

УДК 621.383

В.В. Кухарчук, д.т.н.  
Ю.Г. Ведміцький**УТОЧНЕНІ МАТЕМАТИЧНІ І ЕЛЕКТРИЧНІ МОДЕЛІ  
ПОЗИЦІЙНО-ЧУТЛИВИХ ДЕТЕКТОРІВ**

Вінницький національний технічний університет, e-mail: wjug@ukr.net

В роботі на основі поглибленого опису фізичних процесів, які спостерігаються у вимірювальних каналах з позиційно-чутливими детекторами, розроблено їх уточнені математичні і електричні моделі.

**Ключові слова:** позиційно-чутливий детектор, математична і електрична моделі, система з зосередженими і розподіленими параметрами, статичний і динамічний режими роботи.

**Вступ**

Задля проведення операцій вимірювального перетворення механічних фізичних величин в електричні в сучасних засобах вимірювання і контролю одним із перспективних напрямків є використання оптико-електронних пристроїв і систем, принцип роботи яких базується на просторово-оптичній модуляції [1, 2] із застосуванням *позиційно-чутливих детекторів* (ПЧД) [3, 4]. В першу чергу це пов'язано з тим, що в окремих випадках такі системи за своїми експлуатаційними характеристиками (точністю, динамічним діапазоном, стабільністю і надійністю роботи, лінійністю перетворення тощо) виявляють більшу практичну придатність, а по-друге, сучасні технології обробки матеріалів дозволяють виготовляти багатофункціональні ПЧД в інтегральному виконанні з надзвичайно малими габаритами та низькою собівартістю.

Як відомо [3, 4], ПЧД являє собою – інтегрально виконаний пристрій, аналогові (цифрові) вихідні сигнали якого пропорційні положенню енергетичного центра світлової плями розсіювання в активній області чутливої поверхні кремнієвої або германієвої фотодіодної пластини. Це пов'язано з фотострумом, що генерується в місці падіння світлового променя і розділяється на декілька струмових компонент, які, як про це заявляють виробники ПЧД, є *лінійно* залежними від координати місцерозташування світлової плями, у зв'язку з чим наводять відповідні рівняння перетворення, наприклад, [3]. Оскільки в чисельних літературних джерелах [3-6] адекватного математичного обґрунтування цих рівнянь не наведено, що унеможливило посилення на них, а даної інформації в інших доступних джерелах немає, наразі виникає необхідність:

- по-перше, перевірки опублікованих результуючих формул рівнянь перетворення;
- по-друге, визначення області їх застосування;
- по-третє, побудови уточнених математичних моделей ПЧД, які описуватимуть не тільки статичні режими роботи цих систем, але і динамічні.

Розв'язання даних задач і буде *основною метою* роботи. Для їх вирішення оберемо два підходи.

**ПЧД як електрична система з розподіленими параметрами**

Провідними компаніями, які здійснюють розробку та виробництво ПЧД (Hamamatsu Photonics К. К. (Японія), Sharp (Японія), Op-TRAK Photonics, Inc. (США, Каліфорнія), Sitek (Швеція) та ін.), на ринку представлено два їх різновиди – одновимірні і двовимірні ПЧД. Надалі розглядатимемо тільки перший з них. В *одновимірних* ПЧД (рис. 1, а) активну поверхню виготовлено в формі вузької смуги, вздовж якої і переміщується енергетичний центр світлової плями розсіювання. Система ПЧД є системою з *розподіленими параметрами*. Для одновимірної структури її математичною моделлю буде система диференціальних рівнянь в частинних похідних (телеграфні рівняння) [7]

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}, \end{cases} \quad (1)$$

де  $R_0$ ,  $L_0$ ,  $G_0$ ,  $C_0$  – погонні параметри одновимірної пластини (рис. 1, б);

$u = u(t, x)$ ,  $i = i(t, x)$  – миттєві напруга і струм, розподілені вздовж цієї пластини.

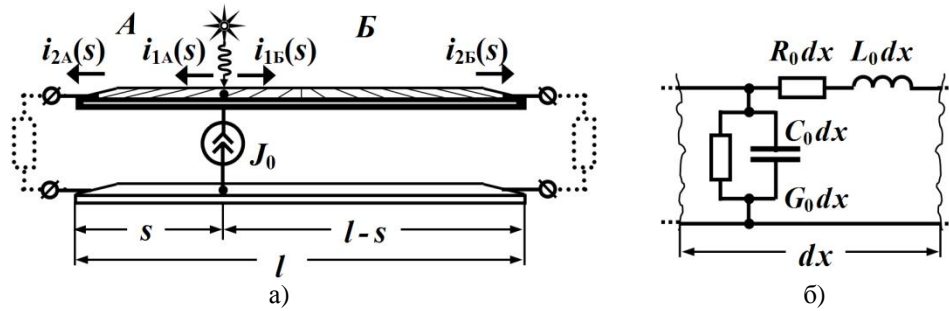


Рис. 1. Одновимірний ПЧД як система з розподіленими параметрами

Отже, миттєві напруга і струм є функціями від двох змінних – часу і просторової координати. Це дозволяє, якщо тільки скористатися інтегральним перетворенням Лапласа [8]

$$U(p, x) = \int_0^{\infty} u(t, x) e^{-pt} dt, \quad I(p, x) = \int_0^{\infty} i(t, x) e^{-pt} dt,$$

перейти від диференціальних рівнянь в частинних похідних (1) до звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку, складених відносно зображення напруги або струму

$$\frac{d^2 U(p, x)}{dx^2} = Z_0(p) Y_0(p) U(p, x), \quad \frac{d^2 I(p, x)}{dx^2} = Z_0(p) Y_0(p) I(p, x),$$

де  $Z_0(p) = R_0 + pL_0$ ,  $Y_0(p) = G_0 + pC_0$ .

Розв'язками цих рівнянь, як відомо, будуть функції

$$U(p, x) = A_1(p) e^{\gamma(p)x} + A_2(p) e^{-\gamma(p)x},$$

$$I(p, x) Z_{xs}(p) = -A_1(p) e^{\gamma(p)x} + A_2(p) e^{-\gamma(p)x},$$

де  $A_1(p)$  і  $A_2(p)$  залежать від крайових умов, а

$$Z_{xs}(p) = \sqrt{Z_0(p)/Y_0(p)}, \quad \gamma(p) = \sqrt{Z_0(p)Y_0(p)}.$$

Після математичних перетворень, пов'язаних із визначенням функцій  $A_1(p)$  і  $A_2(p)$  через зображення вхідних напруги  $U_1(p) = U(p, 0)$  і струму  $I_1(p) = I(p, 0)$ , із вище наведеного впливає система рівнянь, складена в гіперболічних функціях

$$\begin{cases} U(p, x) = ch[\gamma(p)x] U_1(p) - Z_{xs}(p) sh[\gamma(p)x] I_1(p), \\ I(p, x) = -sh[\gamma(p)x] / Z_{xs}(p) U_1(p) - ch[\gamma(p)x] I_1(p), \end{cases} \quad (2)$$

яка і описує розподіл зображень напруги і струму в одновимірному ПЧД.

Систему рівнянь (2) візьмемо за основу для наступних міркувань. Будь-яке поточне положення  $s$  енергетичного центру світлової плями на поверхні смуги ПЧД поділяє її на дві частини, які умовно позначимо як  $A$  і  $B$  (рис. 1, а). Кожна з цих частин має свою довжину. Довжина першої з них дорівнює  $l_A = s$ , а другої –  $l_B = l - s$ , де  $l$  – повна довжина одновимірної пластини ПЧД. Наразі оберемо дану поточну точку падіння світлового променя за точку початку відліку координатної змінної  $x$  як для однієї частини пластини  $A$ , так і для другої  $B$ , тобто для цієї точки в обох випадках  $x = 0$ , а координатами точок, що відповідають кінцям частин  $A$  і  $B$  пластини ПЧД, будуть  $x = l_A = s$  і  $x = l_B = l - s$  відповідно.

В поточній точці падіння світлового променя внаслідок фотоефекту генерується електричний струм. Це еквівалентно розташуванню в означеній точці джерела із струмом  $J_0$ , який створює на початку і на кінцях двох означених частин пластини ПЧД електричні струми із функціями зображень

$$I_{1A}(p) = I_{1A}(p, 0), \quad I_{1B}(p) = I_{1B}(p, 0), \quad I_{2A}(p) = I_{2A}(p, l_A), \quad I_{2B}(p) = I_{2B}(p, l_B)$$

відповідно. Відносно джерела струму пластини з'єднано паралельно, тоді

$$I_{1A}(p) = J_0(p) \frac{Z_{exB}(p)}{Z_{exA}(p) + Z_{exB}(p)}, \quad I_{1B}(p) = J_0(p) \frac{Z_{exA}(p)}{Z_{exA}(p) + Z_{exB}(p)},$$

де  $Z_{exA}(p)$  і  $Z_{exB}(p)$  – вхідні опори (відносно точки падіння променя) обох частин пластини ПЧД, навантажених ззовні опорами  $Z_{нA}(p)$  і  $Z_{нB}(p)$ .

Вхідні опори визначаються за формулою

$$Z_{ex}(p) = Z_{xв}(p) \frac{Z_{н}(p) \operatorname{ch}[\gamma(p)x] + Z_{xв}(p) \operatorname{sh}[\gamma(p)x]}{Z_{xв}(p) \operatorname{ch}[\gamma(p)x] + Z_{н}(p) \operatorname{sh}[\gamma(p)x]},$$

яку нескладно отримати з рівнянь (2), де для першої частини пластини ПЧД  $x = l_A = s$ , а для другої її частини відповідно  $x = l_B = l - s$ .

Система рівнянь (2) також дозволяє отримати формулу для розрахунку зображень струмів  $I_{2A}(p) = I_{2A}(p, l_A)$  і  $I_{2B}(p) = I_{2B}(p, l_B)$  через  $I_{1A}(p) = I_{1A}(p, 0)$  і  $I_{1B}(p) = I_{1B}(p, 0)$  відповідно. Так, наприклад, для зображення струму в кінці частини  $A$  пластини позиційно чутливого детектора з (2) маємо

$$I_{2A}(p) = I_{1A}(p) \left\{ \operatorname{ch}[\gamma(p)l_A] + \frac{Z_{нA}(p)}{Z_{xв}(p)} \operatorname{sh}[\gamma(p)l_A] \right\}^{-1}.$$

В загальному випадку дана формула має складний характер, тому розглянемо окремий з можливих випадків і дещо спростимо вираз, прирівнявши до нуля опір навантаження  $Z_{нA}(p)$ . Це цілком допустимо, оскільки відображення переміщення здійснюється в електричний струм. Після додаткових перетворень для зображення струму в кінці частини  $A$  пластини ПЧД, як функції від місцерозташування енергетичного центра світлової плями, остаточно запишемо

$$I_{2A}(p, s) = J_0(p) \frac{\operatorname{sh}[(l-s)\sqrt{(R_0 + pL_0)(G_0 + pC_0)}]}{\operatorname{sh}[l\sqrt{(R_0 + pL_0)(G_0 + pC_0)}]}. \quad (3)$$

На підставі подібних перетворень отримаємо зображення струму в кінці частини  $B$

$$I_{2B}(p, s) = J_0(p) \frac{\operatorname{sh}[s\sqrt{(R_0 + pL_0)(G_0 + pC_0)}]}{\operatorname{sh}[l\sqrt{(R_0 + pL_0)(G_0 + pC_0)}]}. \quad (4)$$

Рівняння (3) і (4) отримано із врахуванням і розподіленого характеру параметрів пластини ПЧД, і енергетичних взаємоперетворень, пов'язаних із розсіюванням електромагнітної енергії та її концентрацією в електричному і магнітному полях пластини. Аналіз цих рівнянь доводить відсутність для загального випадку лінійної залежності між переміщенням  $s$  і зображеннями струмів на вихідних електродах ПЧД. Оскільки інтегральному перетворенню Лапласа притаманна властивість лінійності, це означає, що в загальному випадку лінійної залежності не буде і в самих оригіналах – миттєвих струмах  $i_{2A}(t, s) = L^{-1}\{I_{2A}(p, s)\}$  і  $i_{2B}(t, s) = L^{-1}\{I_{2B}(p, s)\}$ .

Водночас, як показує дослідження (3) і (4), ці функції все ж вироджуються в лінійні, однак тільки за єдиної умови, коли водночас  $G_0 \rightarrow 0$ ,  $L_0 \rightarrow 0$  і  $C_0 \rightarrow 0$

$$i_{2A}(t, s) = L^{-1} \left\{ J_0(p) \lim_{\substack{G_0 \rightarrow 0 \\ L_0 \rightarrow 0 \\ C_0 \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{sh}[(l-s)\sqrt{(R_0 + pL_0)(G_0 + pC_0)}]}{\operatorname{sh}[l\sqrt{(R_0 + pL_0)(G_0 + pC_0)}]} \right\} = L^{-1} \left\{ J_0(p) \frac{l-s}{l} \right\} = J_0(t) \frac{l-s}{l},$$

$$i_{2B}(t, s) = L^{-1} \left\{ J_0(p) \lim_{\substack{G_0 \rightarrow 0 \\ L_0 \rightarrow 0 \\ C_0 \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{sh}[s\sqrt{(R_0 + pL_0)(G_0 + pC_0)}]}{\operatorname{sh}[l\sqrt{(R_0 + pL_0)(G_0 + pC_0)}]} \right\} = L^{-1} \left\{ J_0(p) \frac{s}{l} \right\} = J_0(t) \frac{s}{l}, \quad (5)$$

що вимагає нехтування окремими фізичними явищами, які спостерігаються в активній частині пластини ПЧД, вже за умови нерухомості світлової плями, тобто за статичного режиму роботи. Швидкоплинні ж динамічні режими роботи системи ПЧД унеможливають безпосереднє застосування формул рівнянь перетворень, представлених літературними джерелами, а саме

$$i_A(s) = i_{2A}(s) = J_0 \frac{l-s}{l}, \quad i_B(s) = i_{2B}(s) = J_0 \frac{s}{l}, \quad (6)$$

і тому таке нехтування здебільшого є безпідставним.

### ПЧД як електрична система із зосередженими параметрами

Рівняння (6) є статичними. Тому задля врахування інерційності фотоелектричних процесів, зокрема прояву присутності ємності  $C = C_0 x$ , яку виробники (наприклад, Hamamatsu Photonics) пропонують все ж враховувати в своїй еквівалентній схемі ПЧД [3, 4] (і чомусь не роблять цього в робочих формулах), застосуємо другий підхід і наближено розглядатимемо систему ПЧД як систему із *зосередженими параметрами* відповідно до запропонованої виробниками еквівалентної схеми. Як про це вже говорилося вище, у випадку довільного положення світлової плями активну поверхню пластини ПЧД поділено на дві частини в загальному випадку різної довжини  $l_A = s$  і  $l_B = l - s$ . За такої умови лінеаризованою електричною еквівалентною схемою ПЧД буде схема із зосередженими параметрами, яку наведено на рис. 2.

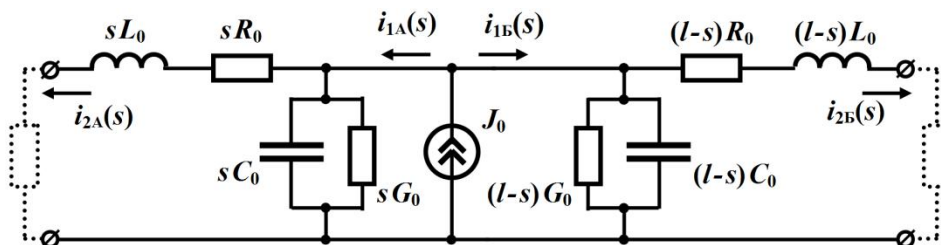


Рис. 2. Еквівалентна схема ПЧД на основі кола із зосередженими параметрами

Провівши розрахунок перехідного процесу в цій схемі, наприклад, операторним методом, неважко показати, що за сталості  $J_0 = const$  та за умов відсутності опору з боку навантажень ПЧД ( $Z_{нA}(p) = Z_{нB}(p) = 0$ ) і прояву параметрів  $G_0$  і  $L_0$  зображеннями струмів на кінцях пластини будуть функції

$$I_{2A}(p, s) = J_0 \frac{l-s}{l} \frac{1}{p [p C_0 R_0 s (l-s) + 1]},$$

$$I_{2B}(p, s) = J_0 \frac{s}{l} \frac{1}{p [p C_0 R_0 s (l-s) + 1]}.$$

а їх оригіналами – миттєві струми

$$i_{2A}(t, s) = J_0 \frac{l-s}{l} \left( 1 - e^{-\frac{t}{s(l-s)R_0C_0}} \right), \quad (7)$$

$$i_{2B}(t, s) = J_0 \frac{s}{l} \left( 1 - e^{-\frac{t}{s(l-s)R_0C_0}} \right). \quad (8)$$

Як доводить аналіз співвідношень (7) і (8), на встановлення лінійності оператора перетворення переміщення  $s$  в електричний струм потрібен час, значення якого має становити щонайменше  $t_m \geq (3 \div 5)\tau$ , де в обох випадках  $\tau = s(l-s)R_0C_0$  – стала часу кола, яка, як видно із формули, окрім параметрів ще залежить і від місцезрештування світлової плями. Свого найбільшого значення вона набуває в точці  $s = l/2$ . Після перехідного процесу рівняння (7) і (8) перетворюються в рівняння (6) і стають лінійними відносно змінної  $s$ . Однак дана обставина накладає обмеження на швидкість  $\dot{s}$  руху світлової плями вздовж пластини ПЧД.

Врахуємо і опишемо її. Тоді, оскільки  $t = \int_{-D/2}^{+D/2} \frac{ds}{\dot{s}}$ , де  $D$  – діаметр енергетичного центра світлової плями, для миттєвих струмів  $i_{2_A}$ ,  $i_{2_B}$  на підставі (7) і (8) маємо

$$i_{2_A}(s, \dot{s}) = J_0 \frac{l-s}{l} \left( 1 - e^{-\frac{1}{s(l-s)R_0C_0} \int_{-D/2}^{+D/2} \frac{ds}{\dot{s}}} \right), \quad i_{2_B}(s, \dot{s}) = J_0 \frac{s}{l} \left( 1 - e^{-\frac{1}{s(l-s)R_0C_0} \int_{-D/2}^{+D/2} \frac{ds}{\dot{s}}} \right).$$

Якщо ж швидкість переміщення  $\dot{s}$  відносно діаметра  $D$  суттєво змінюватися не буде, ці рівняння можна записати наступним чином

$$i_{2_A}(s, \dot{s}) = J_0 \frac{l-s}{l} \left( 1 - e^{-\frac{D}{\dot{s}s(l-s)R_0C_0}} \right) = J_0 \frac{l-s}{l} \cdot k(s, \dot{s}), \quad (9)$$

$$i_{2_B}(s, \dot{s}) = J_0 \frac{s}{l} \left( 1 - e^{-\frac{D}{\dot{s}s(l-s)R_0C_0}} \right) = J_0 \frac{s}{l} \cdot k(s, \dot{s}). \quad (10)$$

Отже, з співвідношень (9) і (10) для миттєвих струмів  $i_{2_A}$  і  $i_{2_B}$  випливає, що їх функції не є тотожними функціям (6), а лише наближаються до них за умови малих значень  $\dot{s}$ .

### Висновки

В даній роботі проведено поглиблене дослідження одновимірної системи позиційно-чутливого детектора як системи, в першому випадку, із розподіленими, а в другому, із зосередженими параметрами. Це дозволило, врахувавши всі суттєві електричні фізичні явища, що спостерігаються під час перетворення в активній області чутливої поверхні пластини, на основі інтегрального перетворення Лапласа провести перевірку відомих математичних моделей, виявити умови їх дієздатності та область застосування, а також побудувати порівняно з відомими уточнені математичні і електричні моделі системи ПЧД як для статичного, так і динамічного режимів роботи.

### Список літературних джерел

1. Кухарчук В. В. Архімедова спіраль в просторово-оптичному перетворенні кутової швидкості та моменту інерції тіл обертання / В. В. Кухарчук, М. Й. Білінська, Ю. Г. Ведміцький // Оптико-електронні інформаційно-енергетичні технології. – 2005. - №1(9). – С.164 - 168.
2. Ведміцький Ю. Г. Узагальнена математична модель просторово-оптичного перетворення кутової швидкості та моменту інерції в задачах аналізу і синтезу / Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – №4(73). – Вінниця. – 2007. – С. 7-14.
3. Фрайден Дж. Современные датчики / Дж. Фрайден. – М.: Техносфера, 2005. – 592 с. – ISBN 5-94836-050-4.
4. Виглеб Г. Датчики / Г. Виглеб. – М.: Мир, 1989. – 196 с. – ISBN 5-03-000634-6.
5. Джексон Р. Г. Новейшие датчики / Р. Г. Джексон – М.: Техносфера, 2007. – 384 с. – ISBN 978-5-94836-111-6.
6. Аш Ж. Датчики измерительных систем. В 2-х кн. Кн. 1. / Ж. Аш, П. Андре, Ж. Бофрон [та ін.]. – М.: Мир, 1992. – 480 с. – ISBN 5-03-001641-4.
7. Карпов Ю. О. Теоретичні основи електротехніки. Розділ “Електричні кола з розподіленими параметрами” / Ю. О. Карпов, В. Г. Мадьяров. – Вінниця: ВНТУ, 2006. – 102 с.
8. Карпов Ю. О. Теоретичні основи електротехніки. Перехідні процеси в лінійних електричних колах / Ю. О. Карпов, Т. Є. Магас, Ю. Г. Ведміцький. – Вінниця: “УНІВЕРСУМ-Вінниця”, 2004. – 159 с. – ISBN 966-641-077-X.