент

Исследуется влияние параметров системы на скорость прихода системы к основному движению. Параметры расчетов подобраны по параметрам КА IMAGE [15] стабилизированного вращением. Корпус КА выполнен в форме прямого кругового цилиндра, а его масса, радиус боковой поверхности и высота цилиндрического корпуса соответственно равны $M=490$ кг, $R=1,1$ м, $H_c=1,5$ м. Для уменьшения угла нутации на КА установлен жидкостный демпфер, масса жидкости которого составляет $m=1,2$ кг ($m/M \approx 2,4 \cdot 10^{-3}$). Массу маятников берем равной массе жидкости демпфера. Другие параметры имеют значение: $\mu=1,2$ кг, $e=0,9$ м, $\gamma=0$. В табл. 1 приведены пределы изменения параметров, шаг их изменения и значения в модели.

Результаты числовых расчетов в виде графиков представлены на рис. 6. По вертикальной оси графиков откладывается максимальное значение действительных частей корней характеристического уравнения (45), а по горизонтальной – параметр, изменяющийся с определенным шагом. При построении графиков один из параметров изменяется, при этом остальные параметры имеют фиксированное значение. Графики на рис. 6, *a-e* получены при значениях масс маятников (шаров) $m_1=1,2$ кг, $m_2=4m_1$, $m_3=8m_1$. На рис. 6, *d* график построен при количестве оборотов $n_1=10$ об/мин, $n_2=5n_1$, $n_3=10n_1$, при построении других графиков количество оборотов составляет n_2 .

По рис. 6, *a-e* были подобраны значения исследуемых параметров, обеспечивающие наибольшую скорость прихода системы к основному движению. Из рис. 6, *b*, видно, что при превышении параметром h значения $0,31$ м основное движение неустойчиво (для $m=1,2$ кг – $h>0,34$ м). В КА IMAGE – $h>0,625$ м, поэтому жидкостный демпфер, установлен с нарушением условия устойчивости и основное движение – неустойчиво. Это объясняет большие остаточные углы нутации, создаваемые этим демпфером при работе на КА. При превышении

параметром H_c значения 1,75 м, что соответствует соотношению осевых моментов инерции тела $A/C > 0,92$

(рис. 6, з), основное движение становится неустойчивым. Это объясняется тем, что нарушаются условия (48).

Таблица 1

Пределы, шаг и оптимальное значение параметров в модели

Параметр	Значение по умолчанию	Пределы изменения	Шаг изменения	Оптимальное значение
n , об/мин	50	1–301	10	50 (m_1) 60 (m_2) 50 (m_3)
h , м	0,2	0–0,7	0,05	0,2 ($m_{1,2,3}$)
H , кг·с ⁻¹	1	0–5	0,25	1 (m_1) 1 (m_2) 0,3 (m_3)
H_c , м	1,5	0,5–3,5	0,25	1,5 ($m_{1,2,3}$)
m_i , кг	–	0,6–9,6	0,6	9,6 (n_1) 8,5 (n_2) 4 (n_3)
l , м	0,9	0,45–1,1	0,05	0,8 (m_1) 0,95 (m_2) 0,85 (m_3)

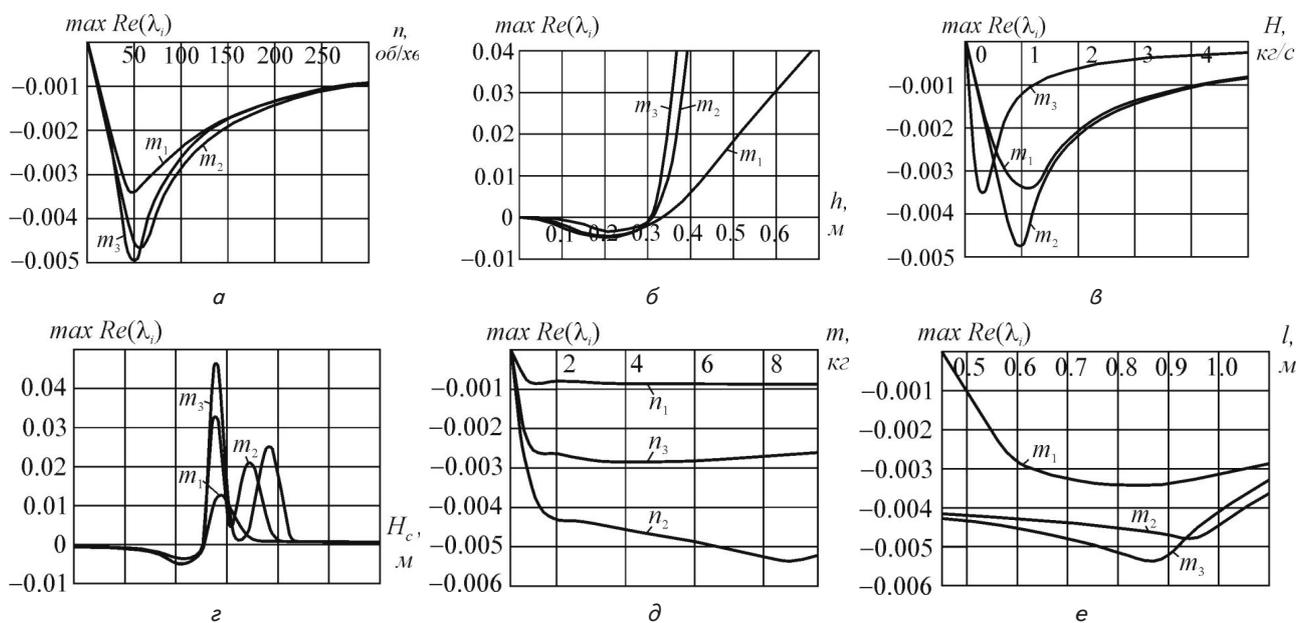


Рис. 6. Влияние параметров системы на максимальное значение действительных частей корней характеристического уравнения (скорость затухания переходных процессов): а – обороты НТ;

б – расстояние от плоскости уравнивания до центра масс системы; в – коэффициент сопротивления;

г – высота образующей цилиндрического корпуса несущего тела (КА); д – масса маятника; е – длина маятника

7. Выводы

1. Построена теоретико-механическая модель вращающегося КА и присоединенного к нему пассивного маятникового автобалансира. Показано, что данная модель может быть представлена в виде изолированной системы, состоящей из статически неуравновешенного несущего тела и двух одинаковых математических маятников, насаженных на продольную ось несущего тела. Относительному движению маятников препятствуют силы вязкого сопротивления.

2. В рамках рассматриваемой теоретико-механической модели изолированной системы установлено, что

основные движения, в которых наступает стабилизация положения оси вращения несущего тела, условно асимптотически устойчивы. Условная асимптотическая устойчивость основных движений имеет место лишь в случае, когда поперечные осевые моменты инерции несущего тела больше чем продольный осевой момент инерции, а расстояние от плоскости уравнивания до центра масс системы не превышает определенного предельного значения.

3. Найдены оптимальные значения параметров системы (количество оборотов несущего тела, расстояние от плоскости уравнивания до центра масс системы, коэффициент сопротивления, высота обра-

зующей цилиндрического корпуса несущего тела, масса и длина маятников), при которых скорость прихода системы к основному движению будет наибольшая.

Также установлено, что значения параметров системы, при которых основные движения устойчивы, могут изменяться в довольно широких пределах.

Литература

1. Артюхин, Ю. П. Системы управления космических аппаратов, стабилизированных вращением [Текст] / Ю. П. Артюхин, Л. И. Каргу, В. Л. Симаев. – М.: Наука, 1979. – 296 с.
2. Попов, В. И. Системы ориентации и стабилизации космических аппаратов [Текст] / В. И. Попов. – М.: Машиностроение, 1986. – 184 с.
3. Huges, P. C. Spacecraft Attitude Dynamics [Текст] / P. C. Huges. – Dover Publications, New York, 2004. – 585 p.
4. Зинченко, О. Н. Малые оптические спутники ДЗЗ [Электронный ресурс] / О. Н. Зинченко. – Ракурс, Москва, 2011. – Режим доступа: <http://www.racurs.ru/?page=710>
5. Овчинников, М. Ю. Малые мира сего [Текст] / М. Ю. Овчинников // Компьютерра. – 2007. – № 15. – С. 37–43.
6. Small Satellites: A Revolution in Space Science [Electronic resource]. – Final Report. – Keck Institute for Space Studies, California Institute of Technology, Pasadena, CA, 2014. – 83 p. – Available at: <http://www.kiss.caltech.edu/study/smallsat/KISS-SmallSat-FinalReport.pdf>
7. Малые космические аппараты информационного обеспечения [Текст] / под ред. В. Ф. Фатеева. – М.: Радиотехника, 2010. – 320 с.
8. Макриденко, Л. А. Концептуальные вопросы создания и применения малых космических аппаратов [Текст] / Л. А. Макриденко, С. Н. Волков, В. П. Ходненко и др. // Вопросы электромеханики. Труды НИИ ВНИИЭМ. – 2010. – Т. 114, № 1. – С. 15–26.
9. Gidlund, S. Design Study for a Formation-Flying Nanosatellite Cluster [Electronic resource] / S. Gidlund. – Lulea University of Technology, 2005. – 128 p. – Available at: <http://epubl.ltu.se/1402-1617/2005/147/LTU-EX-05147-SE.pdf>
10. Sandau, R. Small Satellites for Earth Observation: Selected Contributions [Text] / R. Sandau, H.-P. Riser, A. Valenzuela. – Springer, 2008. – 406 p. doi: 10.1007/978-1-4020-6943-7
11. Small Spacecraft Technology State of the Art [Electronic resource]. – Mission Design Division Staff. – Ames Research Center, Moffett Field, California, 2014. – 200 p. – Available at: https://www.nasa.gov/directorates/spacetech/small_spacecraft/index.html
12. Каргу, Л. И. Системы угловой стабилизации космических аппаратов [Текст] / Л. И. Каргу. – М.: Машиностроение, 1980. – 172 с.
13. Гриценко, А. А. Использование стабилизированных вращением малых космических аппаратов в системах спутниковой связи на ГЕО и НЕО орбитах [Электронный ресурс] / А. А. Гриценко. – ЗАО Информационный Космический Центр “Северная Корона”. – 2001. – Режим доступа: http://www.spacecenter.ru/Resurses/IEEE_2001_2.doc
14. Fonseca, I. M. SACI-2 Attitude Control Subsystem [Text] / I. M. Fonseca, M. C. Santos // INPE. – 2002. – Vol. 3. – P. 197–209.
15. Hubert, C. Surface Tension Lockup in the IMAGE Nutation Damper – Anomaly and Recovery [Electronic resource] / C. Hubert, D. Swanson // NASA GSFC Flight Mechanics Symposium, 2001. – Available at: http://image.gsfc.nasa.gov/publication/document/2001_hubert_swanson.pdf
16. Рейтер, Г. С. Вращательное движение пассивных космических аппаратов [Текст] / Г. С. Рейтер, У. Т. Томсон. – Проблемы ориентации искусственных спутников Земли. – М.: Наука, 1966. – С. 336–350.
17. Likins, P. W. Effects of energy dissipation on the free body motions of spacecraft [Text] / P. W. Likins. – JPL, Technical Report No 32.860, NASA, California Institute of Technology Pasadena, California, 1966. – 70 p.
18. Mirer, S. A. Optimal Parameters of a Spin-Stabilized Satellite with a Pendulum-Like Damper [Text] / S. A. Mirer, V. A. Sarychev // Cosmic Research. – 1997. – Vol. 35, Issue 6. – P. 609–615.
19. Cloutier, G. J. Nutation damper instability on spin-stabilized spacecraft [Text] / G. J. Cloutier // AIAA Journal. – 1969. – Vol. 7, Issue 11. – P. 2110–2115. doi: 10.2514/3.5565
20. Cochran, Jr. J. Nutation Dampers vs Precession Dampers for Asymmetric Spacecraft [Text] / Jr. J. Cochran, J. Thompson // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 1980. – Vol. 3, Issue 1. – P. 22–28. doi: 10.2514/3.55942
21. Kane, T. R. Spacecraft Dynamics [Text] / T. R. Kane, P. W. Likins, D. A. Levinson. – McGraw-Hill, New York, 1983. – 436 p.
22. Томпсон, Дж. М. Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике [Текст] / Дж. М. Т. Томпсон; пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 254 с.
23. Janssens, F. L. On the stability of spinning satellites [Text] / F. L. Janssens, J. C. Van der Ha // Acta Astronautica. – 2011. – Vol. 68, Issues 7–8. – P. 778–789. doi: 10.1016/j.actaastro.2010.08.008
24. Filimonikhin, G. B. Attitude stabilization of the rotational axis of a carrying body by pendulum dampers [Text] / G. B. Filimonikhin, V. V. Pirogov, I. I. Filimonikhina // International Applied Mechanics. – 2007. – Vol. 43, Issue 10. – P. 1167–1173. doi: 10.1007/s10778-007-0117-4
25. Филимонихин, Г. Б. Использование пассивных автобалансиров как демпферов угла нутации быстровращающихся спутников [Текст]: сб. пр. / Г. Б. Филимонихин, В. В. Пирогов, И. И. Филимонихина // Системне проектування та аналіз характеристик аерокосмічної техніки. – 2008. – Т. VIII. – С. 105–115.
26. Филимонихин, Г. Б. Исследование процесса устранения пассивными автобалансирами больших углов нутации [Текст] / Г. Б. Филимонихин, В. В. Пирогов, И. И. Филимонихина // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2013. – Т. 6, № 7(66). – С. 34–38. – Режим доступа: <http://journals.urau.ru/eejet/article/view/18705/17057>
27. Filimonikhin, G. B. Stability of Steady-State Motion of an Isolated System Consisting of a Rotating Body and Two Pendulums [Text] / G. B. Filimonikhin, I. I. Filimonikhina, V. V. Pirogov // International Applied Mechanics. – 2014. – Vol. 50, Issue 4. – P. 459–469. doi: 10.1007/s10778-014-0651-9
28. Filimonikhin, G. B. Stabilization of the Rotation Axis of a Solid by Coupled Perfectly Rigid Bodies [Text] / G. B. Filimonikhin, V. V. Pirogov // International Applied Mechanics. – 2005. – Vol. 41, Issue 8. – P. 937–943. doi: 10.1007/s10778-005-0164-7

29. Пирогов, В. В. Исследование устойчивости установившихся движений изолированной системы, совершающей плоское движение [Текст] / В. В. Пирогов // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2015. – Т. 5, № 7 (77). – С. 9–20. doi: 10.15587/1729-4061.2015.49269
30. Filimonikhina, I. I. Conditions for balancing a rotating body in an isolated system with automatic balancers [Text] / I. I. Filimonikhina, G. B. Filimonikhin // International Applied Mechanics. – 2007. – Vol. 43, Issue 11. – P. 1276–1282. doi: 10.1007/s10778-007-0132-5

Розглянуто методи моделювання динаміки частинок зернової суміші на віброрешетах, які основані на уточненні принципів гідроаналогії шляхом введення бульбашкового псевдозрідженого середовища. Це визначило можливість інтенсифікації просіювання сумішей на віброрешетах шляхом використання отворів у вигляді епіциклоїди. Для підвищення точності моделювання проведена ідентифікація одного із значущих параметрів процесу просіювання – швидкості проходження суміші через отвори решета

Ключові слова: процес просіювання, ефективність, поле швидкості, отвір, псевдозріджене середовище, зернова суміш гороха, гідроаналогія

Рассмотрены методы моделирования динамики частиц зерновой смеси на виброрешетах, которые основаны на уточнении принципов гидроаналогии путем введения пузырьковой псевдооживленной среды. Это определило возможности интенсификации просеивания смесей на виброрешетах путем использования отверстий в виде эписиклоиды. Для увеличения точности моделирования проведена идентификация одного из значимых параметров процесса просеивания – скорости прохождения смеси через отверстия решет

Ключевые слова: процесс просеивания, эффективность, поле скорости, отверстия, псевдооживленная среда, зерновая смесь гороха, гидроаналогия

1. Введение

Эффективность технологических процессов решетных зерноочистительных машин определяется характером протекания процессов просеивания зерновых смесей (ЗС). Сложная форма семян некоторых сельскохозяйственных культур, например, горох, гречка, нут, кукуруза и т. п., также приводит к низкой эффективности процессов их просеивания на решетках. Наличие отклонений в виде выступов, впадин, асимметрии вершин и сторон, наряду со сложной формой приводит к отличию этих семян от стандартной формы

отверстий: круглой, треугольной и прямоугольной. Это приводит к увеличению количества непроеянных частиц – сходовой фракции, и, как следствие, низкой производительности. При этом потребность в нормированном качестве продовольственного зерна и семенного материала требует повторных пропусков ЗС через зерноочистительную машину, что повышает травмирование зерна и увеличивает эксплуатационные затраты.

Моделирование динамики ЗС на виброрешетах зерновых сепараторов, которое будет учитывать как свойства смеси, так и конструктивно-кинематические

УДК 631.362:53

DOI: 10.15587/1729-4061.2016.65920

ИДЕНТИФИКАЦИЯ СКОРОСТИ РОХОЖДЕНИЯ ЧАСТИЦ ЗЕРНОВОЙ СМЕСИ ЧЕРЕЗ ОТВЕРСТИЯ РЕШЕТ ВИБРАЦИОННЫХ ЗЕРНОВЫХ СЕПАРАТОРОВ

Л. Н. Тищенко

Доктор технических наук, профессор, академик НААН Украины*

E-mail: leonid_tishchenko@yahoo.com

С. А. Харченко

Кандидат технических наук, доцент**

E-mail: kharchenko_mtf@ukr.net

Ф. М. Харченко

Кандидат технических наук, доцент*

E-mail: faridakharchenko@gmail.com

В. В. Бредихин

Кандидат технических наук, доцент*

E-mail: vadimbr76@ukr.net

О. В. Цуркан

Кандидат технических наук, доцент

Кафедра процессов и оборудования перерабатывающих и пищевых производств им. проф. П. С. Берника Винницкий национальный аграрный университет ул. Солнечная, 3, г. Винница, Украина, 21008

E-mail: tsurkan_ov@mail.ru

*Кафедра физики, теоретической механики и деталей машин **

Кафедра оптимизации технологических систем им. Т. П. Евсюкова *

*** Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. Петра Василенко ул. Артема, 44, г. Харьков, Украина, 62001