УДК 621.372 (045)

В.М. Шутко, д.т.н.
І.В. Шелевицький, д.т.н.
О.Ф. Москалець

СПЛАЙНИ НЕПАРНИХ СТЕПЕНІВ

Інститут електроніки і систем управління НАУ, e-mail: shutko@nau edu.ua, moskalec_o_f@ukr.net

Загальні поняття сплайна та його складових. Виконано програму на мові відомого математичного пакету MatLab для побудови кубічного сплайна, п'ятого та сьомого степенів.

Ключові слова: *метод найменших квадратів, кубічний сплайн, сплайн п'ятого степеня, сплайн сьомого степеня.*

Постановка проблеми

Сплайни мають кращі апроксимаційні властивості, які забезпечують мінімальну похибку. При їх застосуванні істотно зменшується обсяг обчислень. Порівняти похибку та обсяги обчислень для сплайнів третього, п'ятого та сьомого степенів.

Аналіз досліджень і публікацій

Найбільш відомі сплайни, що складаються з фрагментів — алгебраїчних поліномів не вище заданої степені. Як правило це кубічні поліноми, або поліноми не парних степенів. Лінійний, кубічний, п'ятої степені. Вищі степені застосовують рідко, зважаючи на ускладнення розрахунків [1].

Мета дослідження

Доцільність застосування певного виду сплайна ґрунтується на конкретних умовах задачі та обмеженнях реалізації. Як правило основними вимогами є досягнення заданої точності апроксимації за прийнятних затрат часу та ресурсів на реалізацію.

Сплайн та його основні поняття

Так як сплайни – кусково-поліноміальні функції, то вони легко можуть бути використані при обчисленнях. Дійсно, алгоритми для графічного зображення кривих з допомогою сплайнів та для обчислення їх поліноміальних складових надзвичайно ефективні [2].

Для згладжування сигналів, або для статистичного оцінювання параметрів сигналів, найбільш широко користуються методом середньоквадратичного наближення. В загально-му випадку задачу середньоквадратичного наближення сигналів подають так: $S(x) = f(x) + g$, що містять корисну $f(x)$ та випадкову шумову g складові. Перевагою методу найменших квадратів є поєднання розв'язку задачі оптимального наближення детермінованих залежностей з оптимальними властивостями статистичного оцінювання, практично без зміни алгоритмів розрахунку. Теорія та практика методу найменших квадратів є добре розробленою, існує велика кількість варіантів алгоритмів відповідних розрахунків, включаючи рекурентні та реального часу.[3]

Вид фрагментів сплайна. Те що сплайн складається з фрагментів однакового виду є однією з ключових ознак, що відрізняє його від інших кускових функцій. Найбільш відомі сплайни, що складаються з фрагментів — алгебраїчних поліномів не вище заданої степені. Як правило це кубічні поліноми, або поліноми не парних степенів: лінійний, кубічний, п'ятої, сьомої степені. Вищі степені застосовують рідко, зважаючи на ускладнення розрахунків. Сплайн, який задається через експоненту дуже важко розраховується, хоча й описує багато фізичних процесів в динамічних системах. Тригонометричні сплайни, фрагменти яких описуються тригонометричними поліномами мають досить складні розрахункові вирази. Враховуючи вище викладене особливу увагу приділимо саме алгебраїчним поліномам.

Доцільність застосування певного виду полінома ґрунтується на конкретних умовах задачі та обмеженнях реалізації. Як правило основними вимогами є досягнення заданої точності апроксимації за прийнятних затрат часу та ресурсів на реалізацію. Вдалий вибір виду полінома (кубічний, п'ятої, сьомого степеня), що відповідає характеру процесу дозволяє скоротити витрати.

Очевидно, що мінімальним числом поліномів є один. Класичне визначення сплайна обмежує число поліномів певним числом на скінченому відрізку.

Ще одна важлива ознака, що вирізняє сплайни –умова стикування поліномів. Коли йде мова про сплайни, як правило, вважають що поліноми стикуються гладко. Тобто забезпечується неперервність значень та першої похідної. Поняття дефекту сплайна пов'язане із числом неперервних похідних, що має функція-поліном певного виду та числом похідних, неперервність яких гарантована у вузлах. Практично мова йде про неперервність значень та першої, максимум другої похідних. Розрив вищих похідних візуально є непомітним, тому враховується рідко. Зрозуміло, що перша похідна в точках стику може задаватися по різному. Найбільш поширені два прийоми. Значення першої похідної вибирається так, щоб забезпечити неперервність другої. Перша похідна рівняється першій похідній інтерпольованої функції (можливо наближено) в Ермітових сплайнах.

Сплайни мають обмежене число поліномів, тому крайні вузли немає з чим стикувати. Винятком є лише періодичні сплайни, які мають природне продовження. Іноді природними називають крайові умови з нульовою похідною, хоча ніяких підстав вважати їх природнішими за інші немає.

Додаткові обмеження стосуються похідних у вузлах. Іноді вони випливають із фізики процесу. Наприклад невід'ємність першої похідної при апроксимації не спадаючої функції (закону розподілу). Інші умови: невід'ємність значень, рівність моментів, площ, умови нормування. Додаткові умови іноді спрощують аналіз властивостей сплайнів, але можуть серйозно ускладнювати побудову та затрати реалізації.

Сітка точок інтерполяції може суттєво впливати на ефективність розрахунків. Важливими є випадки рівномірної сітки та рівномірної сітки, з відстанню між точками кратною відстані між вузлами сплайна.

Функції, що задають фрагменти сплайна, як правило, залежать від множини параметрів, завдяки яким вони змінюють свою форму. Значення параметрів на кожному із поліномів індивідуальні. Ці параметри можуть задавати конкретний сплайн. Отже, сплайн можна представити множиною параметрів функцій на кожному з поліномів. Значно компактнішим є представлення сплайна у вигляді полінома, через базисні сплайн-функції у вигляді:

$Y_i = f(x_i) + G_i$, де $f(x_i)$- значення функції, G_i- шум,

Число параметрів, що задають сплайн рівне числу вузлів сплайна. Між параметрами функції та коефіцієнтами полінома-сплайна існує залежність, що дозволяє за одними коефіцієнтами знаходити інші:

Для кубічного сплайна

$$S(x) = A_1(x-x_i)^3 + A_2(x-x_i)^2 + A_3(x-x_i) + A_4,$$

для сплайна п’ятого степеня

$$S(x) = B_1(x-x_i)^5 + B_2(x-x_i)^4 + B_3(x-x_i)^3 + B_4(x-x_i)^2 + B_5(x-x_i) + B_6,$$

для сплайна сьомого степеня

$$S(x) = C_1(x-x_i)^7 + C_2(x-x_i)^6 + C_3(x-x_i)^5 + C_4(x-x_i)^4 + C_5(x-x_i)^3 + C_6(x-x_i)^2 + C_7(x-x_i) + C_8.$$

У поліномних сплайнів коефіцієнти мають той самий фізичний зміст, що і вхідні дані. Тобто, коефіцієнти є значеннями сплайна у вузлах.

В ряді випадків розглядають функції які є близько до межі між сплайнами і звичайними функціями та сплайнами і кусковими функціями. Це сплайни, що складаються з двох та більше поліномів. Мають спрощений варіант побудови, але особливу увагу слід приділяти крайовим умовам.

Нехай на відрізку $[a,b]$ у точках $x = \{x_i\}_{i=1}^{N}$ маємо значення з адитивною похибкою деякої гладкої функції У(х): $Y_i = f(x_i) + G_i$, де $f(x_i)$- значення функції, G_i- шум.

Знайдемо середнє квадратичне відхилення наближення корисного сигналу з кубічним, п'ятого та сьомого степенів. Та порівняємо результати.

Для того, щоб урівняти розрахунки, необхідно, щоб кількість степенів вільності відповідних сплайнів була однакова. Для цього візьмемо на одному й тому ж самому відрізку для кубічного сплайна 15 інтервалів, сплайна п'ятого степеня – 5 інтервалів, а сплайна сьомого степеня – 3 інтервали.

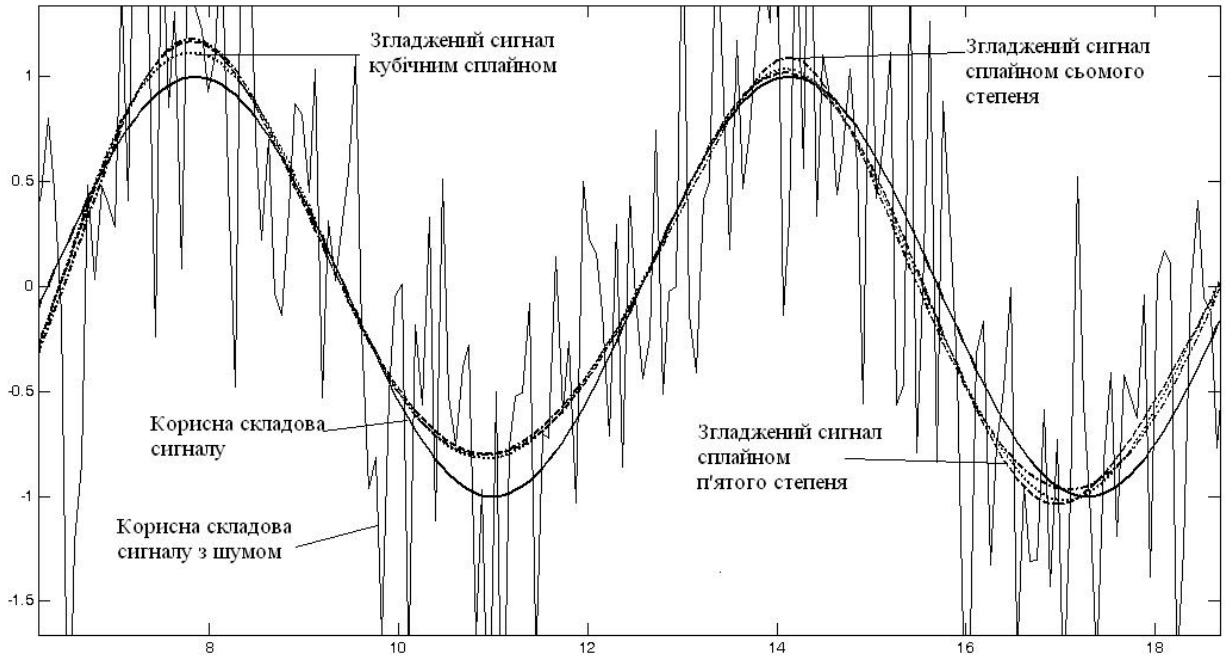

Рис.1. Графіки корисної складової сигналу, корисної складової сигналу з шумом, згладжуваного сигналу кубічним сплайном, п'ятого степеня та сьомого степеня.

Середнє квадратичне відхилення наближення корисного сигналу і кубічним сплайном становить 0,2678, сплайном п'ятого степеня – 0,2172, силайном сьомого степеня – 0,2129.

Висновки

Найкраще наближує сплайн сьомого степеня, ніж решта. Але у зв'язку з обсягами обчислення і враховуючи значення середнього квадратичного відхилення більш доцільний для розрахунків є сплайн п'ятого степеня.

Список літературних джерел

1. http://uk.wikipedia.org/wiki/Сплайн.

2. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. - М.: Мир, 1972. - 316 с.

3. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. М.:Наука, 1991.- 432с.