

УДК 624.072.3

Ю.В. Киричук, к.т.н.

## ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕДІНКИ ПЛОСКОЇ ПРУЖИНИ СИСТЕМИ УДАРО- І ВІБРОЗАХИСТУ ПРИ ЗНАЧНИХ ЇЇ ПРОГИНАХ

Національний технічний університет України "КПІ", e-mail: [kirichuky@mail.ru](mailto:kirichuky@mail.ru)

*В статті наведені результати дослідження поведінки плоскої вигнутої пружної пластини (плоскої пружини) при значній її деформації.*

**Ключові слова:** пружина, метод скінченних елементів.

### Вступ

Одним з визначальних елементів системи ударо- і віброзахисту є плоска пружина, що виконує функцію демпфера сухого тертя [1]. На рис. 1 зображено половину профілю плоскої пружини (по довжині вздовж осі  $x$ ), жорсткість якої необхідно оцінити. Припускалося, що з урахуванням товщини пружини  $b$  закон, за яким змінюється серединна лінія профілю пружини

$$\text{при } 0 \leq x \leq L/2, \text{ має вигляд: } y = \frac{b}{2} + \frac{H-b}{2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{L} \right), \quad (1)$$

де всі величини пояснено на рис. 1. Крім того, пружина має прямі кінцеві подовження (на рис. 1 – в напрямку  $x < 0$ ), якими вона кріпиться.

### Аналіз останніх досліджень та публікацій

Задовільного аналітичного розв'язку задачі визначити не вдалося, оскільки в пружині і при пружних деформаціях реалізуються значні переміщення, тобто задача належить до класу геометрично нелінійних. Відомо, що у таких випадках нехтування нелінійними складовими в деформаціях призводить до значних похибок у розв'язках. Задача розв'язувалася чисельно, з застосуванням методу скінчених елементів, як тривимірна.

### Постановка задачі

Постановка межової задачі – стандартна, в декартовій системі координат. Рівняння рівноваги в лагранжевому підході за відсутністю масових та інерційних сил має вигляд:

$$\nabla_n [\sigma_{nj} (\delta_{ij} + \nabla_j U_i)] = 0; \quad i, j, n=1,2,3, \quad (2)$$

де  $\sigma_{nj}$  – компоненти симетричного тензора напружень; оператор  $\nabla_j$  містить частинні похідні по просторовим лагранжевим змінним щодо початкової конфігурації:  $\nabla_j = \partial / \partial x^j$ ;  $U_i$  – компоненти вектору переміщень;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Нелінійні геометричні співвідношення мають вигляд:

$$\varepsilon_{ij} = (\varepsilon_{ij})_L + (\varepsilon_{ij})_{NL} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x^j} + \frac{\partial U_j}{\partial x^i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial U_n}{\partial x^i} \frac{\partial U_n}{\partial x^j}; \quad i, j, n=1,2,3, \quad (3)$$

де  $\varepsilon_{ij}$  – компоненти тензора деформацій Гріна;  $(\varepsilon_{ij})_L$  і  $(\varepsilon_{ij})_{NL}$  – лінійна і нелінійна частини тензора деформацій відповідно.

Фізичні рівняння прийнято у вигляді лінійного закону Гука:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e = (E_{ijmn})^{-1} \sigma_{mn}; \quad i, j, m, n=1,2,3, \quad (4)$$

де для ізотропного матеріалу  $E_{ijmn} = G \cdot (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}) + \lambda \cdot \delta_{ij} \delta_{mn}$ ;  $G = E / 2(1 + \mu)$ ;  $\lambda = E\mu / (1 + \mu)(1 - 2\mu)$ ;  $E$  – модуль Юнга,  $\mu$  – коефіцієнт Пуасона.

$$\text{Силкові граничні умова на поверхні } S_p \text{ мають вигляд } \sigma_{nj} \nu_n \left( \delta_{ij} + \frac{\partial U_i}{\partial x^j} \right) \Big|_{S_p} = \hat{F}_i; \quad (5)$$

де  $\nu_n$  – напрямні косинуси нормалі до поверхні  $S_p$ ;  $F_i$  – компоненти вектору навантаження на поверхні  $S_p$ ; значок  $\hat{\phantom{x}}$  позначає величину, яку задано.

$$\text{Кінематичні граничні умови на поверхні } S_U \text{ мають вигляд } U_i \Big|_{S_U} = \hat{U}_i. \quad (6)$$

Принцип можливих переміщень для пружного середовища з нелінійними співвідношеннями між деформаціями та переміщеннями виглядає так само, як і для лінійного випадку:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} d\Omega - \int_S \delta U_i \hat{F}_i dS = 0. \quad (7)$$

Стандартна процедура скінченно-елементного наближення межевої задачі ([2], [3]) приводить до необхідності розв'язання нелінійної системи рівнянь вигляду

$$[K(\{q\})]\{q\} = \{P\}, \quad (8)$$

де  $[K(\{q\})]$  - матриця жорсткості,  $\{q\}$  - вектор вузлових переміщень,  $\{P\}$  - вектор навантаження.

Вона може розв'язуватися методом Ньютона-Канторовича [3].

### Розрахункова схема

Схема навантаження пружини проста (см. рис. 2а): в точці  $A$  на пружину діє прилад (додана вертикальна сила  $P$ ), а кінцеве подовження може прослизати в горизонтальному напрямку з сумарною силою тертя  $P_{тр}$ . Величина вертикальної осадки точки  $A$  може досягати половини  $H$ . В розрахунках можна використати іншу, але практично еквівалентну схему: замість сили  $P$  задавати вертикальну осадку  $\Delta$  точки  $A$ , а силу тертя моделювати розподіленим тиском по торцю кінцевого подовження пружини з сумарним зусиллям, рівним  $P_{тр}$  (рис. 2б). Але при цьому необхідно підраховувати значення  $P$ , оскільки потрібно збудувати графік залежності сили  $P$  від осадки  $\Delta$  (або навпаки), тобто графік жорсткості пружини.

Під час розв'язування задачі використали пакет прикладних програм ОКА (об'ємний скінченно-елементний аналіз). Застосували тривимірний ізопараметричний скінчений елемент, чотирикутний у плані, другого порядку наближення сирендипової сім'ї (20 вузлів), тобто наближення геометрії пружини проводилося практично точно. Основна схема навантаження відповідала рис. 2, а. Пружина має дві площини симетрії, що і було використано: розглядали чверть пружини, а переміщення вузлів, які належать до площин симетрії, в напрямках, що перпендикулярні цим площинам, заборонялися. Крім того, було заборонено переміщення вузлів, що виходять на верхню і нижню поверхні кінцевого подовження, в напрямку осі  $y$ , чим моделювалася «щілина», в якій пружина має можливість переміщатися з тертям.

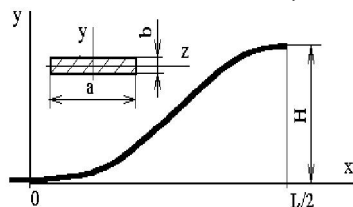


Рис. 1. Схема плоскої пружини

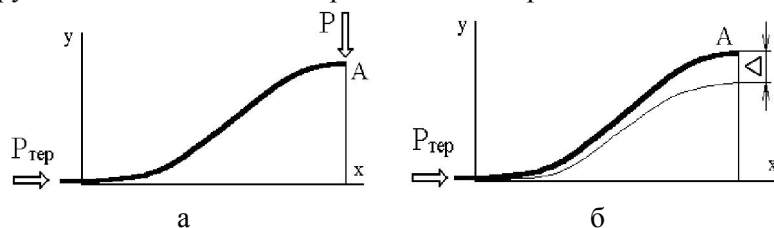


Рис. 2. Дві можливі розрахункові схеми пружини

Вхідні дані з геометрії пружини такі: ширина  $a=11.4\text{--}20$  мм; товщина  $b=0.8\text{--}2.0$  мм; довжина  $L=65\text{--}85$  мм; висота  $H=12\text{--}10$  мм. Можливість вибору була зумовлена необхідністю забезпечити міцність пружини.

Характеристики матеріалу пружини були прийняті такими: модуль Юнга  $E=2 \cdot 10^5$  МПа; коефіцієнт Пуасона  $\mu=0.3$ ; напруження на розтяг і стиск, що допускаються,  $[\sigma]=1500$  МПа.

Необхідно було забезпечити силу тертя  $F_{тр}=46$  Н і міцність пружини при осадці до 5 мм, після чого побудувати графік залежності сили  $P$  від осадки  $\Delta$  (жорсткості пружини).

Сила тертя задавалася як тиск величиною  $p=P_{тр}/ab$ , що доданий до торця кінцевого подовження. Для швидкого створення скінченно-елементних сіток було зроблено відповідну програму, яка працює у діалоговому режимі.

З метою перевірки в деяких розрахунках задавали величину осадки  $\Delta$ , тобто використовували схему рис. 2б. Для підрахунку сили  $P$  було написано і підключено до пакету ОКА підпрограму. Вона обчислює суму інтегралів  $P_y = \sum_e \int_S (\tau_{xy} \nu_x + \sigma_y \nu_y + \tau_{yz} \nu_z) dS \quad (9)$

з використанням квадратур Гауса за схемою  $3 \times 3$  точки (другий порядок наближення) за означеними поверхнями скінчених елементів, в даному випадку тих, що потрапили на площину симетрії, яка ділить довжину пружини навпіл. У формулі (9) враховано, що перегин, в якому

підраховуватиметься інтеграл, не повертається, а лише лінійно деформується і жорстко зміщується. Після цього обчислювалося значення  $P = 4P_y$ , оскільки розглядалася чверть пружини.

### Результати розрахунків

Спочатку було зібрано три скінчено-елементні сітки різноманітної щільності (кількість скінченних елементів (СЕ) вздовж, по товщині та по ширині чверті пружини): 23x2x4, 33x4x8 і 43x6x10, тобто по 184, 1056 і 2580 СЕ; 1233, 5599 і 12683 вузла; 3371, 16015 і 36729 ступенів вільності. Задавали точність збіжності результатів за квадратичною нормою вектора переміщень в 0,03 %. Результати розрахунків показали, що перша сітка дає недостатню точність різниці результатів, які було отримано на другій та третій сітці, складали біля трьох відсотків, що задовольняє. Тому далі застосовували сітку 33x4x8.

При малих значеннях осадки для отримання встановленої точності збіжності результатів виявлялося, що достатньо трьох ітерацій, а при  $\Delta = 5.0$  мм – п'ять.

Було проведено цикл розрахунків з метою вибору розмірів пружини, які забезпечують її міцність. Виявилось, що при значних  $\Delta$  пружина дуже навантажена; при зміні ширини пружини (розміру  $a$ ) максимальні напруження практично не змінюються; до зниження рівня максимальних напружень (при тій же осадці) приводять: збільшення довжини  $L$ , зменшення товщини  $b$ , зменшення висоти  $H$ ; практично однаковими є значення максимальних  $\sigma_{\max}$  і мінімальних  $\sigma_{\min}$  напружень, і до них наближається (але є меншою) величина інтенсивності напружень  $\sigma_u$  (за Мізесом), причому їхні максимуми локалізуються в приповерхневих шарах (згин) біля точки  $A$  (див. рис. 2) і біля переходу пружини в кінцеве подовження; чим менше відношення  $H/L$ , тим менша нелінійність графіку  $P - \Delta$ ; чим менше відношення  $H/L$ , тим менша нелінійність графіку  $P - \Delta$ .

Прийшли до висновку, що умовам міцності задовольняє (при  $\Delta \approx 5.0$  мм) пружина з розмірами:  $a = 11.4$  мм (конструктивно),  $b = 0.8$  мм,  $L = 85$  мм,  $H = 10$  мм. Нижче всі результати наведено саме для пружини цих розмірів.

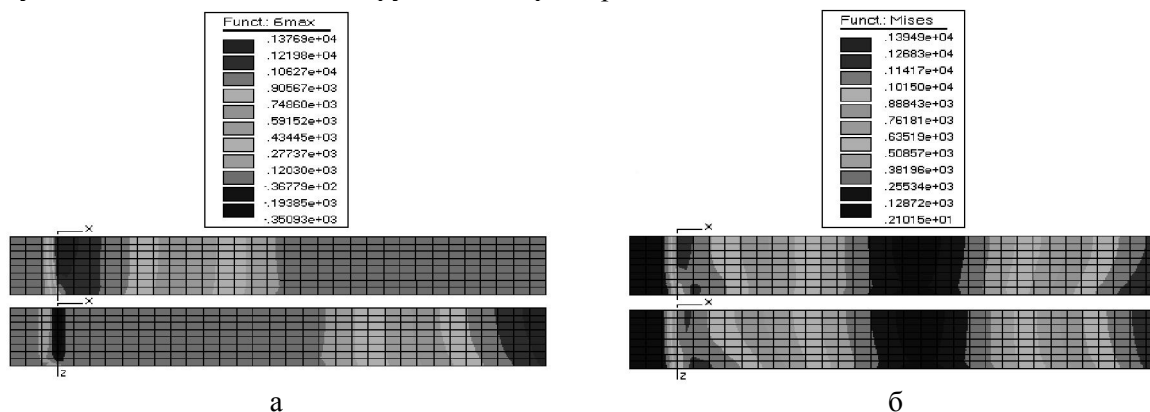


Рис. 3. Ізосмуги розподілу  $\sigma_{\max}$  – а і  $\sigma_u$  – б вздовж поверхні чверті пружини при вигляді згори та знизу ( $a = 11.5$  мм,  $b = 0.8$  мм,  $L = 85$  мм,  $H = 10$  мм,  $\Delta = 5.09$  мм)

На рис. 3 показано ізополоси розподілів  $\sigma_{\max}$  і  $\sigma_u$  по поверхні пружини (вигляд згори та знизу,  $\Delta = 5.09$  мм).

Було проведено звірку результатів, отриманих за схемами навантаження рис. 2б і рис. 2а: після прикладення сили  $P = 109.44$  Н (рівномірного по перетину дотичного навантаження інтенсивністю  $p_\tau = 6$  МПа) було отримано  $\Delta \approx 3.30$  мм, а після осадки  $\Delta = 3.30$  мм отримано інтегруванням значення  $P \approx 111.5$  Н. Відносна погрішність виявилася в межах до 2%, що допустимо. На рис. 4а показано ізосмуги розподілу вертикального переміщення  $U_y$  в пружині при вигляді збоку. В таблицях і на рис. 4б наведено залежності жорсткості пружини від величини її осадки (залежності  $P - \Delta$ ).

Крива I має початкову ділянку, яка відповідає закріпленій кінцевій частині пружини (по перетину з  $x = 0$ ). Це моделює відсутність її проковзування – сила тертя ще достатня. Друга ділянка кривої – при деформуванні пружини з проковзуванням. Точка перетину двох ділянок кривих відбиває момент початку проковзування з тертям кінцевої частини пружини.

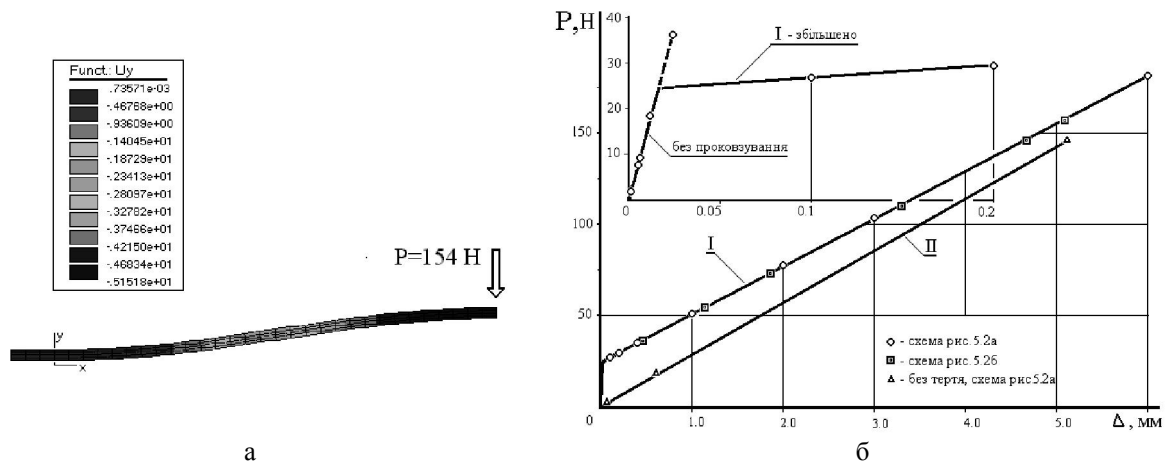


Рис. 4. Ізосмуги розподілу переміщення  $U_y$  вздовж поверхні половини пружини при вигляді збоку – а) і залежність жорсткості пружини від величини її прогину – б)

На тому ж рис. 4б показано збільшений графік  $P-\Delta$  у зоні перетину двох ділянок. Просте подовження кривих двох ділянок вказує, що момент проковзування настає приблизно при  $P \approx 25 \text{ H}$  та  $\Delta \approx 0.017 \text{ мм}$ , тобто практично відразу.

Очевидно, що жорстке кріплення пружини спричинило б значне підвищення жорсткості самої пружини і, як наслідок, появу надмірних напружень в пружині.

На рис. 4б додатково проведено графік  $P-\Delta$ , який відповідає повній відсутності тертя – криву II. Видно, що відсутність сил тертя знижує жорсткість пружини.

Як бачимо з рис. 4б, залежності  $P-\Delta$  на окремих ділянках майже лінійні. Як було вже зазначено вище, попередні розрахунки довели, що нелінійність незначна та зменшується при зменшенні відношення  $H/L$ . У даному випадку це відношення дуже мале ( $H/L=10/85$ ), тому нелінійність майже непомітна; можна вважати, що залежності  $P-\Delta$  на окремих ділянках – лінійні.

Рис. 4б також показує, що криві I та II непаралельні. Цьому є просте пояснення: при прогині на величину  $\Delta = H-b$  пружина приймає майже лінійний вигляд, наявність чи відсутність сил тертя перестає мати значення, тому обидва графіка повинні зійтися в одній точці.

### Висновки

Отже, як видно з досліджень, характеристика плоскої пружини лінійна, за умови, що відношення висоти до довжини плоскої пружини мале, тобто чим менше це відношення, тим характеристика більш лінійна.

### Список літературних джерел

1. Про вибір параметрів систем вібро- і ударозахисту з сухим тертям/ Безвесільна О.М., Киричук Ю.В. // Вісник Інженерної академії України. – 2009. – № 1 – С. 91-94.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 539 с.
3. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 464с.

Таблиця 1

Залежності жорсткості пружини від величини її погину

– без проковзування (початкова ділянка), схема рис. 2,а								
q , мм	0,1	0,4	0,5	1,0	2,0			
P , Н	1,824	7.30	9,12	18,24	36,5			
Δ , мм	0,0012	0,0047	0,0058	0,0117	0,024			
– схема рис. 2,а								
q , мм	2,0	3,0	4,0	6,0	8,0	8,45		
P , Н	36,5	54,7	73,0	109	146	154		
Δ , мм	0,460	1,145	1,856	3,30	4,67	5,091		
– схема рис. 2,б								
Δ , мм	0,1	0,2	0,4	1,0	2,0	3,0	3,3	6,0
P , Н	26,8	29,5	35,0	51,1	77,5	103,7	111,5	181,5
– без тертя, схема рис. 2,а								
q , мм	0,1		1,0		8,0			
P , Н	1,824		18,24		146			
Δ , мм	0,061		0,61		5,12			