УДК 338.242

ПАРАМЕТРИЧНА ДЕКОМПОЗИЦІЯ БАГАТОЕТАПНИХ ТРАНСПОРТНИХ МОДЕЛЕЙ

Гамбаров Л. А., д.т.н., професор,
Шевченко С. В., к.т.н., доцент,
Чернишова Н. П., к.т.н., доцент (НТУ «ХПІ»)
Свєтлова Л. Ф. ст.наук.співробітник
(Інститут інформатики і управління НАН і МОН України)

Багатоетапні транспортні моделі займають особливе місце серед задач математичного програмуванні. При деталізованому підході до їх розв'язання, з описом елементарних актів управлінської діяльності, виникає проблема пошуку екстремуму алгоритмічної функції на безлічі алгоритмічних обмежень в умовах високої розмірності простору змінних. В таких випадках має сенс застосовувати параметричну декомпозицію, пов'язану з проблемами негладкої оптимізації опуклих функцій багатоетапних транспортних моделей. У статті розглянуто застосування алгоритму найшвидшого спуску для розв'язання таких задач.

Ключові слова: виробничо-транспортне планування, багатоетапна транспортна модель, блокова структура, негладка оптимізація, градієнтні методи, алгоритми.

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ МНОГОЭТАПНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ МОДЕЛЕЙ

Гамбаров Л. А., д.т.н., профессор,
Шевченко С. В., к.т.н., доцент,
Чернышева Н. П., к.т.н., доцент (НТУ «ХПИ»),
Светлова Л. Ф. ст.науч.сотрудник
(Институт информатики и управления НАН и МОН Украины)

Многоэтапные транспортные модели занимают особое место среди задач математического программирования. При детализированном подходе к их решению, с описанием элементарных актов управленческой деятельности, возникает проблема поиска экстремума алгоритмической функции на множестве алгоритмических ограничений в условиях высокой размерности пространства переменных. В таких случаях имеет смысл применять параметрическую декомпозицию, связанную с проблемами негладкой оптимизации выпуклых функций многоэтапных транспортных моделей. В статье рассмотрено применение алгоритма наискорейшего спуска для решения таких задач.

Ключевые слова: производственно-транспортное планирование, многоэтапная транспортная модель, блочная структура, негладкая оптимизация, градиентные методы, алгоритмы.

PARAMETRIC DECOMPOSITION OF THE MULTI-PHASE TRANSPORT MODELS

Gambarov L. A., Doctor of Technical Sciences, professor,
Shevchenko S. V., Ph.D, associate professor,
Chernysheva N. P., Ph.D, associate professor (NTU "KPI"),
Svetlova L. F. senior researcher (Institute of informatics and management of the national Academy of Sciences and Misnistry of education and science of Ukraine)

Flighted transport models occupy a special place among the problems of mathematical programming. With granular approach to their solution, describing the elementary acts of administrative activity, there arises the problem of the extremum of algorithmic functions on the set of algorithmic restrictions in the conditions of high dimensionality of the space of variables. Given that multi-stage transportation problem has a block structure with a small number of links, it makes sense to use such decomposition schemes that lead to the problem of minimizing nonsmooth convex piecewise-linear function of the related parameters, relevant constraints of the problem in a binder. The most promising and appropriate for solving such problems is the approximate analytical description of the object of management and development of approaches for solving the problem of finding an extremum algorithmic functions on the set of algorithmic constraints in high dimensional space of the variables of the problem and the limited time calculations. In such cases, it makes sense to use a parametric *decomposition associated with nonsmooth optimization problems of convex functions, multi-phase transport models. The article considers the application of the algorithm steepest descent algorithm for solving such problems.*

Keywords: production and transport planning transport multistage model, block structure, nonsmooth optimization, gradient methods, algorithms.

Постановка проблеми та її зв'язок з науковими чи практичними завданнями. Задачі оптимального планування математично належать до екстремальних задач, в яких необхідно визначити екстремум функції при певних обмеженнях. Транспортні задачі займають особливе місце серед таких задач, що пояснюється актуальністю проблеми транспортних перевезень в економіці. В багатоетапних задачах, пов'язаних у часі, процес планування складається з декількох етапів, на кожному з яких визначається екстремум функції з урахуванням можливих варіантів на попередніх етапах. Оскільки класичні методи мало ефективні для розв'язання багатоетапних транспортних задач, так як вимагають значного обсягу обчислень, має сенс використовувати спеціальні методи, які значно простіше. Одним з таких напрямків є параметрична декомпозиція, яка пов'язана з проблемами негладкої оптимізації опуклих функцій і обґрунтуванням алгоритму неповношагової лінеаризації, а також із завданням оптимізації багатоетапних транспортних моделей.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В даний час створено цілий арсенал економіко-математичних моделей виробничо-транспортного планування, що відображає різні особливості галузевих задач.

Дослідженню теоретичних підходів системної оптимізації до розв'язання таких задач присвячені роботи таких відомих науковців , як: В. Макаров [1] , В. Глушков [7] та ін.

Серед вчених-математиків, які приділили увагу проблемам параметричної оптимізації слід визначити: Н. Шора [2, 3], М. Сергієнка [4], Л. Раскіна [5] та ін.

Аналіз існуючих економіко-математичних моделей показує, що досліджувані в них критеріальні функції мають властивості, які досить добре вивчені, як правило, використовується апарат лінійного, нелінійного і стохастичного програмування. Центр тяжіння досліджень лежить у сфері побудови ефективних алгоритмів вирішення подібного класу задач і вдосконалення відповідного апарату математичного програмування.

Незважаючи на загальнонаукову і практичну значимість робіт цього напрямку, подібний підхід, що став вже традиційним, до постановки та вирішення оптимізаційних виробничо-транспортних завдань не є ефективним при поточному плануванні в силу притаманних йому істотних недоліків. До числа останніх необхідно віднести наступні:

– збільшеність параметрів і обмежень моделей;

– неповний облік специфіки досліджуваних галузевих систем;

– переважання екзогенних характеристик стану галузевих систем над ендогенними, що обмежує реалізацію потенційних можливостей системи планування;

– відсутність обліку характеристик систем споживання.

Проблема поточного виробничо-транспортного планування складна і не може бути вирішена подібним чином. Подолати зазначені недоліки можна, якщо відмовитися від традиційного підходу і копіювати не зовнішню сторону модельованого об'єкта, а його внутрішню структуру в такій мірі деталізації , яка дозволяє описувати елементарні акти господарської та управлінської діяльності, а також результати здійснення цих елементарних актів [1]. При цьому виникає проблема пошуку екстремуму алгоритмічної функції на безлічі алгоритмічних обмежень в умовах високої розмірності простору змінних і обмеженого часу розрахунків [2-4].

Виділення невирішених частин загальної проблеми. Незважаючи на значну кількість наукових робіт, недостатньо опрацьованим залишаються питання, які висвітлюють багатоетапність транспортних задач, потребують уточнення підходи та приблизні методи оптимізації в алгоритмічних моделях, що описують елементарні акти господарської та управлінської діяльності в достатній мірі деталізації. У зв'язку з цим, ***метою статті є*** обґрунтування застосування механізмів параметричної декомпозиції для багатоетапних транспортних моделей , а також використання методу найшвидшого спуску стосовно негладкої опуклої кусково-лінійної цільової функції відповідних задач.

Виклад основного матеріалу. Очевидно, що перебір варіантів рішення або випадковий пошук екстремуму пов'язані з непереборними обчислювальними труднощами при дослідженні функцій із зазначеними властивостями. Найбільш перспективний підхід до вирішення таких задач приводить до доцільності наближеного (аналітичного) опису об'єкта управління та використання напрямку спуску функції мети цієї наближеної моделі в якості оцінки напрямку спуску початкової алгоритмічної функції. Реалізація цього підходу до вирішення проблеми поточного виробничо-транспортного планування передбачає розробку відповідних моделей, методів і алгоритмів, що дозволяють здійснити наближений (аналітичний) опис об'єкта управління. Вирішенню цієї проблеми і присвячена ця робота.

Не порушуючи спільності міркувань, розглянемо двоетапну транспортну задачу, яка полягає у знаходженні плану транспортувань неоднорідного ресурсу l з пунктів виробництва $i \in I$ в пункти споживання $\lambda \in \Lambda$ в умовах складської форми постачання, який мінімізує загальні витрати.

Модель задачі має вигляд: знайти

$$x_2^*:\ min\left\{F_2(x_2) = \sum_{i\in I}\sum_{k\in K}\sum_{l\in L} c_{ikl}^{(1)} x_{ikl}^{(1)} + \sum_{k\in K}\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{l\in L} c_{k\lambda l}^{(2)} x_{k\lambda l}^{(2)} | x_2 \in X_2\right\} = F_2(x_2^*)$$

де X_2 - безліч векторів, що задовольняють обмеженням

$$\sum_{k\in K} x_{ikl}^{(1)} = a_{il}, \quad i \in I = \{1, \dots, r_1\}, l \in L = \{1, \dots, q\},$$

$$\sum_{i\in I} x_{ikl}^{(1)} = \sum_{\lambda\in\Lambda} x_{k\lambda l}^{(2)}, k \in K = \{1, \dots, r_2\}, l \in L,$$

$$\sum_{k\in K} x_{k\lambda l}^{(2)} = b_{\lambda l}, \quad \lambda \in \Lambda = \{1, \dots, r_3\}, l \in L,$$

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{l\in L} x_{k\lambda l}^{(2)} \le d_k, \quad k \in K,$$

$$x_{ikl}^{(1)} \ge 0,\ x_{k\lambda l}^{(2)} \ge 0, i \in I, k \in K, \lambda \in \Lambda, l \in L.$$

Ця модель є узагальненням відомої в літературі транспортної задачі з проміжними центрами, яка пов'язана з відшуканням плану транспортувань однорідної продукції. Нехай кількість номенклатур $q = 1$ і виконується умова

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda = \sum_{k\in K} d_k$$

тоді початкова модель розпадається на дві незалежні двохіндексні транспортні моделі. Проте в даному випадку

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda \le \sum_{k\in K} d_k \ ,$$

що дозволяє здійснити перехід до трипланарної транспортної задачі і скористатися узагальненням [5] відомого методу потенціалів для вирішення двохіндексної транспортної задачі. З іншого боку, коли число етапів транспортної моделі $m > 2$, то застосування зазначеного прийому призводить до проблеми багатоіндексності та, як наслідок, до проблеми розмірності задач лінійного програмування. Зрозуміло, що зростання числа індексів у змінних до трьох, навіть при $m = 2$, різко збільшує розмірність задачі і робить принципово неможливим її рішення простими способами, подібними методу потенціалів і його модифікаціям. Використання ж методів лінійного програмування при значних r_1, r_2, r_3, q (точніше, при досить великому значенню їх добутку) також утруднено через зростання розмірності.

Основна особливість даної задачі математичного програмування полягає в тому, що вона має блокову структуру з порівняно невеликим числом зв'язків між блоками. Ці зв'язки визначені наступними обмеженнями

$$\sum_{i\in I} x_{ikl}^{(1)} = \sum_{\lambda\in\Lambda} x_{k\lambda l}^{(2)} = h_{kl}, \quad k \in K = \{1, \dots, r_2\}, l \in L.$$

Тоді використання схеми декомпозиції приводить до задачі мінімізації негладкої функції [6] від зв'язаних змінних (параметрів) h_{kl}, $k \in K$, $l \in L$, які є відповідні до зв'язуючих обмежень.

Таким чином, якщо передбачити, що $h_{kl} = \bar{h}_{kl}$, визначені, то початкова модель розпадається на $2q$ незалежних двохіндексних транспортних моделей.

Для першої групи моделей завдання полягають у відшуканні

$$x_1^{(1)*}:\ min\left\{F_1\left(x^{(1)}\right) = \sum_{i\in I}\sum_{k\in K} c_{ikl}^{(1)} x_{ikl}^{(1)} \ | x_1^{(1)} \in X_1^{(1)}\right\} = F_1\left(x_1^{(1)*}\right),$$

де $X_1^{(1)}$ - безліч векторів, що задовольняють обмеженням

$$\sum_{k\in K} x_{ikl}^{(1)} = a_{il}, \quad i \in I,$$

$$\sum_{i\in I} x_{ikl}^{(1)} = \bar{h}_{kl}, \quad k \in K,$$

$$x_{ikl}^{(1)} \ge 0, \quad i \in I, k \in K.$$

Для другої групи моделей завдання полягають у відшуканні

$$x_1^{(2)*}:\ min\left\{F_1\left(x^{(2)}\right)=\sum_{k\in K}\sum_{\lambda\in\Lambda}c_{k\lambda l}^{(2)}\,x_{k\lambda l}^{(2)}\ \ |x_1^{(2)}\in X_1^{(2)}\right\}=F_1\left(x_1^{(2)*}\right),$$

де $X_1^{(2)}$ - безліч векторів, що задовольняють обмеженням

$$\sum_{\lambda\in\Lambda}x_{k\lambda l}^{(2)}=\bar{h}_{kl},\qquad k\in K,$$

$$\sum_{k\in K}x_{k\lambda l}^{(2)}=b_{\lambda l},\qquad \lambda\in\Lambda,$$

$$x_{k\lambda l}^{(2)}\geq 0,\qquad k\in K,\lambda\in\Lambda.$$

Введемо до розгляду вектор $h_2=\{h_{kl}\}$. Оптимальне значення $F_1\left(x^{(1)*}\right)$ функції цілі при $\bar{h}_2=h_2$ позначимо через $f_1^{(l)}(h_2)$. Остання визначена, безперервна і є опуклою кусково-лінійною функцією на безлічі $H_2^{(0)}$, що задається умовами

$$\sum_{k\in K}h_{kl}=\sum_{i\in I}a_{il}\ ,\qquad l\in L,$$

$$h_{kl}\ \geq 0,\qquad k\in K,l\in L.$$

Аналогічно знаходиться функція $f_1^{(l)}(h_2)$.

Визначення оптимальних наборів $x_2^{(1)*}=\left\{x_{ikl}^{(1)*}\right\}$ і $x_2^{(2)*}=\left\{x_{k\lambda l}^{(2)*}\right\}$ початкової задачі, що задовольняють вимозі

$$min\{F_2(x_2)\ \ |x_2\in X_2\}=F_2(x_2^*)\ ,$$

пов'яжемо із завданням побудови послідовності $\{\bar{h}_{kl}(s)\}$, *де* s - номер кроку, $s=1,2,\ldots$.

Розглянемо функцію

$$\Phi_2(h)=\sum_{l\in L}\left(f_1^{(l)}(h_2)+f_1^{(l)}(h_2)\right)$$

і поставимо завдання: знайти вектор $h_2^*\in H_2\supset H_2^{(0)}$, такий, що

$$min\{\Phi_2(h_2)\ \ |h_2\in H_2\}=\Phi_2(h_2^*)$$

де H_2 - опукла безліч.

Очевидно, що для *m*-етапної транспортної задачі функція $\Phi(h)$ має наступний вигляд

$$\Phi_m(h_m)=\sum_{l\in L}\sum_{\omega\in\Omega}f_\omega^{(l)}$$

де $\Omega=\{1,\ldots,m\geq 2\}$.

Таким чином, початкову задачу лінійного програмування ми звели до задачі мінімізації опуклої кусково-лінійної функції $\Phi_m(h_m)$ на опуклій безлічі $H_m\subset H_m^{(0)}$. Зрозуміло, що вирішення питання про формування безлічі H_m, яка задовольняє вказаним вище вимогам, завершує процедуру побудови моделі задачі негладкої оптимізації. Проте, це рішення не є тривіальним. Охарактеризуємо *детальніше* проблему формування допустимої області H_m*, що має місце.*

В даний час в математичному програмуванні можна виділити наступні основні напрями: перший з них пов'язан з побудовою математичних моделей, а другий - з розвитком математичних методів і вдосконаленням відповідних їм обчислювальних схем. Вказані напрями, не є незалежними, а це означає, що моделі доводиться пристосовувати до існуючих методів. Аналіз обчислювальних схем дозволяє більш обґрунтовано, чим теорія, казати про достоїнства того або іншого алгоритму і, отже, ефективності вживаного методу для певного класу задач. З іншого боку, напрям розробок обчислювальних схем повинен визначатися цілями операції, яка проводиться, і, як правило, ці цілі володіють рядом особливостей. Основна з них полягає в тому, що задача відшукання $h_m^*\in H_m$ замінюється на задачу пошуку $\hat{h}_m^*\in H_m$, яка задовольняє вимозі

$$min\{f_m(h_m)\ \ \ |h_{m\in}\in H_m\}=f_m\left(\hat{h}_m^*\right),\qquad(1)$$

де $f_m\left(\hat{h}_m^*\right)$ - алгоритмічний функціонал оптимізаційної задачі виробничо-транспортного планування. А це означає, що напрямок розробок відповідних обчислювальних схем відшукання $h_m^*\in H_m$ не повинен бути пов'язан з високими вимогами до точності обчислень $\Phi_m(h_m^*)$. В той же час умова (1), будучи критерієм зупинки обчислювального процесу відшукання $\hat{h}_m^*\in H_m$ і, отже, знаходження функції $\Phi_m\left(\hat{h}_m^*\right)$, одночасно пред'являє вимоги до швидкості практичної збіжності розроблюваних алгоритмів. Останнє пояснюється обмеженістю часу, відведеного для проведення імітаційного експерименту, що дозволить в цих умовах реалізувати велику кількість імітаційних прогонів і, таким чином, підвищити точність обчислень, пов'язаних з пошуком вектора $\hat{h}_m^*\in H_m$, який задовольняє (1).

Наступною важливою ознакою розроблюваних алгоритмів розв'язання багатоетапних транспортних задач є умова монотонності. Виконання останньої, з одного боку, збільшує трудомісткість обчислювального процесу відшукання $\hat{h}_m^* \in H_m$, а з іншого сприяє підвищенню ефективності процедури системної оптимізації [7], так як з'являється можливість звуження допустимої області H_m в ході проведення імітаційного експерименту. Очевидно, що звуження допустимої області H_m буде впливати на точність визначення $\hat{h}_m^*$ в умовах обмеженого рахункового часу.

Таким чином, конструктивна побудова допустимої області H_m повинна припускати можливість використання таких методів, обчислювальні схеми яких не суперечать вимогам відносної простоти, обчислювальної ефективності та монотонності.

Пропонується наступний підхід до формування допустимої області H_m.

Тут також, не порушуючи спільності міркувань, будемо розглядати двоетапну транспортну задачу, пов'язану з пошуком вектора $h^* \in H$, що задовольняє вимогу

$$min\left\{\Phi(h) = \sum_{i\in I}\left(f_1^{(i)}(h) + f_1^{(i)}(h)\right) \mid h \in H\right\} = \Phi(h^*). \qquad (2)$$

Припустимо, що $H_s(\varepsilon)$ - безліч векторів $h(s+1) = \{h_{kl}(s+1)\}$, що задовольняють вимогам

$$\sum_{k\in K} h_{kl}(s+1) = \sum_{i\in I} a_{il}, \quad l \in L,$$

$$\sum_{l\in L} h_{kl}(s+1) \le d_k, \quad k \in K,$$

$$h_{kl}(s+1) \ge (1-\varepsilon)\bar{h}_{kl}(s), \quad k \in K, l \in L,$$

де $\bar{h}_{kl}(s)$ - вектори обрані на (s-1)-м кроці, $\varepsilon \in [1,0]$, $s = 1, 2, \ldots$, а безліч H моделі не залежить від s, тобто $H = H_s(1)$.

Позначимо через $g_{\Phi}(h)$ субградієнт функції $\Phi(h)$ і вирішимо задачу відшукання $(\tilde{h}(s+1))^{\sim} \in H_s(\varepsilon)$, такого, що мінімізує функцію

$$L(h(s+1)) = (g_{\Phi}\left(\bar{h}(s)\right), \ h(s+1)),$$

яка є скалярним добутком відповідних векторів. Субградієнт $g_{\Phi}\left(\bar{h}(s)\right)$ виразимо через двоїсті оцінки моделей відповідних задач. Тоді сформульовану задачу можна переписати у вигляді: знайти

$$\tilde{h}(s+1): min\left\{L(h(s+1)) = \sum_{k\in K}\sum_{l\in L}(v_{kl}(s) - \tilde{u}_{kl}(s))h_{kl}(s+1) \mid h(s+1) \in\in H_s(\varepsilon)\right\}$$
$$= L\left(\tilde{h}(s+1)\right) \qquad (3)$$

де $v_{kl}(s)$, $k \in K, l \in L$ - оптимальні двоїсті оцінки вимог

$$\sum_{i\in I} x_{ikl}^{(1)} = \bar{h}_{kl}(s), \quad k \in K, \qquad l \in L,$$

а $\tilde{u}_{kl}(s)$, $k \in K$, $l \in L$ - оптимальні двоїсті оцінки вимог

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} x_{kl l}^{(2)} = \bar{h}_{kl}(s), \quad k \in K, \qquad l \in L.$$

Для визначення $\bar{h}(s+1) = \bar{h}(s+1)$ використовується задача наступного виду: знайти

$$\varepsilon = \varepsilon(s): min\left\{\Phi\left(\tilde{h}(s+1)\right) \mid \tilde{h}(s+1) \in H_s(\varepsilon), 1 \ge \varepsilon \ge 0\right\} = \Phi\left(\bar{h}(s+1)\right). \quad (4)$$

Вона припускає розв’язання послідовності допоміжних задач (3), в яких ε вибирається з певним кроком дискретності, починаючи з $\varepsilon = 1$. Як $\bar{h}(s+1)$ береться рішення $\tilde{h}(s+1)$ допоміжної задачі (3) при $\varepsilon = \varepsilon(s)$, на якій досягається мінімум функції $\Phi\left(\tilde{h}(s+1)\right)$ з дискретних значень ε.

Ітеративний процес визначення рішення h^* задачі (2) полягає в наступному.

Задається вектор $\bar{h}(1) \in H_s(1)$. Його можна знайти, наприклад, за формулами

$$h_{kl} = d_k \sum_{i\in I} a_{il} \Big/ \sum_{k\in K} d_k, \qquad k \in K, l \in L. \qquad (5)$$

Співвідношення (5) означають, що через проміжні вузли проходять потоки, пропорційні до їх пропускних можливостей. Для будь-якого $s \geq 1$ вектор $\bar{h}(s+1)$ визначається на ітерації s, що включає кілька етапів.

1. Обчислюється $\Phi(h(s))$ шляхом вирішення $2q$ незалежних транспортних задач будь-яким методом, наприклад, потенціалів, що дозволяє отримати оптимальні двоїсті оцінки.
2. Визначається субградієнт $g_{\Phi}(h(s))$.
3. Вирішується задача (4) для знаходження оптимального значення $\varepsilon = \varepsilon(s)$ і знаходження $\bar{h}(s+1)$.

Розглянута обчислювальна схема є різновидом методу лінеаризації. Її основна особливість полягає в тому, що область лінійної апроксимації є змінною. Ця обставина дає можливість розглянути одне параметричне сімейство напрямків спуску і вибрати, в певному сенсі, найбільш доцільне.

Зі сказаного випливає, що кожний напрямок спуску, який визначається субградієнтом $g_{\Phi}(h(s))$ у відповідності із заданим правилом, є функцією параметра (крокового множника) ε. Визначимо поняття «повний крок». Останнє пов'язане з такою організацією обчислювального процесу розв'язання задачі (4), коли для будь-якого номеру $s \geq 1$ параметр ε вибирається з певним кроком дискретності в інтервалі [1,0]. Алгоритм лінеаризації, що задовольняє вказаній вимозі, будемо називати повнокроковим. Однак у розглядуваному випадку обчислювальний процес розв'язання задачі (4) організовано таким чином, що для будь-якого номера $s \geq 1$ кроковий множник $\varepsilon = \varepsilon(s)$ вибирається в інтервалі $[\varepsilon(s-1), 0]$. Така обчислювальна схема істотно знижує обсяг обчислень і дозволяє її визначити як алгоритм неповнокрокової лінеаризації.

Висновки. Таким чином, в статті, визначено підхід до звуження в ході імітаційного експерименту припустимої області рішень багатоетапної транспортної задачі та використання субградієнту функції цілі, який задає напрям спуску для пошуку оптимального рішення.

Зазначений підхід і запропоновані алгоритми мають широке практичне значення для розв'язання суттєвих економічних питань для державних та приватних підприємств, зокрема, для вирішення задачі узгодження обсягів виробництва електроенергії із потребами на її попит в умовах функціонування балансуючого енергоринку України. Так, якщо враховувати, що електроенергія поступає споживачам через проміжні вузли (гідроакумулюючі станції), то знаходження оптимального плану транспортування цього ресурсу при мінімізації витрат досить ефективно може бути вирішено з використанням багатовимірної моделі транспортної задачі.

Перспективним напрямком подальших досліджень вважаємо використання приблизних методів оптимізації стосовно задач мінімізації негладких опуклих кусково-лінійних функцій від зв'язаних параметрів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Макаров В.Л. О развитии экономико-математического инструментария на современном этапе / В.Л. Макаров // Экономика и математические методы. – 1986. – №3. – С. 412-415.
2. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения / Н.З. Шор. – Киев, Наукова думка, 1979. – 199 с.
3. Шор Н.З. Обобщенные градиентные методы минимизации негладких функций и их применение к задачам математического программирования / Н.З. Шор // Экономика и математические методы. – 1976. – 12, № 2. – С. 337-356.
4. Сергиенко, И.В. Модели и информационные технологии для поддержки принятия решений при проведении структурно-технологических преобразований / И.В. Сергиенко, М.В. Михалевич, П.И. Стецюк, Л.Б. Кошлай // Кибернетика и системный анализ. — 2009. — № 2. — С. 26-49.
5. Раскин Л.Г. Многоиндексные задачи линейного программирования. Теория, методы, приложения / Л.Г. Раскин, И.О. Кириченко. – М. Радио и связь, 1982. – 240 с.
6. Гамбаров Л.А. Об одном методе декомпозиции многопродуктовой транспортной задачи с промежуточными узлами / Л.А. Гамбаров // Экономика и математические методы. – 1987. — № 1. — С. 165– 168.
7. Глушков В.М. О системной оптимизации // Кибернетика. – 1980. -№5. – С. 89-90.

***Рецензент** д.е.н., професор НТУ «ХПІ» Кузьминчук Н.В.*
***Експерт редакційної колегії** к.е.н., доцент УкрДАЗТ Єлагін Ю.В.*