

УДК 621.391:004.942(043.2)

Ю.В. Куц, д.т.н.
С.В. Шенгур

ПРОГРАМНИЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ТА СТАТИСТИЧНОГО ОПРАЦЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ КУТОВИХ ТА ФАЗОВИХ СПОСТЕРЕЖЕНЬ

Національний авіаційний університет, м. Київ, lana@i.ua

В статті запропоновано програмний комплекс для моделювання та статистичного опрацювання результатів кутових та фазових спостережень. Програмний комплекс реалізований в середовищі LabView.

Ключові слова: програмний комплекс, випадковий кут, вибірка, статистичне опрацювання, моделювання, генерування.

Вступ

Методи вимірювання детермінованих кутових величин добре відомі і використовуються в геодезії, астрономії, оптиці, навігації, машинобудуванні тощо.

Поширення методу кутових вимірювань на такі галузі як медицина, біологія, геологія, метеорологія та інші, а також їх застосування в аналізі циклічних сигналів за умови дії значної кількості випадкових факторів обумовлює використання методів статистичної кутометрії. Цей напрям статистики вивчає розподілені на колі випадкові кути, які мають суттєві відмінності від розподілених на прямій випадкових величин. Замкнений характер області представлення кутових величин (коло) обумовлює необхідність застосування як специфічних розподілів імовірності, так і статистик, відмінних від статистик, що застосовують для випадкових величин.

Разом з цим огляд сучасних програмних засобів для інженерних розрахунків таких як MatLab, MathCad та ін. засвідчив, що вони не містять функцій та команд, орієнтованих на статистичне опрацювання кутових даних.

Метою статті є розробка програмного комплексу, орієнтованого на проведення комп'ютерних обчислювальних експериментів з випадковими кутами та визначення статистик випадкових кутів та фазових зсувів сигналів.

Постановка задачі

Необхідно розробити програмний комплекс з наступними функціями:

- 1) генерування вибірок випадкових кутів довільного обсягу, які підпорядковані певним розподілам імовірності випадкових кутів із заданими параметрами;
- 2) виконувати обчислення статистик випадкових кутів та фазових зсувів сигналів, отриманих як від генераторів випадкових кутів, так і імпортованих від зовнішніх джерел у вигляді текстових файлів;
- 3) виконувати оцінку довірчих інтервалів статистик випадкових кутів із заданим рівнем довіри;
- 4) відобразити на графіках як вхідні дані так і результати їх опрацювання;
- 5) підтримувати інтерактивний режим роботи.

Реалізацію програмного комплексу виконати в середовищі LabView.

Розв'язок задачі

Розроблений програмний комплекс містить наступні модулі:

1. Модуль генерування випадкових кутів.

Для розширення функціональних можливостей модуль передбачає формування вибірок малого обсягу зі сформованих генеральних вибірок. Генерування відбувається за алгоритмами, що розглядалися в [1] з можливістю вибору закону розподілу – Мізеса, намотаного Коші та намотаного нормального – та основних параметрів, таких як обсяг вибірки, кутівий середній напрям, параметр концентрації для закону розподілу Мізеса тощо.

Закон розподілу Мізеса є симетричним та найбільш поширеним для одномодальних вибірок випадкових кутів [2]. Кажуть, що кут $\psi(\omega)$, де ω – елементарна подія з області подій Ω , має розподіл Мізеса, якщо відповідна щільність розподілу ймовірності виражається формулою [3,4]:

$$f(\theta) = [2\pi I_0(k)]^{-1} \exp[k \cos(\theta - \mu)], \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad k > 0, \quad |\mu| < \infty, \quad (1)$$

де $I_0(k)$ – модифікована функція Бесселя першого роду нульового порядку, тобто

$$I_0(k) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \exp[k \cos(\varphi - \mu)] d\varphi. \quad (2)$$

Параметр μ – кутовий середній напрям випадкового кута $\psi(\omega)$, параметр k можна розглядати як характеристику концентрації розподілу в околі μ .

Функція розподілу має вигляд:

$$F(\theta) = [2\pi I_0(k)]^{-1} \int_0^{\theta} \exp[k \cos(\varphi - \mu)] d\varphi. \quad (3)$$

Намотаний розподіл Коші є симетричним одномодальним розподілом з функцією щільності ймовірності [2]

$$f(\theta) = (1/2\pi)(1 - \rho^2 / (1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\theta - \mu))), \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq 1 \quad (4)$$

та функцією розподілу

$$F(\theta) = (1/2\pi) \cos^{-1}(((1 + \rho^2) \cos(\theta - \mu) - 2\rho) / (1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\theta - \mu))), \quad (5)$$

де μ – кутовий середній напрям. У випадку, коли $\rho \rightarrow 0$, розподіл прямує до рівномірного кутового розподілу, а у випадку $\rho \rightarrow 1$ розподіл прямує до розподілу, концентрованого в околі точки μ .

Намотаний нормальний розподіл є симетричним двопараметровим розподілом, який обчислюється шляхом “намотування” на коло нормального [2]. Його функція щільності ймовірності:

$$f(\theta) = 1/2\pi \left(1 + 2 \sum_{\rho=1}^{\infty} \rho^{\rho^2} \cos \rho(\theta - \mu) \right), \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad (6)$$

де μ – кутовий середній напрям, $\delta = (1 - \rho^4) / (2\rho^2)$ – кутова дисперсія. У випадку, коли $\rho \rightarrow 0$, розподіл прямує до рівномірного кутового розподілу, а у випадку $\rho \rightarrow 1$ – до концентрованого в околі точки μ .

Приклад гістограми згенерованої вибірки випадкових кутів з розподілом Мізеса та параметрами $k = 3, \mu = \pi$ обсягом 10000 значень представлено на рис. 1.

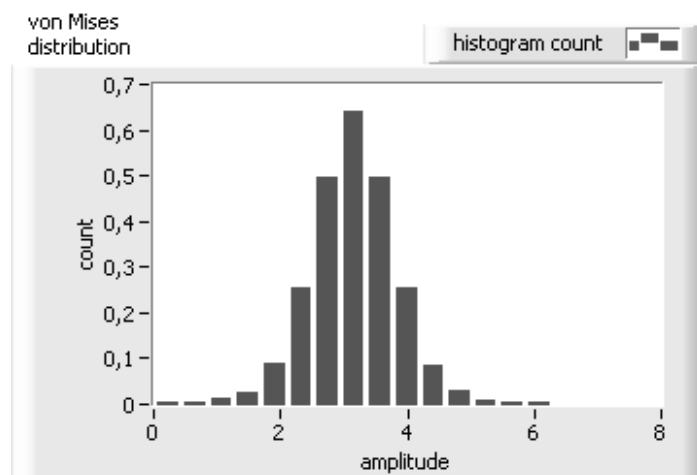


Рис. 1. Приклад гістограми вибірки випадкового кута з розподілом Мізеса

Панель відображення результатів модельованих даних показана на рис. 2. У якості прикладу показано відображення на колі генеральної вибірки, сформованої за законом розподілу Мізеса, обсягом $N = 10000$, середнім кутом $\mu = \pi$, параметром концентрації $k = 4$, та сформована з неї мала вибірка обсягом $n = 15$ кутів. Числові значення кутів малої вибірки в градусах після операції сортування показані на рисунку у вікні “Sorted small sample”.

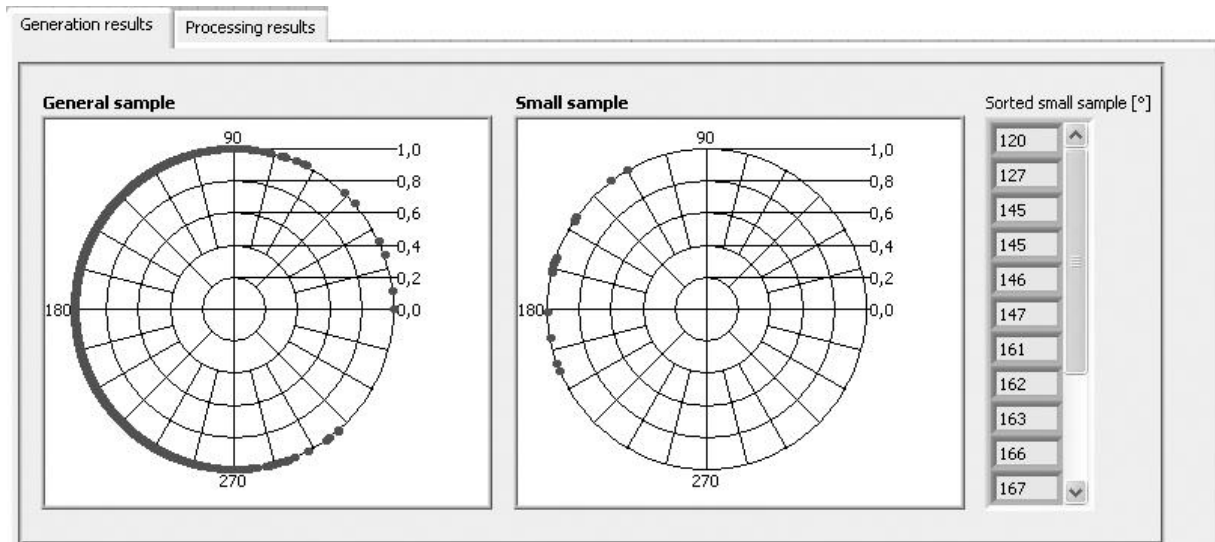


Рис. 2. Панель відображення результатів генерування кутових даних

2. Модуль обчислення статистичних характеристик.

У теорії і практиці вимірювань добре відомі і широко застосовуються числові статистичні характеристики для аналізу розподілених на прямій випадкових величин з розподілами Гаусса, Коші, Релея тощо. Це середнє арифметичне, оцінка дисперсії, СКВ, медіана та ін. Однак використання цих розподілів і статистик у задачах опрацювання результатів фазових вимірювань має певні обмеження [3].

Даний програмний комплекс включає розрахунок основних статистичних характеристик випадкових кутів (випадкових фазових зсувів сигналів) за вибіркою $\{\theta_j\}$, $j = \overline{1, M}$, обсягу M :

1) вибіркоче кругове середнє (ВКС) μ :

$$\mu_1 = \left\{ \arctg \frac{S}{C} + \frac{\pi}{2} \{2 - (\text{sign} S) \times [1 + \text{sign} C]\} \right\}; C = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \cos \theta_j; S = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sin \theta_j; \quad (7)$$

2) вибіркова довжина результуючого вектора (ВДВ) r :

$$r = \sqrt{C^2 + S^2}; \quad (8)$$

3) вибіркова кругова дисперсія (ВКД) V :

$$V = 1 - r; \quad (9)$$

4) кругове стандартне відхилення статистики різниць ФХС (КСВ) σ :

$$\sigma = \sqrt{-2 \ln(1 - V)} = \sqrt{-2 \ln r}; V = 1 - \exp(-0,5\sigma^2); \quad (10)$$

5) вибіркова мода (Mode). Куту відповідає точка кола, в околі якої спостерігається максимальна концентрація значень статистики.

6) вибірковий круговий розмах (ВКР) W : Довжина найменшої дуги одиничного кола, що містить вибірку $\{\theta_j\}$ та визначається з варіаційного ряду

$$T_j = \phi_{j+1} - \phi_j, j = \overline{1, \dots, M-1}; T_M = 2\pi - \phi_M + \phi_1; W = 2\pi - \max\{T_1, \dots, T_M\}; \quad (11)$$

7) вибірковий тригонометричний момент порядку u відносно напрямку α (u – ціле число) $T_u(\alpha)$:

$$T_u(\alpha) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M e^{iu(\theta_j - \alpha)} = a_u(\alpha) + ib_u(\alpha) = r_u(\alpha) e^{i\mu_u(\alpha)}; u = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

$$a_u(\alpha) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \cos[u(\theta_j - \alpha)] = a_u(0) \cos(u\alpha) + b_u(0) \sin(u\alpha);$$

$$b_u(\alpha) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sin[u(\theta_j - \alpha)] = -a_u(0) \sin(u\alpha) + b_u(0) \cos(u\alpha);$$

$$r_u(\alpha) = \sqrt{a_u^2(\alpha) + b_u^2(\alpha)} = \sqrt{a_u^2(0) + b_u^2(0)} = r_u(0);$$

$$\mu_u(\alpha) = \mu_u(0) - u\alpha;$$

8) вибіркова характеристика асиметрії (ВХА) g_1 :

$$g_1 = b_3(\mu_1)/V^{3/2} = r_2 \sin[\mu_2(0) - 2\mu_1]/V^{3/2}; \quad (13)$$

9) вибіркова характеристика ексцесу статистики різниць ФХС (ВХЕ) g_2 :

$$g_2 = [r_2 \cos[\mu_2(0) - 2\mu_1] - (1 - V)^4]/V^2. \quad (14)$$

3. Модуль оцінки довірчих інтервалів.

Основними формами представлення похибки результатів вимірювань є розширена невизначеність та довірчий інтервал. Розроблений програмний комплекс має можливість визначення довірчого інтервалу за двома методами – класичним та методом «розкрутки» (англ. Bootstrap method). Класичний метод передбачає оцінку середнього кута $\bar{\theta}$ та емпіричного середнього квадратичного відхилення для кутів вибірки θ , визначення коефіцієнтів Стюдента урахуванням гіпотези про близький до гаусівського розподіл кругового серединного кута і формування довірчого інтервалу як $\bar{\theta} \pm t_{n,p_{доп}} \cdot \sigma$. Методи «розкрутки» або перестановки вперше були описані Бредлі Ефроном у 1979 році. Вони мають ряд модифікацій в залежності від застосування та вимагають великої кількості обчислень [5]. Застосування методу для знаходження довірчого інтервалу випадкового кута полягає у побудові $j = 1 \dots N$ вибірок $\theta'_1 \dots \theta'_n$ із заданої $\theta_1 \dots \theta_n$, кутових середніх напрямів $\mu'_1 \dots \mu'_N$ та побудові для них варіаційного ряду $\mu'_1 \leq \dots \leq \mu'_N$. Для 95% довірчого інтервалу знаходяться 2,5 та 97,5 процентілі.

Для режиму опрацювання вхідної вибірки методом «розкрутки» програмний комплекс передбачає попередню її діагностику на визначення обсягу та прийняття рішення про виконання однієї з двох вбудованих модифікацій методу. Алгоритм для побудови довірчого інтервалу для малих ($n < 30$) вибірок детально описано в [6]. У випадку $n \leq 8$ вибірка вважається «дуже малою» та передбачає застосування алгоритму з більшою кількістю обчислень [2]. Число 8 було обрано експериментально при проведенні більше 1000 дослідів для двох розглянутих методів та порівняння такого показника, як довжина довірчого інтервалу.

4. Модуль графічного представлення результатів.

Результати генерування та опрацювання випадкових кутів представлені на панелі відображення у вигляді гістограм та кругових діаграм (рис. 1, 2, 3).

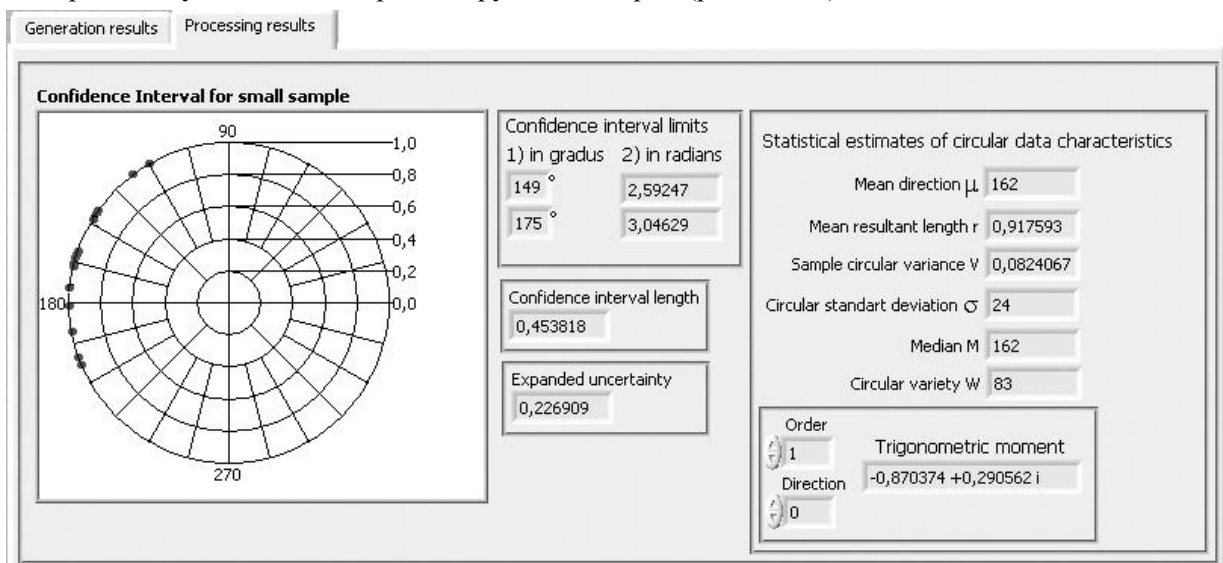


Рис. 3. Панель відображення результатів генерування та опрацювання кутових даних
Панель керування режимами роботи програмного комплексу представлена на рис. 4.

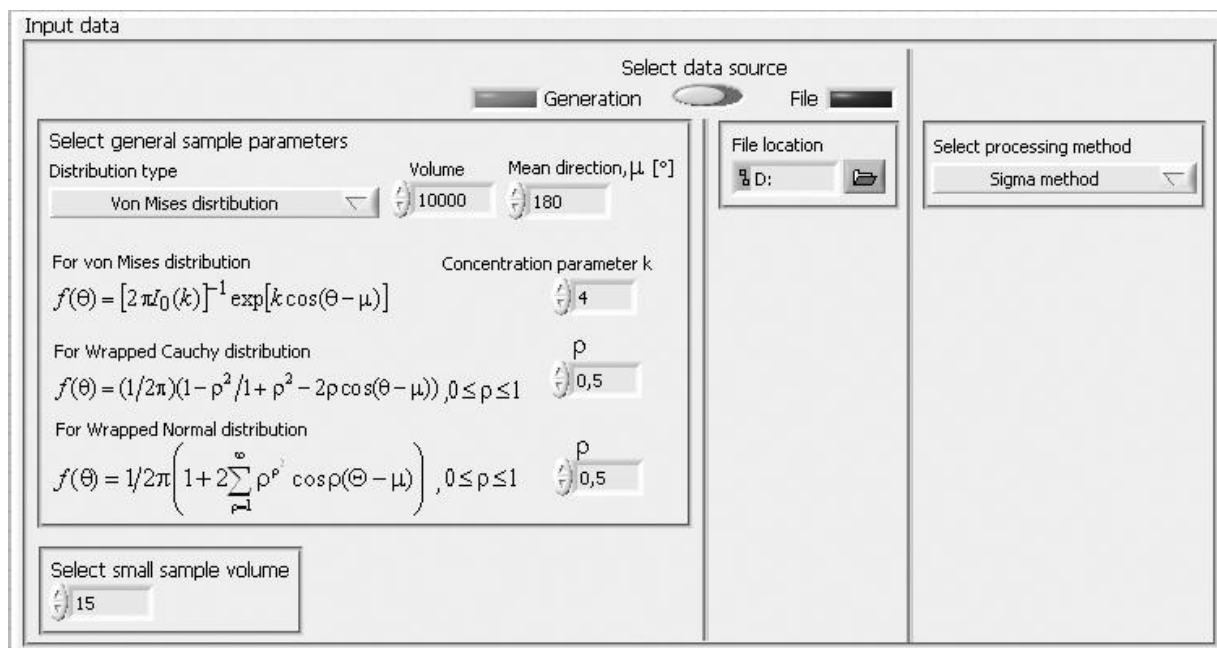


Рис. 4. Панель керування програмним комплексом

Розроблений програмний комплекс дозволяє проводити комп'ютерні вимірювальні експерименти з випадковими кутами, порівнювати ефективність різних алгоритмів опрацювання кутових даних, візуалізувати результати розрахунків.

Висновки

В статті розглянуто програмний комплекс, розроблений в середовищі LabView і призначений для опрацювання та моделювання результатів кутових та фазових вимірювань.

Програмний комплекс може бути використаний для:

- 1) моделювання вибірок випадкових кутів з розподілами Мізеса, намотаного Коші та намотаного нормального з можливістю керування їх параметрами;
- 2) статистичне опрацювання малих вибірок, кутових даних та розрахунок основних статистичних характеристик для вибірок випадкових кутів;
- 3) визначення довірчих інтервалів для вибірок випадкових кутових значень за двома методами – класичним та «розкрутки» з попередньою діагностикою вхідної вибірки для вибору модифікації методу «розкрутки» в залежності від її обсягу;
- 5) графічного відображення результатів моделювання вибірок випадкових кутів та результатів їх опрацювання.

Список літературних джерел

1. Circular data simulation: proceedings the fourth world congress [“Aviation in the XXI-st centurx 2010”], (Kyiv, 21-23 September 2010) / Blizniuk E.D., Kuts Y.V., Shengur S.V., Shcherbak L.M. [etc.]. – К.: NAU, 2010. – P. 12.21-12.26.
2. Fisher N.I. Statistical analysis of circular data. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.– 277 p.
3. Куц Ю.В. Статистична фазометрія./Куц. Ю.В., Щербак Л.М. – В.:Тернопіль, 2009,–383с.
4. Mardia K.V. Statistics of Directional Data / K.V. Mardia and P.E. Jupp – London: Academic Press Inc., 1972 – 415 p.
5. B. Efron and R. Tibshirani. Source Bootstrap Methods for Standard Errors, Confidence Intervals, and Other Measures of Statistical Accuracy Author(s): B. Efron and R. Tibshirani Source: Statistical Science, Vol. 1, No. 1 (Feb., 1986), pp. 54-75.
6. Куц Ю.В., Шенгур С.В., Щербак Л.М. Характеристика кутових вимірювань при статистиках малого обсягу // Системи обробки інформації. – Збірник наукових праць. – Випуск 4(85). – Харків, 2010, – С.92-95.