

УДК 629.735.051'844'847: 629.735.33-519 (045)

**В.П. Харченко, д.т.н.  
С.І. Ільницька**

## **ОЦІНКА АЛГОРИТМУ ІНТЕГРУВАННЯ РІВНЯНЬ ОБЕРТАЛЬНИХ РУХІВ БЕЗПІЛОТНОГО ЛІТАЛЬНОГО АПАРАТУ**

Національний авіаційний університет, [nauka@nau.edu.ua](mailto:nauka@nau.edu.ua), [svetlana-ilnicka@yandex.ru](mailto:svetlana-ilnicka@yandex.ru)

*Питанню комплексування інформації в інерційно-супутникових навігаційних системах (ІНС) останнім часом присвячується багато досліджень, у яких значну частину роботи складає дослідження алгоритмів роботи інерційних навігаційних систем (ІНС) різних класів, і зокрема ІНС низької вартості на базі MEMS технологій. У програмному забезпеченні ІНС провідне місце займають алгоритми визначення орієнтації БПЛА, тобто алгоритми інтегрування рівнянь обертальних рухів, які і досліджуються в даній роботі*

**Ключові слова:** комплексування інформації, інерційні навігаційні системи (ІНС), глобальні навігаційні супутникові системи (ГНСС), інерційно-супутникові навігаційні системи (ІНСС), безпілотний літальний апарат (БПЛА)

### **Вступ**

Прогрес в області супутникової навігації призвів до виникнення цілої індустрії виробництва супутникових навігаційних систем для самих різноманітних застосувань, включаючи як літальні апарати (ЛА), так і наземний транспорт [1]. Проте для задач навігації та управління польотом ЛА будь-якого класу, в тому числі і безпілотного ЛА (БПЛА), використання лише глобальних навігаційних супутникових систем (ГНСС) явно недостатнє. Усталена на даний момент практика створення і застосування навігаційних систем (НС) заснована на використанні інтегрованих інерційно-супутникових навігаційних систем (ІНСС). Зокрема в документі AN 13/54-06/15 від 24.02.2006 Міжнародної організації цивільної авіації (ІКАО) також говориться, що для підтримки безпеки польотів та ефективності пропускну здатності в повітряному просторі і на землі необхідне забезпечення навігаційною інфраструктурою, до складу якої повинні входити ГНСС, а також автономні навігаційні системи (інерційні навігаційні системи (ІНС)).

### **Аналіз останніх досліджень**

На даний час в багатьох країнах світу інтенсивно зростають дослідження та розробки по створенню інтегрованих ІНС. Зокрема ведуться дослідження у Сполучених Штатах Америки (Стенфордський університет), Канаді (Університет Калгарі, Альберта), Австралії (Університет Нового Південного Вейлсу, The University of New South Wales) та у Великобританії (Королівський коледж Лондону). Причому, якщо раніше такі дослідження та розробки стримувались за рахунок великої вартості та ваги ІНС, то тепер завдяки розвитку технології мікромеханічних систем (MEMS) і створенню недорогих мікрогіроскопів та акселерометрів вони виходять на новий рівень.

### **Постановка задачі**

Алгоритми визначення орієнтації БПЛА займають провідне місце у програмному забезпеченні ІНС. Тому в роботі формулюються задачі реалізації та оцінки алгоритму інтегрування рівнянь обертальних рухів БПЛА, що базується на використанні кватерніонів. На основі даного алгоритму буде отримане навігаційне рішення в ІНС, яке потім комплексується з даними від ГНСС.

### **Результати досліджень**

Робота ІНС здебільшого пов'язана з інтегруванням системи диференціальних рівнянь. Використовуючи дані гіроскопів, шляхом інтегрування отримуємо матрицю направляючих косинусів, що визначає орієнтацію об'єкту. Далі з її допомогою перепроектуємо покази бортових акселерометрів у фіксовану на Землі систему координат (СК), потім шляхом інтегрування обраховуємо відносну швидкість і положення об'єкту.

Відомо [2, 3], що в теперішній час найбільш прийнятним методом вирішення задачі інтегрування рівнянь обертальних рухів є застосування кватерніонів. Цей метод використовується майже у всіх безплатформних ІНС. Застосування кватерніонів дозволяє значно спростити рішення цієї задачі, але при цьому відповідні алгоритми є більш складними.

Проте є можливість знайти рішення рівнянь у квадратурах. В роботі досліджується підхід Ларіна В.Б. [4], що базується на апроксимації вимірних кутових швидкостей сплайнами 2-го порядку та апроксимації елементарного кватерніона.

На рис.1 запропонована блок-схема алгоритму інтегрування рівнянь обертальних рухів БПЛА. Реалізація алгоритму розпочинається із зчитування розміру фалу даних та ініціалізації початкового кватерніону  $q_0 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ . Якщо відомі параметри початкової виставки, то початковий кватерніон буде не нульовим, а міститиме реальні значення кутів.

Знімання вимірювань датчиків проводиться через певні проміжки часу  $\Delta t$ , тобто з частотою  $f = 1/\Delta t$ . Відповідно, і матриця направляючих косинусів  $A(\lambda)$ , швидкість  $v$  та координати  $r$  обраховуються через інтервал часу  $\Delta t$ . Тому на початку алгоритму необхідно задати частоту дискретизації  $f$ . Далі значення лічильника встановлюється рівним чотирьом.

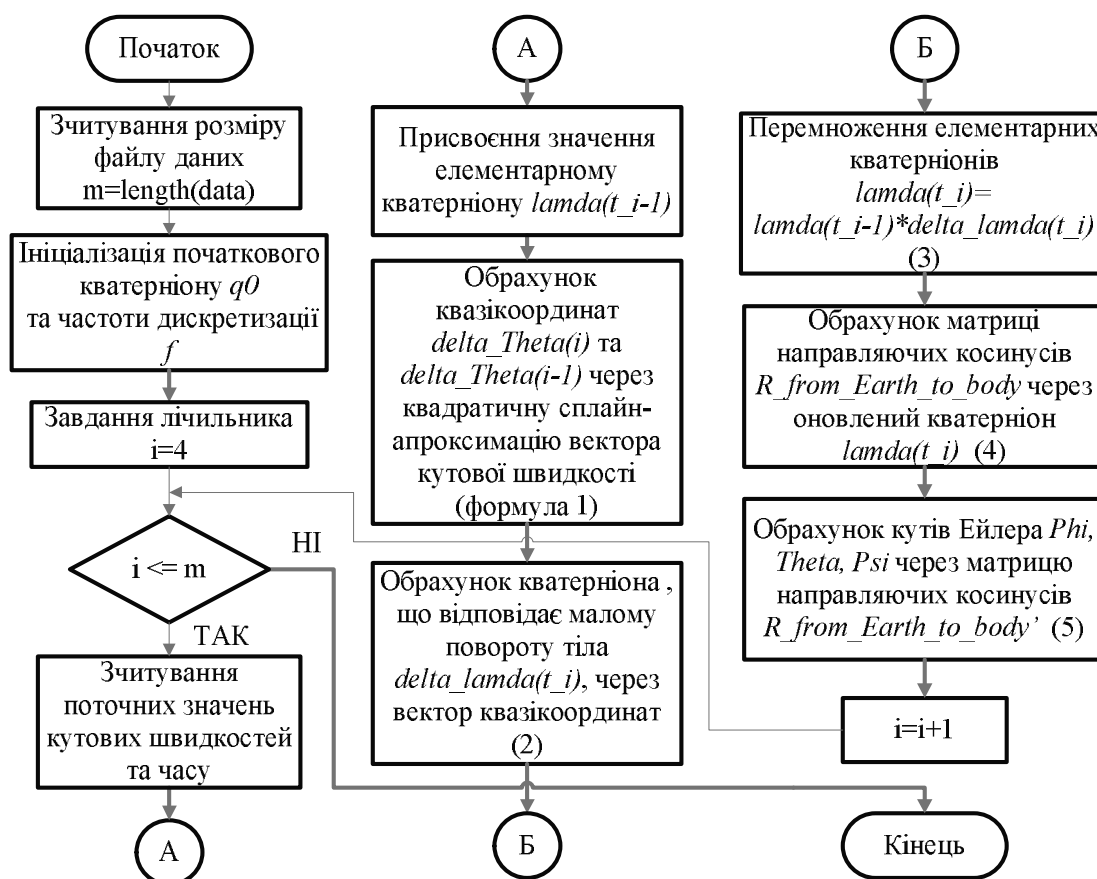


Рис. 1 Блок-схема алгоритму інтегрування рівнянь обертальних рухів БПЛА

Потім виконується перевірка на належність поточної ітерації рамкам файлу (це визначається по розміру файлу). У разі належності проводиться здійснюється зчитування поточних значень кутових швидкостей та часу, в протилежному випадку алгоритм завершується. Потім присвоюється значення елементарному кватерніону  $\lambda(t_{i-1})$  (в перший раз це буде значення

$q_0$ ). Після цього починається обрахунок квазікоординат (компонентів вектору  $\nabla \theta_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \omega dt$ ).

Для обрахунку  $\nabla \theta_i$  використовуємо квадратичну сплайн-апроксимацію вектора кутової швидкості  $\omega(t)$  [4]. Якщо відомі значення  $\omega(t_{i-2})$ ,  $\omega(t_{i-1})$ ,  $\omega(t_i)$ , то:

$$\nabla \theta_i = \frac{\Delta t}{12} (5\omega(t_i) + 8\omega(t_{i-1}) - \omega(t_{i-2})) \quad (1)$$

Аналогічним чином обчислюємо і  $\nabla \theta_{i-1}$ . Далі апроксимуємо кватерніон, що відповідає малому повороту твердого тіла за час  $\Delta t$  ( $\delta \lambda(t_i)$ ), через вектор квазікоординат  $\nabla \theta_i$  [4]:

$$\delta\lambda(t_i) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{12} \|\nabla\theta_i\|^2 \\ \frac{1}{2} \nabla\theta_i - \frac{1}{24} (\nabla\theta_i \times \nabla\theta_{i-1}) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

де  $\|\cdot\|$  - норма вектору. Потім орієнтацію тіла визначаємо послідовним перемноженням «елементарних» кватерніонів, що в матричному вигляді має наступний вигляд:

$$\lambda(t_i) = \begin{bmatrix} \delta\lambda_0(t_1) & -\delta\lambda_1(t_1) & -\delta\lambda_2(t_1) & -\delta\lambda_3(t_1) \\ \delta\lambda_1(t_1) & \delta\lambda_0(t_1) & \delta\lambda_3(t_1) & -\delta\lambda_2(t_1) \\ \delta\lambda_2(t_1) & -\delta\lambda_3(t_1) & \delta\lambda_0(t_1) & \delta\lambda_1(t_1) \\ \delta\lambda_3(t_1) & \delta\lambda_2(t_1) & -\delta\lambda_1(t_1) & \delta\lambda_0(t_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0(t_{i-1}) \\ \lambda_1(t_{i-1}) \\ \lambda_2(t_{i-1}) \\ \lambda_3(t_{i-1}) \end{bmatrix} \quad (3)$$

Після послідовного перемноження «елементарних» кватерніонів (3), що є процедурою інтегрування кватерніона, знаходимо матрицю направляючих косинусів DCM (Direction Cosine Matrix), яку ще називають матрицею обертання, у нашому випадку із фіксованої з Землею СК у фіксовану з тілом СК) [6]:

$$\mathbf{R}_{earth-fixed}^{body-fixed} = \begin{bmatrix} 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) & 2(q_1q_2 - q_3q_0) & 2(q_3q_1 + q_2q_0) \\ 2(q_3q_0 + q_1q_2) & 1 - 2(q_3^2 + q_1^2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_3q_1 - q_2q_0) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

За властивістю ортогональності DCM можемо транспонувати (4) та отримати в результаті матрицю обертання із фіксованої з тілом СК у фіксовану з Землею СК. Потім через отриману DCM  $\mathbf{R}_{body-fixed}^{earth-fixed}$  отримуємо поточні значення кутів Ейлера:

$$\phi = \arctan\left(\frac{r(3,2)}{r(3,3)}\right), \quad \theta = -\arctan\left(\frac{r(3,1)}{\sqrt{1 - r(3,1)^2}}\right), \quad \psi = \arctan\left(\frac{r(2,1)}{r(1,1)}\right). \quad (5)$$

Даний алгоритм було реалізовано в програмному середовищі Matlab.

Для верифікації та оцінки алгоритму інтегрування кінематичних рівнянь обертальних рухів БПЛА та визначення внеску похибок обрахунків було зроблено наступні кроки. В середовищі Matlab Simulink була реалізована схема (рис. 2), що пов'язує кути Ейлера та кутові швидкості гіроскопів за наступними рівняннями [5]:

$$\begin{aligned} \omega_x = p &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta, \\ \omega_y = q &= \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi, \\ \omega_z = r &= \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi. \end{aligned} \quad (6)$$

Бачимо, що на вхід подаються значення кутів Ейлера, а на виході отримуємо значення кутових швидкостей гіроскопів разом із тими ж еталонними кутами Ейлера. Потрібно відзначити, що дана схема може бути корисною лише з метою перевірки алгоритму інтегрування рівнянь обертальних рухів ЛА, оскільки в реальних умовах не буде можливості отримувати еталонні значення як кутових швидкостей, так і кутів.

Наприклад, якщо встановимо час роботи схеми (рис.2) 30 секунд, а частоту дискретизації 100 Гц, то в результаті отримаємо 3000 значень кутових швидкостей і еталонних значень кутів Ейлера. Після цього, маючи дані кутових швидкостей, за допомогою рівнянь (1-5) на основі алгоритму, представленого на рис.1 можна отримати обраховані значення кутів Ейлера.

Зрозуміло, що апроксимації кутових швидкостей та елементарних кватерніонів, а також заокруглення при обрахунках будуть вносити похибки у визначення кутів. Щоб оцінити величину цих похибок, було порівняно еталонні значення кутів (отримані на виході схеми на рис.2) та розраховані за допомогою алгоритму (блок-схема на рис. 1). Нижче на рис.3 приводиться графік для куту крену для нормальної динаміки БПЛА.

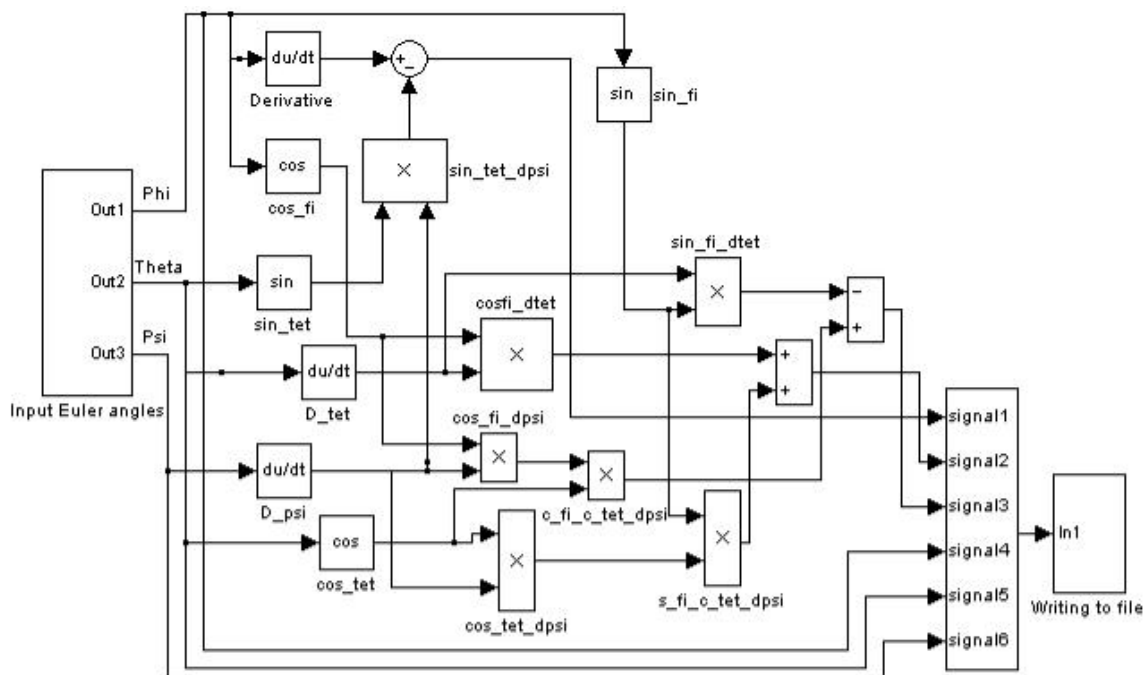


Рис. 2. Схема для генерації еталонних значень кутових швидкостей на основі кутів Ейлера

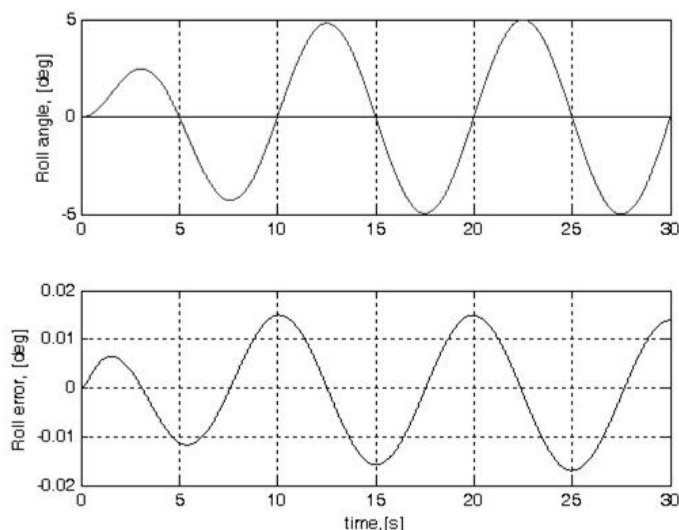


Рис. 3 Значення куту крену: еталонні значення (верхня частина графіку) та похибка обчислень (нижня частина графіку) за нормальної динаміки БПЛА

Потрібно відмітити, що в роботі використовувались такі навігаційні тригранники: Північ Схід Донизу (North East Down, NED), що фіксований із Землею, та фіксований з БПЛА  $X_b Y_b Z_b$ , початок координат якого знаходиться у центрі мас, вісь  $X_b$  направлена вздовж його поздовжньої осі, вісь  $Y_b$  - направо вздовж поперечної осі, а вісь  $Z_b$  доповнює трійку векторів до правої. Відповідно, кут крену вимірюється як кут обертання навколо осі  $X_b$ , кут тангажу -  $Y_b$ , а ролання -  $Z_b$ .

Оскільки інерція БПЛА відносно поздовжньої осі найменша, то значення куту крену найбільш динамічно змінюються в часі, і, відповідно, похибка його обчислення за даним алгоритмом виходить найбільша. Тому на рисунку було вирішено навести саме значення для кутів крену, а не інших. Наприклад, середньоквадратичне відхилення (СКВ) визначення кута крену в градусах складає  $0.0101^\circ$ , а тангажу і ролання -  $0.0046^\circ$  і  $0.0077^\circ$  відповідно.

На рис. 4 приводиться графік для куту крену для високої динаміки БПЛА. Бачимо, що зі зростанням динаміки похибка визначення кута також значно збільшується. Зокрема, за найгіршої динаміки БПЛА при частоті дискретизації 100 Гц СКВ визначення кута крену в

градусах складає  $0.0635^\circ$ , а тангажу і рискання -  $0.0123^\circ$  і  $0.0156^\circ$  відповідно.

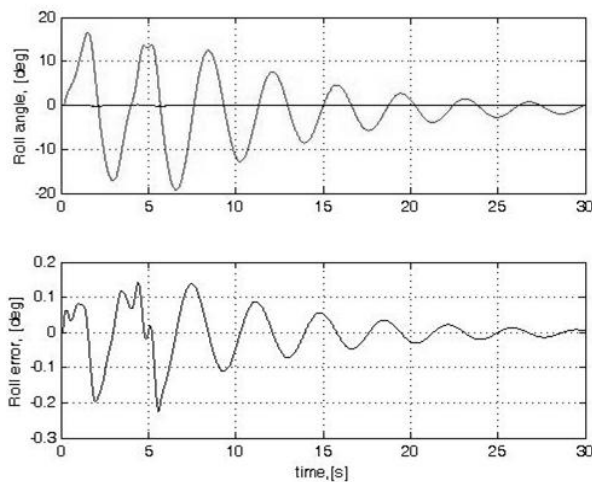


Рис. 4 Значення куту крену: еталонні значення (верхня частина) та похибка обчислень (нижня частина графіку) за високої динаміки БПЛА

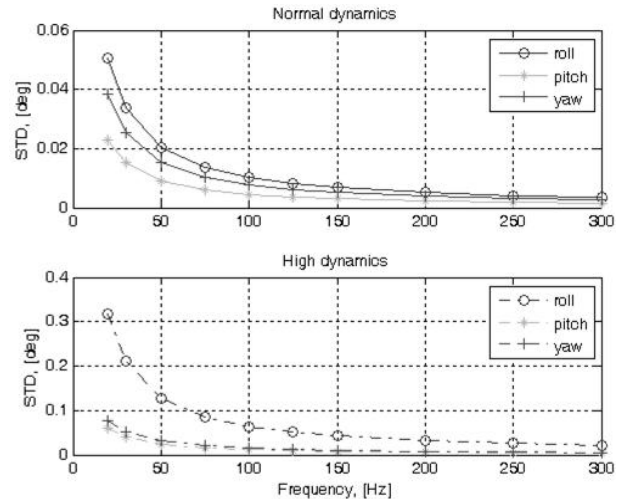


Рис. 5. Залежність СКВ визначення кутів від частоти дискретизації

Крім того у роботі було досліджено вплив частоти дискретизації на похибки визначення кутів Ейлера. Алгоритм перевірявся на частотах від 20 до 300 Гц для нормальної та високої динаміки БПЛА. На рис. 5 представлено результати дослідження.

З рисунку видно, що залежність носить гіперболічний характер. І якщо підвищення частоти до 100 Гц суттєво покращує ситуацію, то подальше її збільшення значних покращень не дає, а тому не має сенсу, оскільки із незначним зменшенням СКВ значно збільшується час обрахунків. Також видно, що гіперболічний характер залежності СКВ від частоти зберігається як для нормальної, так і високої динаміки БПЛА. Цікаво, що СКВ визначення куту крену для високої динаміки має більш стрімкий характер спадання, ніж для нормальної, а також значно відрізняється від значень СКВ тангажу та рискання, чого не спостерігалось при нормальній динаміці БПЛА.

### Висновки

У роботі було проведено аналіз алгоритму інтегрування обертальних рухів БПЛА з використанням кватерніонів. Алгоритм було реалізовано в програмному середовищі Matlab. Була проведена його перевірка на еталонних даних для низької та високої динаміки БПЛА. Для найгіршого варіанту динаміки СКВ визначення куту крену складає  $0.0635^\circ$ , для нормальних умов -  $0.0101^\circ$ . Це підтвердило ефективність використання алгоритму, оскільки навіть за найгірших умов СКВ має прийнятні значення. Також було досліджено вплив частоти дискретизації на СКВ визначення кутів Ейлера за нормальної та високої динаміки, у результаті чого було отримано залежність гіперболічного характеру.

У подальших дослідженнях доцільно було б реалізувати та дослідити алгоритм інтегрування поступальних рухів БПЛА з метою отримання навігаційного рішення від ІНС, а також дослідити вклад похибок самого алгоритму. Також подальшого дослідження потребує модель залежності СКВ від частоти дискретизації.

### Список літературних джерел

1. В.В. Конин, В.П. Харченко Системы спутниковой радионавигации / Национальный авиационный университет. – К.: Холтех, 2010. – 520 с.
2. M.S. Grewall, L.P. Weill, A.P. Andrews. Global Positioning Systems, Inertial Navigation, and Integration. A John Wiley & Sons, Inc. Publ., New York, Chichester, Brisbane, Singapore, Toronto, 2001, 392 p.
3. В.Н. Бранец, И.П.Шмыглевский Применение кватернионов в задаче ориентации твёрдого тела. – М.: Наука, 1973.-320с.
4. V.B. Larin. Attitude-determination problems for a rigid body // Int. App. Mechanics. – 37, № 7. –2001, pp 870-898.
5. George M. Siouris. Aerospace Avionics Systems: a modern synthesis. Academic Press, Inc., 2007. - 466 p.