

УДК 625.72:656.11(045)

Белятинський А.О., д.т.н.

Кужель Н.В.

МЕТОДИКА ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ МІКРО-МОДЕЛІ ТРАНСПОРТНОГО ПОТОКУ – СЛІДУВАННЯ ЗА ЛІДЕРОМ

Національний авіаційний університет, e-mail: beljatynskij@mail.ru, kuzhelnina@ukr.net.

Стаття присвячена розвитку методики оцінки швидкості та прискорення автомобіля під час руху у колоні «за лідером» на основі нових математичних методів

Ключові слова: оцінка швидкості руху автомобіля, рух у колоні «за лідером», швидке сплайн-перетворення.

Вступ

Залежно від завантаження дороги розрізняють кілька характерних режимів транспортних потоків, пов'язуючи з ними поняття про рівні зручності руху.

Щільний, або насичений, потік (рівень зручності руху Γ) – це найбільш складна структурна форма транспортного потоку, для якого характерні однакові швидкості й приблизно однакові відстані між прямуючими один за одним автомобілями, немає можливості обгону, тобто рух кожного автомобіля потоку пов'язаний з діями переднього автомобіля. Швидкість руху різко знижується. В місцях погіршення дорожніх умов можуть виникати затори. Умови роботи водія напружені.

Рух в щільному потоці машин вимагає особливої уваги і високої концентрації. У даному випадку особливої актуальності набуває дотримання рядності, яке є головною умовою швидкої і безпечної їзди в транспортному потоці. Часта і даремна зміна смуги руху - джерело додаткових перешкод та незручностей іншим водіям, і нерідко призводить до виникнення ДТП.

При їзді в щільному потоці машин вибирати швидкість руху потрібно, виходячи з швидкості руху всього потоку. Відмінною рисою їзди в обмежених умовах є те, що водії втомлюються швидше, ніж завжди, а також - нерідко втрачають контроль над собою, прагнучи обігнати рухомі попереду транспортні засоби. Основна частка ДТП трапляється при спробах зміни смуги руху, в яких стикаються машини попутного напрямку.

Аналіз досліджень та публікацій

При розв'язанні питань, пов'язаних зі зменшенням числа дорожньо-транспортних пригод (особливо викликаних зіткненням автомобілів між собою), необхідно детально вивчити взаємодію автомобілів, що рухаються один за одним.

Основи математичного моделювання закономірностей дорожнього руху були закладені в 1912 році російським ученим професором Г. Д. Дубеліром.

Перша спроба узагальнити математичні дослідження транспортних потоків і представити їх у вигляді самостійного розділу прикладної математики була зроблена Ф. Хейтом.

У результаті вивчення транспортних потоків високої щільності і спеціальних експериментів, проведених американськими фахівцями, була запропонована теорія проходження за лідером, математичним виразом якої є мікроскопічна модель транспортного потоку.

Мікроскопічною її називають тому, що вона розглядає елемент потоку, пару слідкуючих один за одним транспортних засобів. Особливістю цієї моделі є те, що в ній відображені закономірності комплексу «водій-автомобіль-дорога-середовище», зокрема, психологічний аспект управління автомобілями. Він полягає в тому, що при русі в щільному транспортному потоці дії водія обумовлені змінами швидкості лідируючого автомобіля і дистанції до нього.

Це питання розглянуто у роботах іноземних та вітчизняних науковців, таких як Ф.Хейт [1], В. Сильянов [2], Е.Лобанов [3,4] та ін.

Теорія «слідування за лідером» є розвитком теорії спрощених динамічних моделей. Вона базується на гіпотезі про існування деякої закономірності взаємодії автомобілів, які рухаються один за одним на близькій відстані. Диференційне рівняння теорії «слідування за лідером» одержане з початкової умови, що усі автомобілі рухаються в колонні на відстані, яка вимагається правилами дорожнього руху. Тоді координати положення n -го і $(n+1)$ -го автомобілів можна описати залежністю:

$$x_{n+1} = x_n + (l_0 + t_p v_n) + l_{n+1}, \quad (1)$$

де l_0 – мінімальна відстань між стоячими автомобілями; $t_p v_n$ – відстань між автомобілями, які встановлюються у залежності від швидкості руху; l_{n+1} – довжина автомобіля; n – порядковий номер автомобіля.

Диференціюючи рівняння (1) за часом, одержуємо $\frac{dx_{n+1}}{dt} = \frac{dx_n}{dt} + t_p \frac{dv_n}{dt}$, де $n = 1, 2, 3$.

Це рівняння може бути виражено через швидкість у наступному вигляді:

$$v_{n+1} = v_n + t_p \frac{dv_n}{dt}, \quad v_{n+1} - v_n = t_p \frac{dv_n}{dt}, \quad \frac{dv_n}{dt} = \frac{1}{t_p} (v_{n+1} - v_n),$$

де $\frac{dv_n}{dt}$ – прискорення заднього автомобіля; v_n та v_{n+1} – швидкості заднього і переднього автомобілів; t_p – час реакції водія.

Можна виразити це правило через прискорення $\frac{d^2 v_n}{dt^2} = \frac{1}{t_p} \left(\frac{dv_{n+1}}{dt} - \frac{dv_n}{dt} \right)$.

Постановка завдання дослідження

Щоб дослідити цю модель руху за лідером для реальних об'єктів потрібно обробляти дані про рух зв'язаних об'єктів (наприклад, за допомогою GPS-приймача), які отримані з похибками (похибки викликані неточністю вимірювальної апаратури).

Також потрібно знаходити першу та другу похідні від «зашумлених» графіків руху об'єктів, що відповідає швидкостям та прискоренням руху автомобілів. Тому ставиться задача розробки математичного методу оцінки параметрів руху, який дозволив би мінімізувати вказані похибки.

Виклад основного матеріалу

Методи чисельного розрахунку похідної від функції, яка спостерігається на фоні випадкових похибок дослідних даних, оснований [5] на згладжуванні цієї функції поліномами найкращого середньоквадратичного наближення, рядами Фур'є, сплайнами. Тоді подальше знаходження самої похідної виконується аналітично.

Ставиться задача: обчислити чисельно похідну функції виду: $F(t) = \frac{dY(t)}{dt}$.

Нехай на відрізку $[0, T]$ в точках $t = \{t_i\}_{i=1}^N$ задані значення $Y = \{y_i\}_{i=1}^N$ деякої дискретної часової функції. Їм відповідають (ще не розраховані) відліки похідної $F = \{f_i\}_{i=1}^N$ в точках $t = \{t_i\}_{i=1}^N$. Тоді Y і F будуть пов'язані співвідношеннями: $F = PY$ і $Y = QF$, де P і Q – оператори диференціювання і інтегрування відповідно. Будемо вважати, що значення похідної F описуються локальним кубічним ермітовим сплайном $S_3 = XA$, де X – матриця планування, $A = \{a_j\}_{j=0}^r$ – вектор оцінюваних параметрів (ординат точок "склейки" ділянок сплайну). Такий сплайн належить C^1 -класу неперервно диференційованих функцій. Тоді $Y = QXA$. Позначимо через $W = QX$ матрицю, розмірністю $N \cdot (r+1)$, яка складається з проінтегрованих локальних функцій форми сплайну. Вимагатимемо виконання умови мінімуму середньоквадратичного відхилення:

$$\sum_{i=1}^N [y_i - \sum_{j=0}^r w_{ij} a_j]^2 = \min, \quad j = \overline{0, r}.$$

Цій умові задовольняє розв'язок системи нормальних рівнянь:

$$(Y - WA)^T (Y - WA) = \min; \quad W^T WA = W^T Y; \quad A = (W^T W)^{-1} W^T Y = Z^{-1} B.$$

Знайдений вектор оцінюваних параметрів $A = \{a_j\}_{j=0}^r$ повністю визначає сплайн $S_3 = XA$.

Відмітимо, що матриці W^T і Z^{-1} не залежать від вхідних параметрів і можуть бути розраховані попередньо. Таким чином, за часовими відліками початкової функції $Y = \{y_i\}_{i=1}^N$ швидко знаходимо сплайн-апроксимацію S_3 похідної F цієї функції без попереднього розрахунку самих відліків похідної $F = \{f_i\}_{i=1}^N$.

Значення локального кубічного ермітова сплайну в довільній точці обчислюється як:

$$S(t) = a_{j-1}^1 x(t) + a_j^2 x(t) + a_{j+1}^3 x(t) + a_{j+2}^4 x(t) \quad \text{для } t \in [tu_j, tu_{j+1}],$$

де a_j - значення ординат вузлів "склейки" ділянок сплайну,

$kx(t)$ - локальні функції форми, дискретні значення яких заповнюють стовбці матриці планування X і розраховуються за формулами:

$$\begin{aligned} {}^1X_{ij} &= -\frac{h_j^2 x_{ij} (1-x_{ij})^2}{h_{j-1}(h_{j-1}+h_j)}, \quad j = \overline{2, r}, \quad i = \overline{1+m_{j-1}, m_j}; \quad {}^2X_{i1} = 1-x_{i1} - \frac{h_1 x_{i1}^2 (1-x_{i1})}{(h_1+h_2)}, \quad i = \overline{1, m_1}; \\ {}^2X_{ij} &= 1-x_{ij} - \frac{h_j x_{ij}^2 (1-x_{ij})}{(h_j+h_{j+1})} + \frac{h_j x_{ij} (1-x_{ij})^2}{h_{j-1}}, \quad j = \overline{2, r-1}, \quad i = \overline{1+m_{j-1}, m_j}; \\ {}^2X_{ir} &= 1-x_{ir} - \frac{h_r x_{ir} (1-x_{ir})^2}{h_{r-1}}, \quad i = \overline{1+m_{r-1}, m_r}; \quad {}^3X_{i1} = x_{i1} - \frac{h_1 x_{i1}^2 (1-x_{i1})}{h_2}, \quad i = \overline{1, m_1}; \\ {}^3X_{ij} &= x_{ij} - \frac{h_j x_{ij}^2 (1-x_{ij})}{h_{j+1}} - \frac{h_j x_{ij} (1-x_{ij})^2}{h_{j-1}+h_j}, \quad j = \overline{2, r-1}, \quad i = \overline{1+m_{j-1}, m_j}; \\ {}^3X_{ir} &= x_{ir} - \frac{h_r x_{ir} (1-x_{ir})^2}{h_{r-1}+h_r}, \quad i = \overline{1+m_{r-1}, m_r}; \quad {}^4X_{ij} = -\frac{h_j^2 x_{ij}^2 (1-x_{ij})}{h_{j+1}(h_j+h_{j+1})}, \quad j = \overline{1, r-1}, \quad i = \overline{1+m_{j-1}, m_j}; \\ x_{ij} &= \frac{x_i - \tilde{x}_{j-1}}{h_j}; \quad h_j = \tilde{x}_j - \tilde{x}_{j-1}; \quad j = \overline{1, r}; \quad x_i \in [\tilde{x}_{j-1}, \tilde{x}_j], \quad j = \overline{1, r-1}; \quad x_i \in [\tilde{x}_{r-1}, \tilde{x}_r]; \end{aligned}$$

$$m_j = \sum_{u=1}^j K_u, \quad j = \overline{1, r}; \quad m_{-1} = m_0 = 0; \quad m_r = N;$$

де K_u - кількість відліків на u -му відрізку.

Кількість операцій множення, додавання, необхідних для обчислення швидкої сплайн-апроксимації похідної від функції, яка спостерігається: $M = N \cdot (r+1) + (r+1)^2$.

Поведемо порівняння якості запропонованого методу чисельного розрахунку похідної від функції, яка спостерігається на фоні випадкових похибок дослідних даних, із класичним методом. Для прикладу візьмемо функцію $y(t) = 10t^3 + n(t)$ на інтервалі $[0, 2]$ (Рис.1), де $n(t)$ - гаусівський некорельований шум. Похідна детермінованої основи відповідно $y'(t) = 30t^2$ (Рис.1).

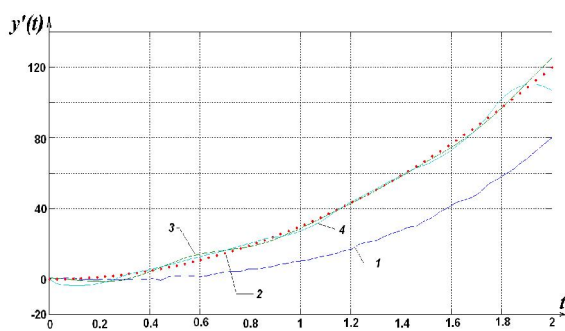


Рис. 1. Похідні, чисельно розраховані класичним та запропонованим методами від вхідного сигналу із середньоквадратичним відхиленням шуму $\sigma[n(t)] = 0,5$, де 1 – вхідний сигнал з шумом до диференціювання; 2 – теоретична похідна; 3 – похідна, чисельно розрахована запропонованим методом; 4 – похідна, чисельно розрахована класичним методом.

Для 64 відліків початкової функції і 16 вузлів "склейки" сплайну отримано наступні результати:

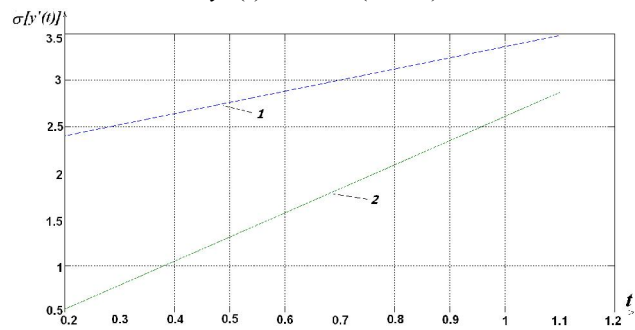


Рис. 2. СКВ теоретичної похідної від похідної, чисельно розрахованої класичним (STD_KL) та запропонованим (STD_NOV) методами, де 1 – СКВ теоретичної похідної від похідної, чисельно розрахованої класичним методом (STD_KL); 2 – СКВ теоретичної похідної від похідної, чисельно розрахованої запропонованим методом (STD_NOV).

- середньоквадратичне відхилення «вхідного» гаусівського некорельованого шуму змінювалося з 0,2 до 1,1 (Рис. 2);
- при цьому середньоквадратичне відхилення теоретичної похідної від похідної, чисельно розрахованої класичним методом, змінювалося з 2,40 до 3,48 (Рис. 2);
- середньоквадратичне відхилення теоретичної похідної від похідної, чисельно розрахованої запропонованим методом, змінювалося з 0,53 до 2,87 (Рис. 2).

В подібний спосіб можна розрахувати і швидку сплайн-апроксимацію другої похідної. Ставиться задача: обчислити чисельно другу похідну функції виду $Z(t) = d^2 Y(t)/dt^2$.

Нехай на відрізку $[0, T]$ в точках $t = \{t_i\}_{i=1}^N$ задані значення $Y = \{y_i\}_{i=1}^N$ деякої дискретної часової функції. Їм відповідають (ще не розраховані) відліки похідної $F = \{f_i\}_{i=1}^N$ в точках $t = \{t_i\}_{i=1}^N$, та відліки другої похідної $Z = \{z_i\}_{i=1}^N$ в точках $t = \{t_i\}_{i=1}^N$. Тоді Y і Z будуть пов'язані співвідношеннями $Z = VY$ і $Y = LZ$, де V і L - оператори двократного диференціювання та двократного інтегрування відповідно.

Будемо вважати, що значення другої похідної Z описуються локальним кубічним ермітовим сплайном $S_3 = XA$, де X - матриця планування, $A = \{a_j\}_{j=0}^r$ - вектор оцінюваних параметрів (ординат точок "склейки" ділянок сплайну). Такий сплайн належить C^1 - класу неперервно диференційованих функцій. Тоді $Y = LXA$. Позначимо через $G = LX$ матрицю, розмірністю $N \cdot (r + 1)$, яка складається з двічі проінтегрованих локальних функцій форми сплайну.

Вимагатимемо виконання умови мінімуму СКВ: $\sum_{i=1}^N [y_i - \sum_{j=0}^r g_{ij} a_j]^2 = \min, \quad j = \overline{0, r}.$

Цій умові задовольняє розв'язок системи нормальних рівнянь:

$$(Y - GA)^T (Y - GA) = \min; \quad G^T GA = G^T Y; \quad A = (G^T G)^{-1} G^T Y$$

Знайдений вектор оцінюваних параметрів $A = \{a_j\}_{j=0}^r$ повністю визначає сплайн $S_3 = XA$.

Відмітимо, що матриці G^T і $(G^T G)^{-1}$ не залежать від вхідних параметрів і можуть бути розраховані попередньо.

Таким чином, за часовими відліками початкової функції $Y = \{y_i\}_{i=1}^N$ швидко знаходимо сплайн-апроксимацію S_3 другої похідної Z цієї функції без попереднього розрахунку самих відліків другої похідної $Z = \{z_i\}_{i=1}^N$ та першої похідної $F = \{f_i\}_{i=1}^N$. Значення локального кубічного ермітова сплайну в довільній точці обчислюється за формулою:

$$S(t) = a_{j-1}^1 x(t) + a_j^2 x(t) + a_{j+1}^3 x(t) + a_{j+2}^4 x(t) \quad \text{для } t \in [t_{j-1}, t_{j+1}],$$

де a_j - значення ординат вузлів "склейки" ділянок сплайну, $k x(t)$ - локальні функції форми, дискретні значення яких заповнюють стовбці матриці планування X і розраховуються за формулами, вказаними вище.

Кількість операцій множення, додавання, необхідних для обчислення швидкої сплайн-апроксимації другої похідної від функції, яка спостерігається: $M = N \cdot (r + 1) + (r + 1)^2$.

Проведемо порівняння якості запропонованого методу чисельного розрахунку похідної від функції, яка спостерігається на фоні випадкових похибок дослідних даних, із класичним методом (згладжування цієї функції сплайном і подальше аналітичне знаходження самої похідної).

Для прикладу візьмемо функцію $y(t) = 10t^3 + n(t)$ на інтервалі $[0, 2]$ (Рис. 3), де $n(t)$ - гаусівський некорельований шум. Друга похідна детермінованої основи відповідно $y''(t) = 60t$ (Рис. 3).

Для 64 відліків початкової функції і 16 вузлів "склейки" сплайну отримано наступні результати:

- середньоквадратичне відхилення «вхідного» гаусівського некорельованого шуму змінювалося з 0,02 до 0,05 (Рис. 4);

- при цьому середньоквадратичне відхилення теоретичної другої похідної від другої похідної, чисельно розрахованої класичним методом, змінювалося з 2,72 до 12,45 (Рис. 4);
- середньоквадратичне відхилення теоретичної другої похідної від другої похідної, чисельно розрахованої запропонованим методом, змінювалося з 1,25 до 3,25 (Рис. 4).

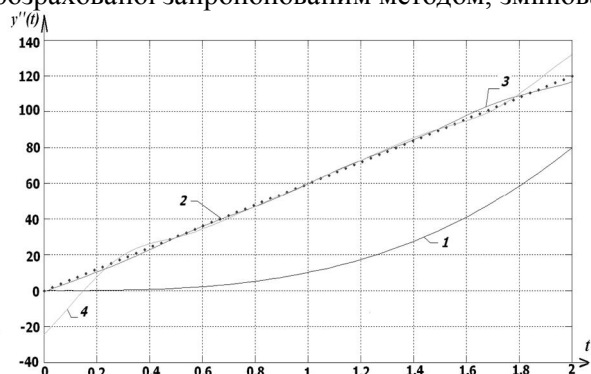


Рис. 3. Другі похідні, чисельно розраховані класичним та запропонованим методами від вхідного сигналу із середньоквадратичним відхиленням шуму $\sigma[n(t)] = 0,05$, де 1 – вхідний сигнал з шумом до диференціювання; 2 – теоретична друга похідна похідна; 3 – друга похідна, чисельно розрахована запропонованим методом; 4 – друга похідна, чисельно розрахована класичним методом.

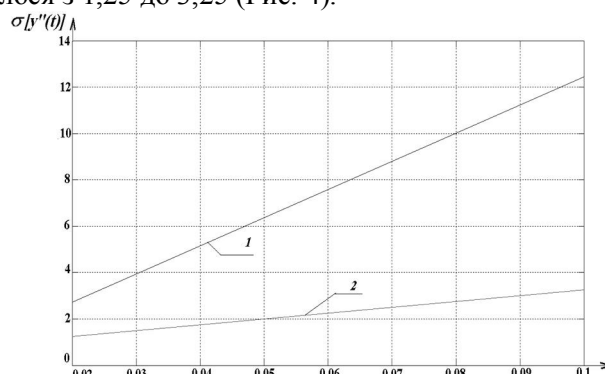


Рис. 4. Середньоквадратичні відхилення теоретичної другої похідної від другої похідної, чисельно розрахованої класичним (STD_KL) та запропонованим (STD_NOV) методами, де 1 – середньоквадратичне відхилення теоретичної другої похідної від другої похідної, чисельно розрахованої класичним методом (STD_KL); 2 – середньоквадратичне відхилення теоретичної другої похідної від другої похідної, чисельно розрахованої запропонованим методом (STD_NOV).

Висновки

1. Розроблено метод чисельного розрахунку похідної (швидкості руху автомобіля) з використанням швидкого сплайн-перетворення (побудовано «швидку» сплайн-апроксимацію похідної, яка розраховується з початкової функції без попереднього обчислення самої похідної цієї функції).
2. Розроблено метод чисельного розрахунку другої похідної (прискорення автомобіля) з використанням швидкого сплайн-перетворення (побудовано «швидку» сплайн-апроксимацію другої похідної, яка розраховується з початкової функції без попереднього обчислення самих першої та другої похідних цієї функції).
3. Проведено порівняння якості запропонованого методу чисельного розрахунку похідної від функції, яка спостерігається на фоні випадкових похибок дослідних даних, із класичним методом (згладжування цієї функції сплайном і подальше аналітичне знаходження самої похідної).
4. Таким чином, похибки чисельного розрахунку похідної від функції, яка спостерігається на фоні випадкових похибок дослідних даних, запропонованим методом менші ніж похибки чисельного розрахунку цієї ж похідної класичним методом.

Список літературних джерел

1. Ф.Хейт Математическая теория транспортных потоков – М: Изд-во «Мир», 1966. – 286 с.
2. В.В.Сильянов Теория транспортных потоков в проектировании дорог и организации движения – М.: «Транспорт», 1977. – 300 с.
3. Е.М.Лобанов, В.В. Сильянов Продолжительность реакции водителей в реальных дорожных условиях. – В кн.: Проектирование дорог и безопасность движения. – М.: Изд-во МАДИ, 1974, с.155-160. (Труды Моск. автом-дор. ин-та, вып. 72)
4. Е.М.Лобанов Время реакции водителя – М.: «Труды МАДИ», 1975, вып. 95, с.84-109.
5. Г.Корн, Т.Корн Справочник по математике – М.: «Наука», 1984. – 831 с.