

УДК 656.7.073:656.71 (045)

Г.М. Юн, д.т.н.

В.Ю. Гирич

## МОДЕЛІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ МЕХАНІЗМІВ ПРИ ВИКОНАННІ ЗАВАНТАЖУВАЛЬНО-РОЗВАНТАЖУВАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ В АЕРОПОРТАХ

Національний авіаційний університет, м. Київ, [vicg@bigmir.net](mailto:vicg@bigmir.net)

*Постійно зростаючі об'єми авіаційних вантажних перевезень, відсутність системних досліджень вітчизняних науковців по проблемі прийняття ефективних рішень при управлінні вантажопотоками в аеропортах, доводять необхідність дослідження проблем раціонального використання різних засобів механізації при реалізації завантажувальних та/чи розвантажувальних процесів. В роботі наведені розроблені математичні моделі оптимального розподілу засобів механізації у вантажних комплексах аеропортів при реалізації завантажувально-розвантажувальних процесів. Встановлено, що задачі даного типу відносяться до класу NP – складних задач, які потрібно вирішувати із застосуванням методу гілок та меж.*

**Ключові слова:** авіаційні вантажні перевезення, засоби механізації, завантажувально-розвантажувальні процеси, вантажі, математичні модель.

### Вступ

В схваленій розпорядженням Уряду України від 5 березня 2008 р. № 506-р Концепції Державної цільової програми розвитку аеропортів на період до 2020 року, приведення інфраструктури авіаційного транспорту у відповідність з міжнародними вимогами, підвищення ефективності і якості роботи авіаційної транспортної системи, визнано основною складовою стратегії нашої держави, спрямованої на забезпечення конкурентоспроможності України на світовому ринку.

Постійно зростаючі об'єми авіаційних вантажних перевезень, породжують важливі проблеми раціонального використання різних засобів механізації для ефективної реалізації завантажувальних та/чи розвантажувальних процесів в аеропортах. Виконання цих операцій, як правило, регламентується нормативними документами. Термін проходження вантажів від пункту відправлення до пункту призначення, містить виділений інтервал часу для виконання процесу завантаження та/чи розвантаження. Для деяких типів вантажів, наприклад, швидкопсувних, довжина цього інтервалу дуже мала. За цей короткий проміжок часу, необхідно виконати процес завантаження та/чи розвантаження транспортного засобу, що неможливо реалізувати без удосконалення способів прийняття рішень при управлінні вантажопотоками.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

На сьогоднішній день, число наукових праць, присвячених дослідженню задач оптимального розподілу механічного обладнання при виконанні завантажувальних та/чи розвантажувальних процесів, зростає по експоненціальному закону, у зв'язку із тим, що вони мають численне застосування на практиці. Подібні питання досліджувалися у роботах Лебедева С.С., Ковалевської М.І., Черенина В.П., а також в ряді інших робіт [1, 2, 3].

Так, наприклад, Черенин В. П. розробив метод послідовних розрахунків, для рішення задачі, яка розглядається. В наукових роботах Лебедева С.С. та Ковалевської М.І. використаний метод множника Лагранжа для вирішення задач типу розміщення. Ефроймсон М.Є. та Рей Т.Л. в своїх дослідженнях застосовують метод гілок і меж для вирішення проблем подібного типу. Проте, варто відмітити недостатню глибину цих досліджень, відсутність системного підходу до прийняття ефективних рішень.

### Постановка завдання

Однією із основних математичних задач, яка використовується при формуванні та розвитку доставки транспортних вантажів, являється задача оптимального розподілу засобів механізації (ЗМ) при реалізації завантажувально-розвантажувальних процесів. В цій задачі для виконання згаданих операцій за визначений час, відносно різних типів вантажів із заданими об'ємами, визначається число одиниць кожного виду обладнання, функціонування якого здійснюється із фіксованою послідовністю.

Ми будемо розглядати процеси завантаження та/чи розвантаження, як рух різних типів вантажопотоків між складськими майданчиками та транспортними засобами. У зв'язку із тим, що продуктивність різних ЗМ для кожного типу вантажу різна, використання цих механізмів для руху різноманітних вантажів може призводити до простою деякого обладнання, а також затримки вантажів на вході до іншого ЗМ. Тому виникають певні нетривіальні задачі в області прийняття рішень під час управління вантажопотоками. Для постановки основної задачі управління вантажними потоками, розглянемо конкретну динаміку здійснення наступного завантажувального процесу.

Нехай певним транспортним засобом (наприклад, повітряним судном) необхідно доставити різні вантажі із заданими об'ємами. Припустимо, що в поточний момент всі вантажі знаходяться на складському майданчику, відстань від якого до транспортного засобу невідома. При цьому, процес завантаження транспортного засобу повинен здійснюватися за заданий час. Для здійснення процесу завантаження транспортного засобу, задані також види механізмів, що використовуються у даному процесі, продуктивність яких визначена відносно всіх типів вантажів. Крім цього, дані ЗМ під час здійснення процесу завантаження повинні функціонувати по черзі у фіксованому порядку на окремих ділянках заданої відстані між транспортним засобом та складським майданчиком. Таким чином, процес завантаження транспортного засобу вантажами, які знаходяться на певній відстані від нього, можна представити у вигляді роботи деякої конвеєрної лінії, на якій розміщені одна або декілька одиниць техніки заданого виду, що працює у фіксованому порядку. При здійсненні процесу завантаження генерується (проектується) одна чи декілька конвеєрних ліній, як послідовність заданих видів засобів механізації, кожен із яких повинен виконувати свою роботу по черзі, відповідно до фіксованої послідовності функціонування цих ліній.

Проектування кожної такої конвеєрної лінії пов'язане з певними капітальними затратами, які складаються із загальної вартості засобів механізації та сумарних питомих вартостей простою різних видів ЗМ.

В даному випадку виникає задача оптимального розподілу засобів механізації. Вона полягає у знайденні числа конвеєрних ліній з певною кількістю обладнання всіх видів для завантаження транспортного засобу заданими об'ємами всіх типів вантажів за встановлений час, таким чином, щоб мінімізувати сумарні затрати, які визначаються як сума капітальних та експлуатаційних затрат, пов'язаних із цими лініями.

#### Математична модель задачі та її властивості

Математична модель задачі формулюється, як спеціальна задача дискретного програмування. Спочатку вводимо необхідну систему позначень. Нехай на складській площадці знаходиться  $K$  типів вантажів, і нехай  $B_k$  - об'єми  $k$ -го типу вантажу. Згідно з розкладом, процес завантаження транспортного засобу заданими об'ємами повинен бути виконаний за час  $T$ . Потрібно запроектувати конвеєрні лінії (кількість яких не задана), які складаються із всіх  $L$  видів засобів механізації, за допомогою яких здійснюється завантаження транспортного засобу заданими об'ємами  $B_k$  всіх типів вантажів. При цьому, на кожній конвеєрній лінії може поміститися не більше  $R_l$  одиниць  $l$ -го виду обладнання для всіх  $l = 1, \dots, L$  і вони повинні функціонувати по черзі у фіксованому порядку. Продуктивність  $l$ -го виду обладнання на  $k$ -му типі вантажу позначимо через  $t_{lk}$ , для всіх  $l = 1, \dots, L$  та  $k = 1, \dots, K$ .

Припустимо, що для кожного  $l$ -го виду засобу механізації відома питома вартість його простою  $d_l$ , де  $l = 1, \dots, L$ , а також  $c_l$  - вартість одиниці кожного виду  $l$ -го механічного обладнання для всіх  $l = 1, \dots, L$ ;  $T_i$  - поточний фонд робочого часу для конвеєрної лінії  $i$ , де  $i = 1, \dots, m$ .

Відмітимо, що тут число конвеєрних ліній  $m$  - невідоме і його потрібно знайти. Зрозуміло, що для кожного типу вантажу може бути запроектована окрема лінія, яка має мінімальний час сумарного простою. Тому, невідоме число поточних ліній ( $m$ ) можна обмежити зверху умовою  $m \leq K$ .

При цих даних потрібно визначити склад та число конвеєрних ліній, об'єми кожного типу вантажу, закріпленого за ними, таким чином, щоб мінімізувати експлуатаційні та капітальні затрати під час здійснення завантажувальних та/чи розвантажувальних процесів.

Позначимо через  $y_{li}$  невідоме число  $l$ -го виду механічного обладнання на  $i$ -ій конвеєрній лінії. Кожна генерована конвеєрна лінія має вузьке місце (neck) відносно вантажу типу  $k$ , яке визначається із умови:

$$neck_{ki} = \min\{t_{lk} y_{li}; l=1, \dots, L\}, \quad (1)$$

Відповідно до даних задачі, воно має бути позитивним цілим числом для всіх  $i$  та  $k$ . Для того, щоб врахувати експлуатаційні затрати, пов'язані із питомими затратами простою засобів механізації, необхідно визначити сумарний простій кожної конвеєрної лінії.

Включення у математичну модель задачі виразу визначення вартості сумарного простою призводить до її ускладнення, в результаті чого, застосування відомих числових методів стає неможливим. Проте, можна досягти більш суттєвих успіхів, аналізуючи функціональні властивості задачі. Для ефективного використання отриманих результатів, досліджуються основні особливості моделі. Це дозволить з'ясувати дійсну придатність конкретного числового рішення. В процесі підготовки даної задачі до аналізу, розглянемо представлення її моделі із використанням допоміжної задачі, рішенням якої попередньо генерується  $K$  чисел конвеєрних ліній. Таким чином отримуємо, що  $m=K$ , тобто одна лінія для кожного  $k$ -го типу вантажу, де  $k=1, \dots, K$ . Таким чином, відносно кожного  $k$ -го типу вантажу проектується конвеєрна лінія  $k$ , так щоб при здійсненні завантаження даного типу вантажу за допомогою даної лінії сумарний простій був мінімальним.

Математичну модель цієї задачі можна сформулювати наступним чином:

$$\text{знайти:} \quad f(y) = \frac{\sum_{l=1}^L d_l (t_{lk} y_{lk} - \min\{t_{lk} y_{lk}\})}{\min\{t_{lk} y_{lk}\}} \rightarrow \min, \quad (2)$$

$$\text{при обмеженнях} \quad 1 \leq y_{lk} \leq R_l, l=1, \dots, L, k=1, \dots, K, \quad (3)$$

$$y_{lk} - \text{ціле число для всіх } l=1, \dots, L \text{ та } k=1, \dots, K \quad (4)$$

Іншими словами, шляхом рішення даної задачі відносно кожного  $k$ -го типу вантажу генерується найкращий варіант конвеєрної лінії. Об'єктами для практичного застосування задач такого виду, як правило, являються підприємства та склади аеропортів, робота яких пов'язана із накладними витратами. Тому, для того щоб визначити рішення цієї задачі, можна застосувати простий перебірний алгоритм.

Нехай шляхом вирішення задачі (2) – (4) генеровані найкращі конвеєрні лінії для всіх типів вантажів. Таким чином, їх число  $m=K$ , і на кожній конвеєрній лінії знайдено склад та кількість засобів механізації. Описання моделі задачі оптимального розподілу конвеєрних ліній, шляхом вибору серед згенерованих  $K$  таких ліній, а також визначення кількості різних типів вантажів, які доставляються кожного із задіяних ліній, проводиться на базі інформації, отриманої після рішення задачі (2) – (4).

Рішення задачі (2) – (4) представимо у виді матриці  $Y$  із  $m$  рядками та  $n$  стовпчиками, де  $m=K$ ,  $n=L$ . Елементами матриці  $Y$  являються значення  $y_{lk}$ , тобто  $Y = \|y_{lk}\|$ . Після того як спроектовано  $K$  конвеєрних ліній, визначається їх оптимальна кількість для здійснюється процесу завантаження транспортного засобу.

Для формулювання математичної моделі цієї задачі знаходяться наступні коефіцієнти

$$d_{ij} = \min\{t_{lj} y_{li}; l=1, \dots, L\}; c_{ij} = \sum_{l=1}^L (t_{lj} y_{li} - d_{ij}) d_l; b_i = \sum_{l=1}^L c_l y_{li}, \text{ для всіх } i=1, \dots, m \text{ та } j=1, \dots, n.$$

Наведені параметри в задачі вибору складу конвеєрних ліній мають наступну економічну суть:  $d_{ij}$  - вузьке місце під час функціонування  $i$ -ої конвеєрної лінії при доставці  $j$ -го типу вантажу;  $c_{ij}$  - сумарний простій  $i$ -ої конвеєрної лінії при доставці  $j$ -го типу вантажу;  $b_i$  - вартість  $i$ -ої конвеєрної лінії.

Для того щоб побудувати математичну модель задачі, введемо керовані змінні  $x_{ij}$  та  $X_i$ , де  $x_{ij}$  - невідома кількість  $j$ -ого типу вантажу, закріпленого до  $i$ -ої конвеєрної лінії, і  $X_i=1$ , якщо поточна лінія  $i$ , яка генерується, буде задіяна в процесі завантаження та/чи розвантаження,  $X_i=0$  - в іншому випадку.

В прийнятій системі позначень математична модель задачі оптимального розподілу механічного обладнання має наступний вид:

$$\text{знайти} \quad \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^m b_i X_i \quad (5)$$

$$\text{при обмеженнях:} \quad \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} \leq T_i X_i, \quad i=1, \dots, m, \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = B_j, \quad j=1, \dots, n, \quad (7)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq \min\{T_i / d_{ij}, B_j\} X_i, \quad i=1, \dots, m; \quad j=1, \dots, n, \quad (8)$$

$$X_i = 0 \vee 1, \quad i=1, \dots, m, \quad (9)$$

де  $T_i = T$  для всіх  $i=1, \dots, m$ .

Обмеження (6) забезпечить, те що час функціонування кожної задіяної конвеєрної лінії не більший, ніж час заданий для завантаження транспортного засобу. Однак, після визначення оптимального рішення задачі (5) – (9), час функціонування кожної задіяної конвеєрної лінії уточнюється наступним чином.

Нехай визначено оптимальне рішення задачі (5) – (9), і нехай вектор  $X = (X_i; i=1, \dots, m)$  та матриця  $x = \|x_{ij}\|$ , представляють оптимальні значення змінних  $X_i$  та  $x_{ij}$ , відповідно. Якщо обмеження (6) для  $i=i_0$  виконується як рівність, то час функціонування конвеєрної лінії  $i_0$  дорівнює  $T_{i_0} = T$ , якщо ці обмеження виконуються як строга нерівність, то час

функціонування цієї лінії дорівнює  $\sum_{j=1}^n d_{i_0 j} x_{i_0 j}$ . Обмеження (7) забезпечить, те що задані

об'єми всіх типів вантажів будуть повністю завантажені у транспортний засіб за допомогою задіяних конвеєрних ліній. Обмеження (8) записане для того, щоб забезпечити прив'язку вантажних об'ємів до кожної задіяної конвеєрної лінії.

Розробка ефективних методів рішення даних задач і до сьогоднішнього дня залишається відкритим питанням. Із оцінки трудомісткості рішення таких задач, випливає, що вони відносяться до складно вирішувальних класів задач. Визначення складно вирішувальних класів задач можна знайти в роботах М.Р. Гері, А. Ахо, Дж. Хоркрофт, Дж. Улман, Х. Пападимитріу, К. Стайглиц [4].

### Висновки

У результаті проведених досліджень, розроблена математична модель задачі оптимального розподілу засобів механізації при виконанні завантажувально-розвантажувальних процесів у вантажних комплексах аеропортів. Доведено, що дана задача (5) – (9) відноситься до класу *NP – складних задач*. Доказ твердження випливає із того, що добре відома *NP – складна задача розміщення виробництва* являється окремим випадком цієї задачі [5]. Належність задачі (5) – (9) до класу *NP – складних задач* означає, що визначення її точного рішення пов'язане із певними складностями. Показано, що дана проблема формулюється, як задача мінімізації лінійної функції при обмеженнях транспортного типу із булевими змінними. Тому, для її рішення самим ефективним методом являються методи типу гілок та меж.

### Список літературних джерел

1. Лебедев С.С., Ковалевская М.И. Множители Лагранжа в простейшей задаче размещения // Исследования по дискретной оптимизации: книга. – М.: Наука, 1976. – с. 170-180.
2. Черенин В. П. Составление оптимального плана формирования однопутных поездов на ЭВМ // Вестник ВНИИЖТ, 1961, № 1. – с. 47-54.
3. Efroymson M. E., Rey T. L. A branch – bound algorithm for plant location, Operation Res., 1969, 17, №1. – p. 81-111.
4. Гери М.Р., Джонсон Д.С. Вычислительные машины и трудноразрешимые задачи. – М.: Мир, 1985. – 416 с.
5. Михайлович В.С., Трубин В.А., Шор Н.З. Производственные задачи транспортного типа: методы и алгоритмы. – М.: Наука, 1986. – с. 567.