

УДК 621.391

Л.О. Уривський, д.т.н.  
К.А. Прокопенко

## УМОВИ ВИБОРУ ЗАВАДОСТІЙКОГО БЛОКОВОГО КОДУ В КАНАЛІ З ЗАДАНИМИ ПОКАЗНИКАМИ ДОСТОВІРНОСТІ

Національний технічний університет України «КПІ», [leonid\\_uic@ukr.net](mailto:leonid_uic@ukr.net), [k.prokopenko@ukr.net](mailto:k.prokopenko@ukr.net)

*У цій статті наводиться опис необхідності поєднання двох теорій, теорії інформації і теорії завадостійкості, задля спільної мети - пошуку завадостійкого коду. Побудовано модель, яка відображає частоту появи помилок в залежності від параметрів каналу, і приведена залежність продуктивності джерела повідомлень від параметрів каналу. Відтворені відомі границі завадостійких кодів і в цих же координатах побудовані точки, що відповідають реальним кодам.*

**Ключові слова:** завадостійкий код, межа Шеннона, бітова ймовірність помилки.

### Вступ

Теорія інформації, сформульована К.Шенноном через постулати і фундаментальні теореми більше 60 років тому, відкрила епоху яскравих досягнень в області підвищення достовірності зв'язку на основі завадостійкого кодування.

### Аналіз останніх досліджень та публікацій

За перші 45 років після публікації К. Шеннона, було винайдено велику кількість складних систем і досить ефективних методів завадостійкого кодування. Проте, показники жодної з них не наблизилися до границі Шеннона. Перше видатне досягнення, що відбулося в 1993 році, пов'язане з відкриттям турбо кодів, які наближають пропускну спроможність каналу на думку Вергоу до границі Шеннона [1]. У сьогодишніх виданнях, присвячених завадостійкому кодуванню [2], саме цим досягнення приділяється велика увага.

У зв'язку з цим актуальною проблемою є пошук завадостійких кодів, що забезпечують пропускну спроможність близьку до шеннонівської. Рішення цієї проблеми є одним з напрямів оптимізації при розвитку технологій передачі нових поколінь.

### Постановка завдання

Відповідно до теореми Шеннона у разі, якщо швидкість створення повідомлень джерелом не перевершує деякої величини, що називається пропускну спроможністю каналу, то при відповідному кодуванні і декодуванні можна здійснити передачу повідомлень по каналу з завадами з досить малою вірогідністю помилки. Отже, якщо обмежувати швидкість передачі символів джерела, то можна добитися малої вірогідності помилки на приймальній стороні.

Приведене вище твердження Шеннона стало основою для розвитку нової теорії - теорії завадостійкого кодування. У її межах синтезована величезна кількість різноманітних кодів, здатних виправляти велику кількість помилок в каналах з різною якістю.

Проте у межах теорії завадостійкого кодування не знаходиться місця для вирішення завдання визначення коду, який би не лише виправляв помилки в заданому каналі і забезпечував необхідну достовірність, але і щоб при цьому швидкість кодування максимально наближалася до значення пропускну спроможності такого каналу. Хоча саме такий код претендує на статус оптимального завадостійкого коду у рамках теорії інформації.

У свою чергу, судження про якість каналу з позицій достовірності символів, що приймаються, формується у рамках створеної В. А.Котельниковим теорії потенційної завадостійкості. Таким чином, в цій статті вирішується завдання пошуку умов вибору блокового коду, шляхом поєднання двох теорій.

### Вирішення поставленого завдання

Відомі співвідношення, в яких об'єднані показники теорії інформації (пропускну здатності  $C$ ) і теорії потенційної завадостійкості (вірогідність помилки  $P_{0ш}$  при прийомі поодинокого символу). Для дискретного каналу з перешкодами у разі передачі двійкових символів значення пропускну спроможності  $C$  визначається формулою:

$$C = V \cdot \{1 + P_{0ш} \cdot \log P_{0ш} + (1 - P_{0ш}) \cdot \log(1 - P_{0ш})\}, \quad (1)$$

де  $V$  - швидкість передачі символів в каналі.

Множник у фігурних дужках співвідношення (1) чисельно співпадає з показником взаємної ентропії  $E_I$  одного переданого символу, тобто з тією кількістю інформації  $E_I \leq 1$  біт, яке

збереглося після передачі по каналу 1 біта інформації від двійкових символів джерела в результаті дії перешкод. Взаємна ентропія  $E_I$  безпосередньо залежить від енергетичного параметра дискретного каналу, в якому діє перешкода із спектральною щільністю  $N_0$ , а потужність сигналу в точці прийому рівна  $P_S$  (рис.1).

$$h^2 = \frac{P_S}{N_0 \cdot V} \quad (2)$$

Зі збільшенням значення енергетичного параметра збільшується значення взаємної ентропії. У розглянутій залежності, за основу був взятий дискретний канал з фазовою маніпуляцією, де вірогідність помилки визначається через співвідношення:  $P_{ОШ}(h^2) = 0,5[1 - \Phi(\sqrt{2h^2})]$ , (3)

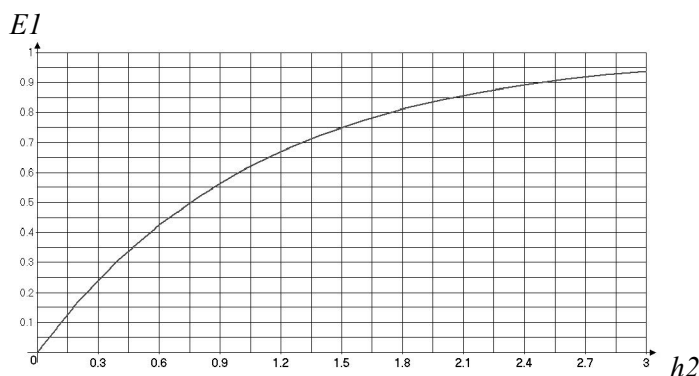


Рис. 1. Залежність взаємної ентропії  $E_I$  від енергетичного параметра  $h^2$

де  $\Phi(x)$  - функція Крампа.

Відмітимо, як це витікає з (2), що енергетичний параметр  $h^2$  зменшується з ростом значення швидкості передачі символів  $V$ . Таким чином, співмножники в співвідношенні (1) протилежним чином впливають на значення  $C$  при збільшенні швидкості  $V$  передачі символів в каналі.

Інший парадокс співвідношення (1) проявляється в тому, що воно не містить ніяких параметрів, які б зв'язували значення пропускної спроможності з обставинами кодування, про яке йдеться в теоремі Шеннона.

Перший крок до вирішення цього парадоксу полягає в тому, що в припущенні, що швидкість оптимального надлишкового коду  $R = k/n$  (4)

забезпечує передачу кожних  $k$  символів джерела в послідовності з  $n$  закодованих символів зі швидкістю, що співпадає з пропускною спроможністю каналу  $C \leq V$ , то таке твердження примушує визнати рівність показників:  $E_I = R$ .

Розвиток обставин, пов'язаних із завданням пошуку оптимального завадостійкого коду, виникає на стику теорії потенційної завадостійкості і теорії завадостійкого кодування.

Вірогідність того, що в послідовності з  $n$  символів в каналі з енергетичним параметром  $h^2$  виникне рівно  $m$  помилок, визначається формулою:

$$P_m(m, n, h^2) = \frac{n!}{m!(n-m)!} P(h^2)^m (1 - P(h^2))^{n-m} \quad (5)$$

Залежності, що відповідають (5), приведені на рис.2.

З рис. 2 витікає, що при заданій довжині блоку ( $n = 100$ ) можлива поява  $m$  помилок з різною вірогідністю  $P(m)$ , залежною від параметра  $h^2$ . При цьому кожному значенню  $m$  помилок відповідає деяке значення  $h^2$ , при якому досягається максимальне значення  $P(m, h^2) = P_{max}(m)$ . При зменшенні значень  $h^2$  максимуми зміщуються в область великих значень  $m$ , що відповідає фізичній природі передачі сигналів.

Гістограми, що відображають значення  $m = \arg\{P_{max}(n, m)\}$  для різних  $n \leq 100$  як функцій параметра  $h^2$ , приведені на рис.3.

У свою чергу, з врахуванням (5) вірогідність того, що в інформаційній послідовності з  $n$  символів буде не більше за  $m \leq t$  помилок :

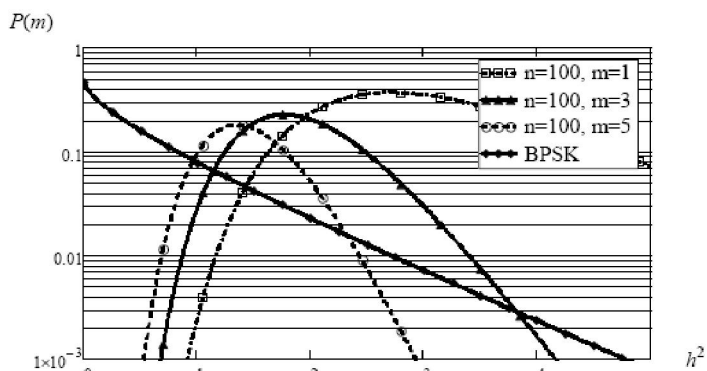


Рис. 2. Залежності вірогідності того, що у блоці з 100 символів буде  $m = 1, 3, 5$  помилок і відповідна вірогідність помилки символу ФМ-2, що передається, від  $h^2$

$$P(m \leq t, h^2) = \sum_{i=1}^t P_i(i, n, h^2) \quad (6)$$

Графічне представлення залежності вірогідності того, що у блоці з 100 символів буде не більше 1, 3, 5 помилок і вірогідність помилки символу ФМ-2 (BPSK), що передається, від енергетики каналу представлено на рис.4. В даному випадку спостерігається великий вплив на сумарний результат вірогідності появи малої кількості помилок. З ростом суми і додавання нових елементів суми (вірогідності появи  $m > 1$  помилок), вклад останніх доданків стає все менш суттєвим.

Умова нормування  
 $\sum_{i=0}^n P_i(i, n, h^2) = 1$ , а вірогідність того, що кількість помилок буде більша  $t$ :

$$P(m > t, h^2) = \sum_{i=t+1}^n P_i(i, n, h^2) \quad (7)$$

Отже, код, що гарантовано виправляє  $t$  помилок у блоці з  $n$  знаків, забезпечує достовірність прийому декодованих символів з вірогідністю  $P_{\text{ошк}} = P\{m > t\}$ .

У таблиці 1 приведені результати розрахунку тієї кількості помилок, яка забезпечує вірогідність помилки на виході декодера  $P_{\text{ошк}} = 10^{-5}$ , і, отже, вірогідність появи більшого числа помилок  $P\{m > t\}$  не перевищує 0,001%.

При заданих параметрах каналу і відомому значенні  $n$  потрібні коди, що коригують, які б виправляли те число помилок, яке вказане в Таблиці. 1.

Таблиця 1

Довжина кодового блоку, $n$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Кількість допустимих помилок, $t$	5	6	7	8	9	9	9	10	10	11

Отже, на основі попередніх міркувань виявляється можливим визначити для вибраного значення  $n$  в каналі із заданими параметрами ту необхідно достатню кількість помилок  $m \leq t$ , яку повинен виправити завадостійкий код, щоб задовольнити вимоги користувача щодо достовірності  $P_{\text{ошк}} = P\{m \leq t\}$ .

Здану кількість помилок можна виправляти за допомогою завадостійкого блокового коду. Основними параметрами блокового коду є: довжина коду  $n$ , кількість інформаційних символів  $k$ , виправляюча здатність  $t$ , мінімальна кодова відстань  $d$  і швидкість кодування  $R = k/n$ .

Код, який може виправити  $t$  помилок у блоці завдовжки  $n$ , вибирається з сукупності відомих або потенційно можливих кодів.

Простір завадостійких кодів, що реалізуються, відображається в координатах  $\{k/n; d/2n\}$ , де  $k$  - кількість інформаційних символів у блоці завдовжки  $n$ ,  $k/n = R$  - швидкість коду,  $d$  - відстань Хеммінга для обраного коду, яка пов'язана з коректуючими властивостями коду співвідношенням:  $t \leq (d - 1)/2$  [3, 4].

Необхідні умови для існування кодів із заданими коректуючими властивостями визначають межі Плоткіна і Хеммінга. Межа Плоткіна задається наступними умовами: якщо довжина кодового блоку  $n \geq 2d - 1$ , то число перевірочних символів  $r = n - k$ , необхідних для того, щоб мінімальна відстань лінійного коду досягла значення  $d$ , рівне саме менше  $2d - 2d - \log_2 d$ . Як наслідок,

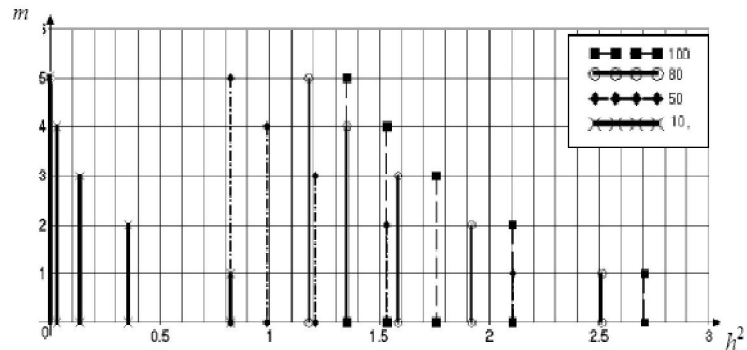


Рис. 3. Найбільш вірогідна кількість помилок у блоці заданої довжини  $n$  при заданих параметрах каналу.

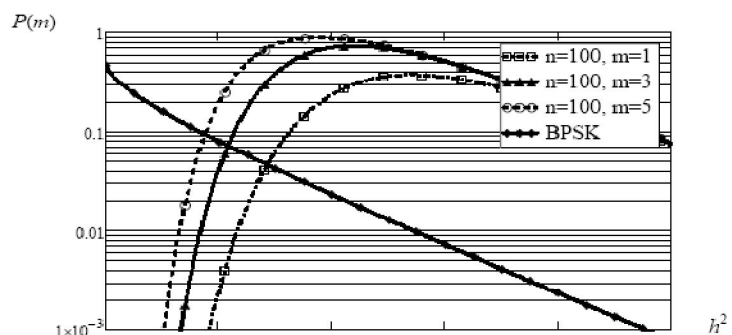


Рис. 4. Залежності вірогідності того, що у блоці з 100 символів буде не більше  $m \leq t = 1, 3, 5$  помилок і відповідній вірогідності помилки символу ФМ-2, що передається, від  $h^2$

$$R \leq 1 - \frac{2d - d - \log_2 d}{n} \quad (8)$$

Інша форма запису для межі Плоткіна :  $k \leq n - (2d - 2 - \log_2 d)$  (9)

Межа Плоткіна застосовується для кодів з великими значеннями  $n \gg 1$ .

Межа Хеммінга відповідає досконалим кодам. Межа для числа перевірючих символів  $r = n - k$ , необхідних при заданих значеннях  $k$  і  $t$  :  $r \geq \log_2 \sum_{i=0}^t C_n^i$  (10)

Достатні умови для існування кодів із заданими коректуючими властивостями визначає межа Варшимова-Гільберта. Межа Варшимова-Гільберта зводиться до твердження того, що існує  $(n, k)$  - код з мінімальною відстанню, щонайменше,  $d$ , який задовольняє наступній нерівності:

$$\sum_{i=0}^{d-2} C_{n-1}^i \geq 2^{n-k} \quad (11)$$

На рис. 5 відображені межі Плоткіна, Хеммінга і Варшимова-Гільберта, а також відомі коди в координатах точок  $\{k/n; d/2n\}$ .

На підставі рівності  $E_1 = R$  і співвідношень (1) і (3) можна визначити граничну швидкість кодування шуканого завадостійкого коду  $R_{\text{гр}} \leq R$ , а потім по проекції на одну з меж - значення відповідного параметра  $d/2n$ . При заданій з допомогою (4) і (5) характеристиці  $t$  визначається необхідне значення  $d$ , а, отже, і  $n$ . Нарешті, по вчислених  $R_{\text{гр}} = k/n$  і  $n$  визначається  $k$  в класі відомих (рис. 5) або таких, що синтезуються кодів. Таким чином, усі умови для визначення коду, що наближається до межі Шеннона при відомих параметрах каналу, викладені.

### Висновки

У рамках цієї роботи уперше для пошуку завадостійкого коду поєднуються дві автономно існуючі теорії і отримані наступні умови вибору коду :

1. Можливість досягнення скільки завгодно високої достовірності передачі символів в каналі при використанні надмірних кодів доведена К.Шенноном у рамках теорії інформації.

2. Обчислення значень пропускної спроможності  $S$  виявляється прерогативою використання результатів як теорії інформації, так і теорії потенційної завадостійкої, як це показано в співвідношенні (1).

3. Завдання виправлення заданого числа помилок  $t$  у блоці відомої довжини  $n$ , що виникли в каналі з середньою частістю помилок Рош в нескінченній послідовності символів, формулюється в результаті об'єднання результатів потенційної завадостійкої та і теорії завадостійкого кодування, як це показано в співвідношеннях (4) - (6).

4. Теорія завадостійкого кодування містить знання про передільні коректуючі можливості відомих і потенційних кодів (рис.5), проте не зв'язує ці знання з межами пропускної спроможності реальних каналів.

### Список літературних джерел

1. C. Berrou, A. Glavieux, and P. Thitimajshima, "Near Shannon limit error - correcting coding and decoding: Turbo codes," Proc. 1993 Int. Conf. on Communications, 1993, pp. 1064-1070.
2. Ryan, William E., Shu Lin (2009). Channel Codes : Classical and Modern. - Cambridge University Press, 2009 - 692 p
3. Зюко А.Г. Завадостійка і ефективність систем зв'язку. - 2-е видавництво, перераб. і доп. - М.: Радіо і Зв'язок, 1986. - 360 с.
4. Зюко А.Г., Кловський Д.Д. та ін. Теорія електричного зв'язку : Підручник для внз/А.Г.Зюко, Д.Д.Кловський, В. І.Коржик, М.В.Назаров; Під. ред. Д. Д. Кловського. - М.: Радіо і зв'язок, 1999. - 432 с.

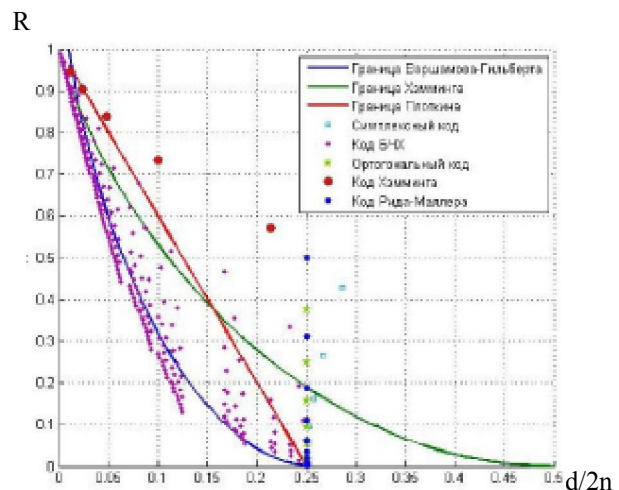


Рис. 5. Межі завадостійкого кодування і точки реальних кодів.