УДК 621.396

**В.Я. Чечельницкий**, к.т.н.

# УПРОЩЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ ДВУМЕРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ АВТОКОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ

Одесский национальный политехнический университет, e-mail: victor@net.opu.ua

*Предложен метод упрощения вычислений двумерных периодических автокорреляционных функций прямоугольных матриц любых размеров за счет учета свойств ее отдельных элементов.*

## Введение

При исследовании [1, 2] прямоугольных матриц часто возникает необходимость рассчитывать их двумерную периодическую автокорреляционную функцию (ДПАКФ). Поиск структур прямоугольных матриц с определенными свойствами их ДПАКФ [3–5] производится обычно переборными методами, при этом на каждом шаге необходимо вычислять ДПАКФ, а затем производить анализ полученного результата. При этом обычно расчет ДПАКФ является самой медленной операцией, которая и замедляет процесс.

## Постановка задачи

Целью работы является разработка метода упрощения расчета ДПАКФ прямоугольных матриц основанного на учете свойств ее отдельных элементов.

## Решение задачи

Пусть задана матрица размера $N1 \times N2$

$$\mathbf{H}(N1, N2) = \left\| h_{i,j} \right\|, , \tag{1}$$

где $h_{i,j}$ — элементы матрицы;

$i = \overline{0, N1-1}$ — номера строк матрицы;

$j = \overline{0, N2-1}$ — номера столбцов матрицы.

Двумерной периодической автокорреляционной функцией матрицы (1) называется матрица

$$\mathbf{R}(N1, N2) = \left\| r_{m,n} \right\|, \tag{2}$$

где $m = \overline{0, N1-1}$ — номера строк ДПАКФ;

$n = \overline{0, N2-1}$ — номера столбцов ДПАКФ.

Элементы ДПАКФ (2) вычисляются по формуле

$$r_{m,n} = \sum_{i=0}^{N1-1} \sum_{j=0}^{N2-1} h_{i,j} h_{i+m,\, j+n} \ , \tag{3}$$

при этом индексы $i+m$ и $j+n$ редуцируются по $\mathrm{mod}\, N1$ и $\mathrm{mod}\, N2$ соответственно.

Для объяснения метода упрощения расчета ДПАКФ (2) прямоугольной матрицы $\mathbf{H}(N1, N2)$ рассмотрим расчет элементов ДПАКФ (3) матрицы (1) разных размеров $N1 \times N2$. Для матрицы размера $3 \times 3$ элементы ДПАКФ рассчитываются по следующим формулам

$$r_{0,0} = h_{0,0}h_{0,0} + h_{0,1}h_{0,1} + h_{0,2}h_{0,2} + h_{1,0}h_{1,0} + h_{1,1}h_{1,1} + h_{1,2}h_{1,2} + h_{2,0}h_{2,0} + h_{2,1}h_{2,1} + h_{2,2}h_{2,2} \ ;$$

$$r_{0,1} = h_{0,0}h_{0,1} + h_{0,1}h_{0,2} + h_{0,2}h_{0,0} + h_{1,0}h_{1,1} + h_{1,1}h_{1,2} + h_{1,2}h_{1,0} + h_{2,0}h_{2,1} + h_{2,1}h_{2,2} + h_{2,2}h_{2,0} \ ;$$

$$r_{0,2} = h_{0,0}h_{0,2} + h_{0,1}h_{0,0} + h_{0,2}h_{0,1} + h_{1,0}h_{1,2} + h_{1,1}h_{1,0} + h_{1,2}h_{1,1} + h_{2,0}h_{2,2} + h_{2,1}h_{2,0} + h_{2,2}h_{2,1} \ ;$$

$$r_{1,0} = h_{0,0}h_{1,0} + h_{0,1}h_{1,1} + h_{0,2}h_{1,2} + h_{1,0}h_{2,0} + h_{1,1}h_{2,1} + h_{1,2}h_{2,2} + h_{2,0}h_{0,0} + h_{2,1}h_{0,1} + h_{2,2}h_{0,2} \ ;$$

$$r_{1,1} = h_{0,0}h_{1,1} + h_{0,1}h_{1,2} + h_{0,2}h_{1,0} + h_{1,0}h_{2,1} + h_{1,1}h_{2,2} + h_{1,2}h_{2,0} + h_{2,0}h_{0,1} + h_{2,1}h_{0,2} + h_{2,2}h_{0,0} \ ;$$

$$r_{1,2} = h_{0,0}h_{1,2} + h_{0,1}h_{1,0} + h_{0,2}h_{1,1} + h_{1,0}h_{2,2} + h_{1,1}h_{2,0} + h_{1,2}h_{2,1} + h_{2,0}h_{0,2} + h_{2,1}h_{0,0} + h_{2,2}h_{0,1} \ ;$$

$$r_{2,0} = h_{0,0}h_{2,0} + h_{0,1}h_{2,1} + h_{0,2}h_{2,2} + h_{1,0}h_{0,0} + h_{1,1}h_{9,1} + h_{1,2}h_{0,2} + h_{2,0}h_{1,0} + h_{2,1}h_{1,1} + h_{2,2}h_{1,2} \ ;$$

$$r_{2,1}=h_{0,0}h_{2,1}+h_{0,1}h_{2,2}+h_{0,2}h_{2,0}+h_{1,0}h_{0,1}+h_{1,1}h_{0,2}+h_{1,2}h_{0,0}+h_{2,0}h_{1,1}+h_{2,1}h_{1,2}+h_{2,2}h_{1,0}\,;$$
$$r_{2,2}=h_{0,0}h_{2,2}+h_{0,1}h_{2,0}+h_{0,2}h_{2,1}+h_{1,0}h_{0,2}+h_{1,1}h_{0,0}+h_{1,2}h_{0,1}+h_{2,0}h_{1,2}+h_{2,1}h_{1,0}+h_{2,2}h_{1,1}\,.$$

Как видно из представленных формул некоторые элементы ДПАКФ равны между собой $r_{0,1}=r_{0,2}$, $r_{1,0}=r_{2,0}$, $r_{1,1}=r_{2,2}$ и $r_{2,1}=r_{1,2}$ с точностью до порядка следования элементов в вышеприведенных суммах. Представим это равенство элементов в более наглядной и компактной — матричной форме, в которой вместо соответствующих элементов ДПАКФ матрицы расположим числа, соответствующие элементам ДПАКФ, которые необходимо вычислять. Одинаковые числа в разных ячейках матрицы указывают на одинаковые элементы ДПАКФ, а сверху и слева от матрицы указаны номера столбцов и номера строк ДПАКФ

$$\mathbf{R}(3,3)=\begin{bmatrix} r_{0,0} & r_{0,1} & r_{0,2} \\ r_{1,0} & r_{1,1} & r_{1,2} \\ r_{2,0} & r_{2,1} & r_{2,2} \end{bmatrix}=$$

| | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 2 |
| 1 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 3 | 5 | 4 |

Здесь цифрой 1 обозначен элемент ДПАКФ $r_{0,0}$, цифрой 2 — одинаковые элементы $r_{0,1}$ и $r_{0,2}$, цифрой 3 — одинаковые элементы $r_{1,0}$ и $r_{2,0}$ и т.д. Таким образом, для вычисления ДПАКФ матрицы размера $3\times3$ необходимо вычислить вместо девяти ее элементов всего пять элементов $r_{0,0}$, $r_{0,1}$, $r_{1,0}$, $r_{1,1}$, $r_{1,2}$, а остальные элементы нет необходимости вычислять.

Для матрицы размера $3\times4$ элементы ДПАКФ рассчитываются по следующим формулам

$$r_{0,0}=h_{0,0}h_{0,0}+h_{0,1}h_{0,1}+h_{0,2}h_{0,2}+h_{0,3}h_{0,3}+h_{1,0}h_{1,0}+h_{1,1}h_{1,1}+h_{1,2}h_{1,2}+h_{1,3}h_{1,3}+h_{2,0}h_{2,0}+h_{2,1}h_{2,1}+h_{2,2}h_{2,2}+h_{2,3}h_{2,3}\,;$$
$$r_{0,1}=h_{0,0}h_{0,1}+h_{0,1}h_{0,2}+h_{0,2}h_{0,3}+h_{0,3}h_{0,0}+h_{1,0}h_{1,1}+h_{1,1}h_{1,2}+h_{1,2}h_{1,3}+h_{1,3}h_{1,0}+h_{2,0}h_{2,1}+h_{2,1}h_{2,2}+h_{2,2}h_{2,3}+h_{2,3}h_{2,0}\,;$$
$$r_{0,2}=h_{0,0}h_{0,2}+h_{0,1}h_{0,3}+h_{0,2}h_{0,0}+h_{0,3}h_{0,1}+h_{1,0}h_{1,2}+h_{1,1}h_{1,3}+h_{1,2}h_{1,0}+h_{1,3}h_{1,1}+h_{2,0}h_{2,2}+h_{2,1}h_{2,3}+h_{2,2}h_{2,0}+h_{2,3}h_{2,1}\,;$$
$$r_{0,3}=h_{0,0}h_{0,3}+h_{0,1}h_{0,0}+h_{0,2}h_{0,1}+h_{0,3}h_{0,2}+h_{1,0}h_{1,3}+h_{1,1}h_{1,0}+h_{1,2}h_{1,1}+h_{1,3}h_{1,2}+h_{2,0}h_{2,3}+h_{2,1}h_{2,0}+h_{2,2}h_{2,1}+h_{2,3}h_{2,2}\,;$$
$$r_{1,0}=h_{0,0}h_{1,0}+h_{0,1}h_{1,1}+h_{0,2}h_{1,2}+h_{0,3}h_{1,3}+h_{1,0}h_{2,0}+h_{1,1}h_{2,1}+h_{1,2}h_{2,2}+h_{1,3}h_{2,3}+h_{2,0}h_{0,0}+h_{2,1}h_{0,1}+h_{2,2}h_{0,2}+h_{2,3}h_{0,3}\,;$$
$$r_{1,1}=h_{0,0}h_{1,1}+h_{0,1}h_{1,2}+h_{0,2}h_{1,3}+h_{0,3}h_{1,0}+h_{1,0}h_{2,1}+h_{1,1}h_{2,2}+h_{1,2}h_{2,3}+h_{1,3}h_{2,0}+h_{2,0}h_{0,1}+h_{2,1}h_{0,2}+h_{2,2}h_{0,0}+h_{2,3}h_{0,0}\,;$$
$$r_{1,2}=h_{0,0}h_{1,2}+h_{0,1}h_{1,3}+h_{0,2}h_{1,0}+h_{0,3}h_{1,1}+h_{1,0}h_{2,2}+h_{1,1}h_{2,3}+h_{1,2}h_{2,0}+h_{1,3}h_{2,1}+h_{2,0}h_{0,2}+h_{2,1}h_{0,3}+h_{2,2}h_{0,0}+h_{2,3}h_{0,1}\,;$$
$$r_{1,3}=h_{0,0}h_{1,3}+h_{0,1}h_{1,0}+h_{0,2}h_{1,1}+h_{0,3}h_{1,2}+h_{1,0}h_{2,3}+h_{1,1}h_{2,0}+h_{1,2}h_{2,1}+h_{1,3}h_{2,2}+h_{2,0}h_{0,3}+h_{2,1}h_{0,0}+h_{2,2}h_{0,1}+h_{2,3}h_{0,2}\,;$$
$$r_{2,0}=h_{0,0}h_{2,0}+h_{0,1}h_{2,1}+h_{0,2}h_{2,2}+h_{0,3}h_{2,3}+h_{1,0}h_{0,0}+h_{1,1}h_{9,1}+h_{1,2}h_{0,2}+h_{1,3}h_{0,3}+h_{2,0}h_{1,0}+h_{2,1}h_{1,1}+h_{2,2}h_{1,2}+h_{2,3}h_{1,3}\,;$$
$$r_{2,1}=h_{0,0}h_{2,1}+h_{0,1}h_{2,2}+h_{0,2}h_{2,3}+h_{0,3}h_{2,0}+h_{1,0}h_{0,1}+h_{1,1}h_{0,2}+h_{1,2}h_{0,3}+h_{1,3}h_{0,0}+h_{2,0}h_{1,1}+h_{2,1}h_{1,2}+h_{2,2}h_{1,3}+h_{2,3}h_{1,0}\,;$$
$$r_{2,2}=h_{0,0}h_{2,2}+h_{0,1}h_{2,3}+h_{0,2}h_{2,0}+h_{0,3}h_{2,1}+h_{1,0}h_{0,2}+h_{1,1}h_{0,3}+h_{1,2}h_{0,0}+h_{1,3}h_{0,1}+h_{2,0}h_{1,2}+h_{2,1}h_{1,3}+h_{2,2}h_{1,0}+h_{2,3}h_{1,1}\,;$$
$$r_{2,3}=h_{0,0}h_{2,3}+h_{0,1}h_{2,0}+h_{0,2}h_{2,1}+h_{0,3}h_{2,2}+h_{1,0}h_{0,3}+h_{1,1}h_{0,0}+h_{1,2}h_{0,1}+h_{1,3}h_{0,2}+h_{2,0}h_{1,3}+h_{2,1}h_{1,0}+h_{2,2}h_{1,1}+h_{2,3}h_{1,2}\,.$$

Как видно из представленных формул $r_{0,1}=r_{0,3}$, $r_{1,0}=r_{2,0}$, $r_{1,1}=r_{2,3}$, $r_{1,2}=r_{2,2}$ и $r_{1,3}=r_{2,1}$ с точностью до порядка следования элементов. Представим это равенство элементов в более наглядной — матричной форме

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 2 |
| 1 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 4 | 7 | 6 | 5 |

Таким образом, для вычисления ДПАКФ матрицы размера $3\times4$ необходимо вычислить вместо 12 элементов всего 7 ее элементов $r_{0,0}$, $r_{0,1}$, $r_{0,2}$, $r_{1,0}$, $r_{1,1}$, $r_{1,2}$, $r_{1,3}$.

Представим номера элементов ДПАКФ, которые необходимо вычислять, в матричной форме для матриц размеров $3\times3$, $3\times4$, $3\times5$, $4\times3$, $4\times4$, $4\times5$, $5\times3$, $5\times4$, $5\times5$, $6\times3$, $6\times4$ и $6\times5$.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 |
| 3 | 4 | 5 |
| 3 | 5 | 4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 2 |
| 4 | 5 | 6 | 7 |
| 4 | 7 | 6 | 5 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 3 | 2 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 4 | 8 | 7 | 6 | 5 |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 |
| 3 | 5 | 6 |
| 4 | 7 | 7 |
| 3 | 6 | 5 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 2 |
| 4 | 6 | 7 | 8 |
| 5 | 9 | 10 | 9 |
| 4 | 8 | 7 | 6 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 3 | 2 |
| 4 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 5 | 10 | 11 | 11 | 10 |
| 4 | 9 | 8 | 7 | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 |
| 3 | 5 | 6 |
| 4 | 7 | 8 |
| 4 | 8 | 7 |
| 3 | 6 | 5 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 2 |
| 4 | 6 | 7 | 8 |
| 5 | 9 | 10 | 11 |
| 5 | 11 | 10 | 9 |
| 4 | 8 | 7 | 6 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 3 | 2 |
| 4 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 5 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 5 | 13 | 12 | 11 | 10 |
| 4 | 9 | 8 | 7 | 6 |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 |
| 3 | 6 | 7 |
| 4 | 8 | 9 |
| 5 | 10 | 10 |
| 4 | 9 | 8 |
| 3 | 7 | 6 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 2 |
| 4 | 7 | 8 | 9 |
| 5 | 10 | 11 | 12 |
| 6 | 13 | 14 | 13 |
| 5 | 12 | 11 | 10 |
| 4 | 9 | 8 | 7 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 3 | 2 |
| 4 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 6 | 15 | 16 | 16 | 15 |
| 5 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 4 | 10 | 9 | 8 | 7 |

Из анализа представленных ДПАКФ можно сделать вывод, что координаты одинаковых элементов зависят от четности количества строк и столбцов матрицы. В общем случае мы получим четыре варианта формул для рассчитываемых элементов

$N1$ — четное, $N2$ — четное;
$N1$ — четное, $N2$ — нечетное;
$N1$ — нечетное, $N2$ — четное;
$N1$ — нечетное, $N2$ — нечетное.

Как видно из приведенных матриц элементы ДПАКФ необходимо рассчитывать отдельно для нулевой строки и нулевого столбца, а затем для оставшейся части матрицы. Так если $N1$ — четное и $N2$ — четное, то необходимо вычислить только следующие элементы

$$\begin{cases} r_{0,0}; \\ r_{0,j}, \quad j=\overline{1, N2/2-1}; \\ r_{0,N2/2}; \\ r_{i,0}, \quad i=\overline{1, N1/2-1}; \\ r_{N1/2,0}; \\ r_{i,j}, \quad i=\overline{1, N1/2-1}, \quad j=\overline{1, N2-1}; \\ r_{N1/2,j}, \quad j=\overline{1, N2/2-1}; \\ r_{N1/2,N2/2}. \end{cases} \tag{4}$$

Из (4) следует, что количество элементов ДПАКФ, которые необходимо рассчитать определяется выражением

$$1+\left(\frac{N2}{2}-1\right)+1+\left(\frac{N1}{2}-1\right)+1+\left(\frac{N1}{2}-1\right)\left(N2-1\right)+\left(\frac{N2}{2}-1\right)+1=\frac{N1\times N2}{2}+2.$$

Не рассчитанные элементы ДПАКФ (2), если $N1$ — четное и $N2$ — четное определяются следующим образом

$$\begin{cases} r_{0,j} = r_{0,N2-j}, \quad j=\overline{N2/2+1, N2-1}; \\ r_{i,0} = r_{N1-i,0}, \quad i=\overline{N1/2+1, N1-1}; \\ r_{i,j} = r_{N1-i,N2-j}, \quad i=\overline{N1/2+1, N1-1}, \quad j=\overline{1, N2-1}; \\ r_{N1/2,j} = r_{N1/2,N2-j}, \quad j=\overline{N2/2+1, N2-1}. \end{cases}$$

Для матрицы, у которой $N1$ — четное и $N2$ — нечетное при вычислении ДПАКФ необходимо вычислить только следующие элементы

$$\begin{cases} r_{0,0}; \\ r_{0,j}, \quad j=\overline{1,(N2-1)/2}; \\ r_{i,0}, \quad i=\overline{1,N1/2-1}; \\ r_{N1/2,0}; \\ r_{i,j}, \quad i=\overline{1,N1/2-1}, \quad j=\overline{1,N2-1}; \\ r_{N1/2,j}, \quad j=\overline{1,(N2-1)/2}, \end{cases}$$

при этом количество рассчитываемых элементов определяется выражением

$$1+\frac{N2-1}{2}+\left(\frac{N1}{2}-1\right)+1+\left(\frac{N1}{2}-1\right)\left(N2-1\right)+\frac{N2-1}{2}=\frac{N1\times N2}{2}+1.$$

Не рассчитанные элементы ДПАКФ, если $N1$ — четное и $N2$ — нечетное определяются следующим образом

$$\begin{cases} r_{0,j}=r_{0,N2-j}, \quad j=\overline{(N2+1)/2,N2-1}; \\ r_{i,0}=r_{N1-i,0}, \quad i=\overline{N1/2+1,N1-1}; \\ r_{i,j}=r_{N1-i,N2-j}, \quad i=\overline{N1/2+1,N1-1}, \quad j=\overline{1,N2-1}; \\ r_{N1/2,j}=r_{N1/2,N2-j}, \quad j=\overline{(N2+1)/2,N2-1}. \end{cases}$$

Для матрицы, у которой $N1$ — нечетное и $N2$ — четное при вычислении ДПАКФ необходимо вычислить только следующие элементы

$$\begin{cases} r_{0,0}; \\ r_{0,j}, \ j=\overline{1,N2/2-1}; \\ r_{0,N2/2}; \\ r_{i,0}, \ i=\overline{1,(N1-1)/2}; \\ r_{i,j}, \ i=\overline{1,(N1-1)/2}, \quad j=\overline{1,N2-1}; \end{cases}$$

при этом количество рассчитываемых элементов определяется выражением

$$1+\left(\frac{N2}{2}-1\right)+1+\frac{N1-1}{2}+\frac{N1-1}{2}\left(N2-1\right)=\frac{N1\times N2}{2}+1$$

Не рассчитанные элементы ДПАКФ (2), если $N1$ — нечетное и $N2$ — четное определяются следующим образом

$$\begin{cases} r_{0,j}=r_{0,N2-j}, \quad j=\overline{N2/2+1,N2-1}; \\ r_{i,0}=r_{N1-i,0}, \quad i=\overline{(N1+1)/2,N1-1}; \\ r_{i,j}=r_{N1-i,N2-j}, \quad i=\overline{(N1+1)/2,N1-1}, \quad j=\overline{1,N2-1}; \end{cases}$$

Для матрицы, у которой $N1$ — нечетное и $N2$ — нечетное при вычислении ДПАКФ необходимо вычислить только следующие элементы

$$\begin{cases} r_{0,0}; \\ r_{0,j}, \ j=\overline{1,(N2-1)/2}; \\ r_{i,0}, \ i=\overline{1,(N1-1)/2}; \\ r_{i,j}, \ i=\overline{1,(N1-1)/2}, \quad j=\overline{1,N2-1}; \end{cases}$$

при этом количество рассчитываемых элементов определяется выражением

$$1+\frac{N2-1}{2}+\frac{N1-1}{2}+\frac{N1-1}{2}\left(N2-1\right)=\frac{N1\times N2+1}{2}$$

Не рассчитанные элементы ДПАКФ (2), если $N1$ — нечетное и $N2$ — нечетное определяются следующим образом

$$\begin{cases} r_{0,j} = r_{0,N2-j}, & j = \overline{(N2+1)/2, N2-1}; \\ r_{i,0} = r_{N1-i,0}, & i = \overline{(N1+1)/2, N1-1}; \\ r_{i,j} = r_{N1-i,N2-j}, & i = (N1+1)/2, N1-1, \quad j = \overline{1, N2-1}; \end{cases}$$

В общем случае количество элементов ДПАКФ, которое требуется рассчитать, можно определить по формуле

$$\Psi = \begin{cases} \dfrac{N1 \times N2}{2} + 2, \text{ если } N1 \text{ и } N2 \text{ четные;} \\ \dfrac{N1 \times N2 + 1}{2}, \text{ если } N1 \text{ и } N2 \text{ нечетные.} \\ \dfrac{N1 \times N2}{2} + 1, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Как видно из приведенной формулы при увеличении $N1$ и $N2$ сложность вычисления ДПАКФ можно уменьшить почти в два раза.

Если исходная матрица $\mathbf{H}(N)$ содержит только элементы «$+1$» и «$-1$», то вычислять значение элемента ДПАКФ — $r_{0,0}$ нет необходимости, так как оно всегда будет иметь значение равное $N1 \times N2$, что следует из вышеприведенных формул. Помимо этого отпадает необходимость вычислять произведения элементов из (3), так как их можно заменить сравнениями, а операция сравнения вычисляется значительно быстрее, чем операция произведения.

**Заключение**

Таким образом, используя приведенные формулы, можно практически в два раза сократить время вычисления ДПАКФ прямоугольных и квадратных матриц любых размеров, при этом элементы матриц могут иметь любые значения.

## Список литературных источников

1. Jedwab J., Mithell C. Infinite doubly families of quasiperfect and quasiperfect binary. // Electronics Letters. — 1990. — Vol. 26. — No. 5. — P.294—295.
2. Arasu K.T., Warwick de Launey. Two-Dimensional Perfect Quaternary Arrays // IEEE Trans. Inform. Theory. 2001. Vol. 47. No. 4. — P. 1482—1493.
3. Jedwab J., Mithell C. Constructing new perfect binary arrays. // Electronics Letters. — 1988. — Vol. 24. — No. 11. — P.650—652.
4. Чечельницкий В.Я. Метод построения полного класса совершенных двоичных решеток порядка $N$=8x8 // Радиоэлектроника.— 2005.—Т.48, № 11.— С. 65—72. (Изв. вузов).
5. Чечельницкий В.Я. Метод построения полного класса совершенных двоичных решеток порядка $N=2^k$ // Радиоэлектроника.— 2006.—Т.49, № 9.— С. 44—53. (Изв. вузов).