

УДК 621.317

¹Безвесільна О.М., д.т.н.
²Коваль А.В.
¹Гура Є.В.**АНАЛІЗ ВИПАДКОВИХ ПОХИБОК ДВОГІРОСКОПНОГО ГРАВІМЕТРА АВІАЦІЙНОЇ ГРАВІМЕТРИЧНОЇ СИСТЕМИ**¹Національний технічний університет України "КПІ"²Житомирський державний технологічний університет*У статті досліджено випадкові похибки нового двогіроскопного гравіметра.***Постановка проблеми**

Збурюючі впливи у разі випадкових поступальних і кутових вібрацій основи суттєво впливають на точнісні характеристики авіаційних гравіметрів. Відомо, що некомпенсована похибка акселерометра в 1 мГл при переміщенні за 1 год роботи дає похибку відстані 65 км.

Для високоточних вимірювань гравітаційного поля Землі, корекції інерціальних навігаційних систем по гравітаційному полю Землі та інших прецизійних задач аерокосмічної галузі наявність означених вище похибок неприпустима.

Тому проблема підвищення точності авіаційних гравіметричних вимірювань шляхом компенсації цих похибок є актуальною.

Аналіз досліджень

Дослідженням авіаційних гравіметрів присвячено багато наукових праць [3–4]. Однак, в жодній з них не досліджено поведінку нового двогіроскопного гравіметра (ДГ) на основі гіроінтегратора лінійних прискорень (ГІЛП) у разі випадкових поступальних і кутових вібрацій основи.

Мета роботи: дослідити систематичні похибки нового двогіроскопного гравіметра у разі випадкових поступальних і кутових вібрацій основи.

Основна частина

Для аналізу роботи одногіроскопного гравіметра (ОГ) за умов випадкових поступальних і кутових вібрацій місця-основи встановлення приладу скористаємося рівняннями руху для ОГ:

$$\begin{aligned} H\ddot{\beta} + c'_1\dot{\alpha} + k_1\beta &= -H(\omega_x + \omega_y\alpha) - A\dot{\omega}_z - M_{1T}\text{sign}\dot{\alpha}; \\ -H\dot{\alpha} + c'_2\dot{\alpha} - k_2\alpha &= -mlg - mlw_z - ml(w_x\alpha - w_y)\beta - B(\dot{\omega}_x + \dot{\omega}_y\alpha) + H\omega_z - H\omega_y\beta - M_{2T}\text{sign}\dot{\beta}. \end{aligned} \quad (1)$$

Нехтуючи величинами другого порядку малості, моментами сил сухого тертя, вважаючи, що ОГ стабілізований по осях Ox , Oy , Oz , дістанемо рівняння динаміки приладу:

$$\begin{aligned} H\ddot{\beta} + c'_1\dot{\alpha} + k_1\beta &= -H\omega_x - H\omega_y\alpha; \\ -H\dot{\alpha} + c'_2\dot{\beta} - k_2\alpha &= -mlg - mlw_z + mlw_y\beta - H\omega_y\beta + H\omega_z. \end{aligned} \quad (2)$$

Розв'яжемо систему рівнянь (2) відносно невідомої α . Враховуючи, що $c'_1c'_2 \ll H^2$ і $Hc'_2\dot{\omega}_x \ll H^2\dot{\omega}_z$, поділивши всі члени отриманого рівняння на k_1k_2 і ввівши позначення

$$\begin{aligned} \frac{H^2}{k_1k_2} &= T^2 = c_0; \quad \frac{H(k_1 + k_2)}{k_1k_2} = 2\xi T = c_1; \quad c_2 = 1; \quad \frac{c'_1mlg}{k_1k_2} = c_3; \\ \frac{(c'_2 - c'_1)Hg}{k_1k_2} &= c_4; \quad \frac{Hmlg}{k_1k_2} = c_5; \quad \frac{Hg}{k_2} = c_6; \quad \frac{mlg}{k_2} = c_7; \quad \frac{H^2g}{k_1k_2} = c_8; \quad \frac{1}{g} = \nu, \end{aligned} \quad (3)$$

дістанемо

$$\begin{aligned} c_0\ddot{\alpha} + c_1\dot{\alpha} + \alpha(c_2 - \nu c_3\dot{w}_y + \nu c_4\dot{w}_y - \nu c_5\omega_y w_y - \nu c_8\omega_y^2) &= \\ = \nu c_5\dot{w}_z - \nu c_6\omega_z + \nu c_7w_z + \nu c_8\omega_x\omega_y - \nu c_8\dot{\omega}_z + \nu c_5\omega_x\omega_y. \end{aligned} \quad (4)$$

Розв'язок рівняння (4) шукатимемо у вигляді ряду за степенями малого параметра ν .

$$\alpha = \alpha_0 + v\alpha_1 + v^2\alpha_2 + \dots \quad (5)$$

Підставивши (5) у рівняння (4) і порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях v в обох частинах добутої рівності, дістанемо систему рівнянь для визначення $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$:

$$\begin{aligned} c_0\ddot{\alpha}_0 + c_1\dot{\alpha}_0 + c_2\alpha_0 &= f(t); \\ c_0\ddot{\alpha}_1 + c_1\dot{\alpha}_1 + c_2\alpha_1 &= -Y(t)f(t); \\ c_0\ddot{\alpha}_2 + c_1\dot{\alpha}_2 + c_2\alpha_2 &= -Y^2(t)f(t), \end{aligned} \quad (6)$$

де

$$\begin{aligned} f(t) &= v c_5 \dot{w}_z - v c_6 \dot{w}_z + v c_7 w_z + v c_8 \omega_x \omega_y - v c_8 \dot{w}_z + v c_5 \omega_x \omega_y; \\ Y(t) &= c_2 - v c_3 \dot{w}_y + v c_4 \dot{w}_y - v c_5 \omega_y w_y - v c_8 \omega_y^w. \end{aligned}$$

Очевидно, що математичне сподівання похибки гірографіметра можна представити у вигляді

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_0 + v\bar{\alpha}_1 + v^2\bar{\alpha}_2 + \dots \quad (7)$$

Відомо, що математичні сподівання на вході і виході лінійної динамічної системи пов'язані співвідношенням

$$\bar{\alpha}_i = w(j\omega) \Big|_{\omega=0} f_i, \quad (8)$$

де частотна передаточна функція в цьому випадку

$$w(j\omega) = \frac{1}{1 - T^2 \omega^2 + 2\xi T j \omega}, \quad (9)$$

а f_i визначається правими частинами відповідних рівнянь системи (6).

Покажемо, що для визначення $\bar{\alpha}$ можна обмежитися двома першими членами ряду (7).

Скориставшись методом спектрального розкладу випадкової функції для знаходження $\bar{\alpha}$, враховуючи позначення (3), дістанемо

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c_3 c_5 v^2 \omega^2 + c_3 c_7 v^2 j \omega}{1 - T^2 \omega^2 + 2\xi T j \omega} S_{w_y w_z}(\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c_2 c_8 v^2 \omega^2 + c_2 c_6 v j \omega}{1 - T^2 \omega^2 + 2\xi T j \omega} S_{\psi \theta}(\omega) d\omega + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c_4 c_6 v^2 j \omega^3 + c_4 c_8 v^2 \omega^4}{1 - T^2 \omega^2 + 2\xi T j \omega} S_{\psi \varphi}(\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c_4 c_7 v^2 \omega^2 + c_4 c_5 v^2 j \omega^3}{1 - T^2 \omega^2 + 2\xi T j \omega} S_{w_z \psi}(\omega) d\omega - \\ &- \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c_3 c_6 v^2 j \omega^3 + c_3 c_9 v^2 j \omega^3}{1 - T^2 \omega^2 + 2\xi T j \omega} S_{w_y \varphi}(\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c_2 c_5 v^2 \omega^2}{1 - T^2 \omega^2 + 2\xi T j \omega} S_{w_y \theta}(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (10)$$

Вважатимемо

$$S_{w_y w_z}(\omega) = S_{\psi \theta}(\omega) = S_{\psi \varphi}(\omega) = S_{w_z \psi}(\omega) = S_{w_y \varphi}(\omega) = S_{w_y \theta}(\omega) = \frac{2A_i \mu b_i}{\omega^4 + 2a\omega^2 + b^4}, \quad (11)$$

де A_i , – дисперсія кутів і прискорень качки, що характеризує інтенсивність качки літака на нерегулярному хвилюванні ($i = 1, 2, \dots, 6$),

$$\begin{aligned} A_1 &= D[\psi, \theta] = \frac{\psi \theta}{2}, \quad A_2 = D[w_y, w_z] = \frac{w_a w_b}{2}, \quad A_3 = D[\psi, \varphi] = \frac{\psi \varphi}{2}, \quad A_4 = D[w_z, \psi] = \frac{w_a \psi}{2}, \\ A_5 &= D[w_y, \varphi] = \frac{w_b \varphi}{2}, \quad A_6 = D[w_y, \theta] = \frac{w_b \theta}{2}, \quad b_i^2 = \mu_i^2 + \lambda_i^2, \end{aligned} \quad (12)$$

де μ_i – коефіцієнт затухання кореляційної функції, що характеризує ступінь нерегулярності качки літака; λ_i – частота зміни кореляційної функції, що визначає переважну частоту качки літака на нерегулярному хвилюванні.

Після обчислення інтегралів (10), яке легко виконати зведенням їх до табличного вигляду, дістанемо

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{b^2 H}{2\xi k_1^2 k_2^2 T} \times \left\{ \frac{(\xi + T\mu)(\theta\psi H k_1 k_2 T + w_a w_b c_1' m^2 l^2 T + w_a \psi c_1' m l k_1 T + w_b \phi c_1' m l k_1 T + \omega_\theta \theta H m l k_2 T)}{(1 - T^2 b^2)^2 + 4[T^2 \xi^2 b^2 + T\mu(\xi + T\mu) + T^3 \xi \mu b^2]} + \frac{\phi \psi c_1' H^2 (\xi T b^2 + \mu)}{(1 - T^2 b^2)^2 + 4[T^2 \xi^2 b^2 + T\mu(\xi + T\mu) + T^3 \xi \mu b^2]} \right\} \quad (13)$$

У разі гармонічного характеру вібрацій літака, тобто при $\mu \rightarrow 0$, значення $\bar{\alpha}$ і $\langle \alpha \rangle$ відповідно однакові.

Як видно з таблиць (Параметри кореляційних функцій кутових вібрацій центра ваги літака та параметри кореляційних функцій поступальних вібрацій центра ваги літаків типу ЯК-40)[1], можливі зміни коефіцієнта нерегулярності μ/λ лежать у діапазонах 0,05...1,122 та 0,05...1,1 відповідно для поступальних і кутових вібрацій основи. Оцінити вплив коефіцієнта нерегулярності μ/λ на математичне сподівання похибки $\bar{\alpha}$ гірогравіметра в разі вібрацій основи можна, підставивши у вираз (13) такі параметри: $\phi = \theta = \psi = 10'$, $w_a = w_b = 10 \text{ м/с}^2$, $\lambda = 0,02 \text{ с}^{-1}$, $H = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$, $k_1 = k_2 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}$, $T = 0,4 \text{ с}$, $\xi = 1$, $c_1' = 5 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$, $ml = 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{с}^2$. Відповідно до отриманих при цих параметрах значень (табл. 1) побудовано графік (рис. 1). Аналіз наведеного графіка дає змогу зробити висновок про те, що при малих значеннях коефіцієнта нерегулярності $\mu/\lambda = 0...3$ залежність $\bar{\alpha} = f(\mu/\lambda)$ є прямою лінією. Отже, під час хитання літака зі співвідношенням $\mu/\lambda = 0...3$, яке відповідає поступальним вібраціям основи, збурюючий вплив можна вважати близьким до гармонічного і використовувати методи гармонічного аналізу для дослідження роботи приладу. При значеннях коефіцієнта нерегулярності μ/λ до 1,1, що відповідають кутовим коливанням основи, математичне сподівання похибки $\bar{\alpha}$ гірогравіметра змінюється менш ніж на 30% – близько 0,3 мГл. У разі вимірювань з похибкою до 1 мГл можна вважати такий вплив коефіцієнта нерегулярності на роботу приладу незначним і для дослідження роботи ГГ використовувати методи гармонічного аналізу.

Таблиця 1

Залежність математичного сподівання похибки ГГ від коефіцієнта нерегулярності в разі вібрацій основи

μ/λ	$\bar{\alpha}_1, 10^{-6} \text{ рад}$
0,05	3,36
0,1	3,36
0,2	3,40
0,3	3,66
0,5	4,00
1,1	4,35

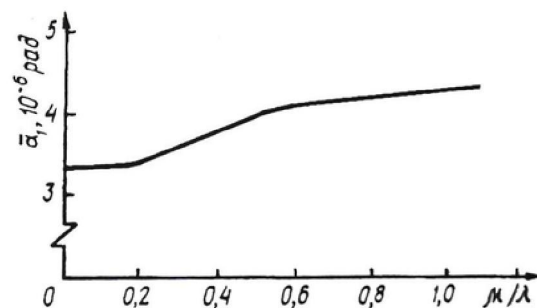


Рис. 1 Залежність математичного сподівання похибки ГГ від зміни коефіцієнта нерегулярності за умов вібрації основи (див. табл. 1)

Дослідимо випадкові похибки двогіроскопного гравіметра[2].

Оскільки динамічні рівняння другого гравіметра відрізняються від першого тільки знаком кінетичного моменту, то для нього отримаємо математичне сподівання похибки:

$$\begin{aligned} \overline{a_2} = \frac{b^2(-H)}{2\xi k_1^2 k_2^2 T} \times \\ \times \left\{ \frac{(\xi + T\mu)(\theta\psi(-H)k_1 k_2 T + w_a w_b c_1' m^2 l^2 T + w_a \psi c_1' m l k_1 T + w_b \varphi c_1' m l k_1 T + \omega_\theta \theta(-H) m l k_2 T)}{(1 - T^2 b^2)^2 + 4[T^2 \xi^2 b^2 + T\mu(\xi + T\mu) + T^3 \xi \mu b^2]} + \right. \\ \left. + \frac{\varphi \psi c_1' H^2 (\xi T b^2 + \mu)}{(1 - T^2 b^2)^2 + 4[T^2 \xi^2 b^2 + T\mu(\xi + T\mu) + T^3 \xi \mu b^2]} \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Для того, щоб отримати результуючу похибку двогіроскопного гравіметра достатньо скласти вихідні сигнали з кожного гравіметра[2].

$$\overline{a_\Sigma} = \overline{a_1} + \overline{a_2} = \frac{b^2 H}{\xi k_1^2 k_2^2 T} \left\{ \frac{(\xi + T\mu)(\theta\psi H k_1 k_2 T + \omega_\theta \theta H m l k_2 T)}{(1 - T^2 b^2)^2 + 4[T^2 \xi^2 b^2 + T\mu(\xi + T\mu) + T^3 \xi \mu b^2]} \right\}. \quad (15)$$

У табл. 2 приведено значення розрахунків $\overline{a_\Sigma}$ від μ/λ . На рис. 2 наведено залежність $\overline{a_\Sigma}$ від коефіцієнта нерегулярності μ/λ для ДГ.

Таблиця 2

μ/λ	$\overline{a_\Sigma}, 10^{-9}$ рад
0,05	1,2
0,1	1,21
0,2	1,25
0,3	1,31
0,5	1,51
1,1	2,6

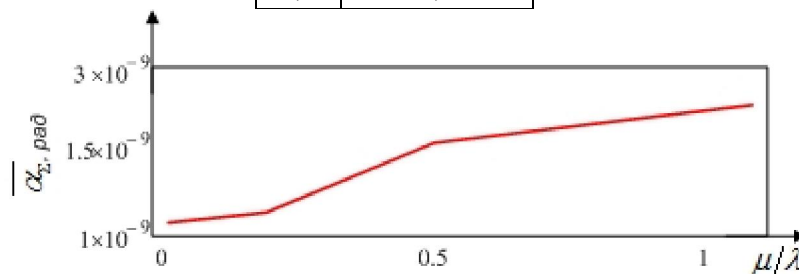


Рис. 2 Залежність математичного сподівання похибки ДГ від зміни коефіцієнта нерегулярності за умов вібрації основи

Висновки

- випадкові похибки ДГ (10^{-9}) суттєво менші за похибки ОГ (10^{-6});
- при малих значеннях коефіцієнта нерегулярності $\mu/\lambda = 0...3$ залежність $\overline{a} = f(\mu/\lambda)$ є прямою лінією;
- під час хитання літака зі співвідношенням $\mu/\lambda = 0...3$, збурюючий вплив можна вважати близьким до гармонійного і використовувати методи гармонійного аналізу для дослідження роботи ДГ.

Список літературних джерел

1. Безвесільна О.М. Авіаційні гравіметричні системи та гравіметри: Монографія. – Житомир: ЖДТУ, 2007. – 604с.
2. Безвесільна О.М., Коваль А.В. Авіаційна гравіметрична система для вимірювання аномалій прискорення сили ваги з двогіроскопним гравіметром. / Вісник ЖДТУ. Технічні науки. – Житомир, 2009. – Вип. № 4(51)
3. Lawrence A. Modern Inertial Technology Navigation, Guidance, and Control Second Edition –
4. New York Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1998. – 279p.
5. Bekir Esmat Introduction to Modern Navigation Systems – Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2007. – 255p.