УДК 620.191:519.2.001

С.Р. Игнатович, д.т.н., **А.В. Кипров, В.И. Похиль, О.И. Варченко**

ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ ЛИНЕЙНОГО СУММИРОВАНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ РЕСУРСА ДЕТАЛЕЙ ГТД

Национальный авиационный университет, e-mail: ignatovich@nau.edu.ua

Разработана вероятностная модель линейного суммирования повреждений, на основании которой рассмотрены два варианта реализации предельного состояния. В первом случае вероятность предельного состояния зависит от накопленной поврежденности, во втором – не зависит. Показано, что известный подход к линейному суммированию повреждений справедлив при выполнении определенных условий.

Введение. Наиболее известной и широко используемой моделью накопления повреждений является правило линейного суммирования повреждений [1] или, в иной терминологии, линейное правило суммирования повреждений (ЛПСП) [2].

Предложенное Пальмгреном (1924 г.) для расчета подшипников на долговечность, ЛПСП впоследствии получило развитие применительно к расчетам на усталость (Майнер, 1945 г.; Д.Н.Решетов, 1945 г.) и длительную прочность (Робинсон, 1952 г.).

Обычно используются два вида аналитической записи ЛПСП:

- при дискретном нестационарном нагружении $\sum_{i=1}^{N_f} \frac{t_i}{\tau_R(q_i)} = 1$ (1)

- при непрерывно изменяющемся нагружении $\int_0^{\tau_f} \frac{dt}{\tau_R[q(t)]} = 1$ (2)

где q_i - вектор нагруженности i-го режима в многомерном пространстве повреждающих факторов; $\tau_R(\cdot)$ - наработка до предельного состояния при q_i = const; t_i - длительность этапа нагружения при q_i = const; τ_f - наработка до предельного состояния при нестационарном нагружении; N_f - количество блоков нестационарного нагружения до предельного состояния.

Уравнения (1) и (2) описывают ЛПСП во временной форме. В общем случае параметры t и $\tau_R(\cdot)$ в зависимости от условий нагружения могут измеряться в единицах астрономического времени, в числах циклов нагружения или других единицах.

ЛПСП интенсивно разрабатывалось применительно к различным видам нагружения, программам изменения нагрузок, материалам и т.п. Метод учета влияния изменения температуры при расчете конструктивных элементов на длительную прочность, основанный на гипотезе аддитивности повреждений [3,4] предполагает простое суммирование повреждений, вносимых различными уровнями напряжений и температур. Применительно к деталям горячей части ГТД указанный метод был впервые предложен Р.С. Кинасошвили [5] для приведения всех нестационарных силовых и тепловых режимов к эквивалентному стационарному режиму.

Учитывая характерный спектр повреждающих факторов, воздействующий на основные конструктивные элементы авиационных ГТД [6], рассмотрим применимость ЛПСП и его модификаций для расчета долговечности и оценке ресурса при нестационарном нагружении.

При воздействии на материал статических напряжений в уравнении (1) следует принять: $\tau_R(q) = \tau_R(\sigma_i, T_i)$, где σ_i и T_i - соответственно, напряжение и температура на i-м режиме.

Принцип эквивалентности повреждений, базирующийся на использовании ЛПСП, является весьма распространенным в практике инженерных расчетов деталей авиационных ГТД на долговечность при нестационарном нагружении. Например, в работе [7] предлагается приводить время до разрушения детали при определенной комбинации нагрузок и температур к наработке до разрушения на эквивалентном стационарном режиме нагружения по формуле

$$\tau_{экв} = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{c_i}{\tau_i} \right)^{-1} \quad (3)$$

где $\tau_{экв}$ - эквивалентная наработка до разрушения; τ_i - длительная прочность при σ_i и T_i; c_i -

относительная длительность действия напряжения σ_i.

Расчет коэффициентов запаса длительной прочности деталей ГТД при многорежимном нагружении также выполняют с использованием ЛПСП [8].

Методы, аналогичные вышерассмотренным, могут быть использованы для расчета долговечности деталей, работающих в условиях нестационарного вибрационного нагружения.

В более общих случаях совместного воздействия нескольких повреждающих факторов, что характерно для эксплуатационной нагруженности деталей авиационных ГТД, методы оценки долговечности также базируются на использовании ЛПСП и его модификациях [9-11].

Принцип приведения нестационарных эксплуатационных режимов нагружения к базовому стационарному, эквивалентному по поврежденности, основан на линейном суммировании повреждений и используется для разработки методов оценки остаточного ресурса деталей ГТД в эксплуатации [12,13].

Из приведенного краткого обзора следует, что область использования ЛПСП довольно широка: от разработки расчетных методов оценки долговечности материалов и конструктивных элементов с учетом особенностей эксплуатационного нагружения до построения критериев прочности. Успешное применение той или иной модели определяется в первую очередь корректностью получаемых с их помощью результатов. В этой связи ЛПСП подвергался экспериментальным проверкам и корректировкам.

Статистическая модель линейного суммирования повреждений.

Рассмотрим возможность обоснования ЛПСП путем вероятностной трактовки события наступления предельного состояния (ПС) при нестационарном нагружении.

Пусть нагружение осуществляется в виде большого количества N блоков (N>>1), каждый из которых характеризуется стационарной нагруженностью q_i и продолжительностью Δt_i, причем $\Delta t_i << \tau_N$, где τ_N - наработка до ПС при блочном нагружении: $\tau_N = \sum_{i=1}^{N} \Delta t_i$.

Принимаем, что на любом блоке нагружения ПС может наступить с вероятностью p_i, которая зависит от нагруженности на і-м блоке, от продолжительности блока и не зависит от поврежденности, которая может вноситься при переходе от одного блока нагруженности на другой.

Очевидно, что достижение ПС на каждом блоке нагружения есть несовместные события. В этом случае вероятность P_N возникновения ПС после N блоков нагружения определится как сумма соответствующих вероятностей p_i на отдельных блоках: $$P_N = \sum_{i=1}^{N} p_i . \qquad (4)$$

Предполагаем, что вероятности ПС обладают свойством автомодельности, т.е значения этих вероятностей однозначно соотносятся со значениями наработки при q = const и с соответствующими значениями q при t = const. Тогда можно записать $$\frac{dP}{dt} = \varphi(q)\psi(P) \qquad (5)$$
где P - функция распределения (ФР) наработки до предельного состояния (ФР ресурса); $\varphi(q)$ - функция нагруженности; $\psi(P)$ - функция, определяющая зависимость приращения ФР на отрезке времени $[t_i, t_i + dt]$ от величины накопленной вероятности при q = const за время от 0 до t_i.

Допускаем, что для любого q_i = const ФР проходит через начало координат, т.е. при t = 0, $P = 0$, а при $t \neq 0$, $P \neq 0$.

При известной ФР ресурса $P(q_i, t)$ вероятность p_i определится на интервале времени $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ очевидным способом $$p_i = P(q_i, t_i) - P(q_i, t_{i-1}). \qquad (6)$$

Если ПС при любой стационарной нагруженности q_i реализуется с вероятностью γ, то из формулы (5) следует $$\int_0^{\gamma} \frac{dP}{\psi(P)} = \varphi(q_i)\tau_{\gamma i}, \qquad (7)$$
где $\tau_{\gamma i}$ - гамма - процентный ресурс при q_i = const.

Условие автомодельности вероятности ПС (5) означает, что независимо от накопленной за

$i-1$ блоков поврежденности ФР на i-ом блоке описывается только функцией нагруженности $\varphi(q_i)$. Тогда ФР ресурса при блочном нагружении (4) согласно соотношениям (5) и (6) может быть графически сформирована путем эквидистантного переноса участков кривых $P(q_i, \Delta t_i)$ вдоль оси времени (рис.1).

Согласно (5) для любого блока нагружения имеет место следующее рекурентное уравнение

$$\int_{P_{i-1}}^{P_i} \frac{dP}{\psi(P)} = \varphi(q_i)\Delta t_i, \qquad (8)$$

где $P_{i-1} \equiv P(q_i, t_{i-1})$; $P_i \equiv P(q_i, t_i)$; $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

Математически ФР ресурса при блочном нагружении может быть описана соотношением (4) путем последовательного решения уравнений (8) с учетом (6).

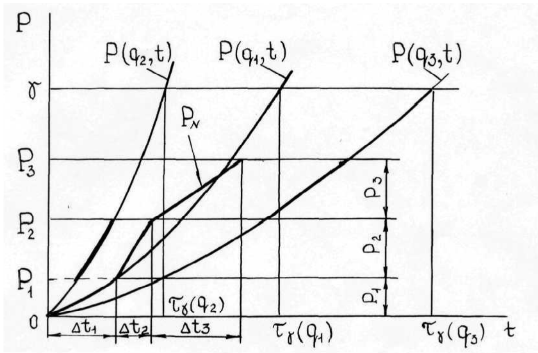

Рис. 1. Схема формирования функции распределения ресурса при блочном нагружении с учетом временной зависимости вероятности предельного состояния на отдельных блоках

Для ПС в условиях блочного нагружения можно записать $P_{N_\gamma} = \gamma$, где N_γ - количество блоков нагружения до ПС, а γ - назначенная вероятность. Просуммировав левую и правую части уравнения (8) по количеству блоков до N_γ, получим

$$\sum_{i=1}^{N_\gamma} \int_{P_{i-1}}^{P_i} \frac{dP}{\psi(P)} = \sum_{i=1}^{N_\gamma} \varphi(q_i)\Delta t_i, \qquad (9)$$

Из уравнения (7) следует $\varphi(q_i) = \dfrac{1}{\tau_{\gamma i}} \displaystyle\int_0^\gamma \frac{dP}{\psi(P)}$, (10)

Подставим равенство (10) в формулу (9). Учитывая, что при $P_{N_\gamma} = \gamma$ и $P_0 = 0$:

$\displaystyle\sum_{i=1}^{N_\gamma} \int_{P_{i-1}}^{P_i} \frac{dP}{\psi(P)} = \int_0^\gamma \frac{dP}{\psi(P)}$, приходим к записи ЛПСП в виде $\displaystyle\sum_{i=1}^{N_\gamma} \frac{\Delta t_i}{\tau_{\gamma i}} = 1$.

Таким образом, свойство автомодельности вероятностей ПС при различных q, а также допущение, что при переходе с одного уровня нагруженности на другой кривая ФР ресурса не изменяется, обеспечивает выполнение ЛПСП в виде (1) при реализации ПС в условиях блочного нагружения. При суммировании относительных наработок необходимо учитывать, что как долговечность при блочном нагружении, так и ресурс $\tau_{\gamma i}$ для отдельных блоков нагружения должны соответствовать фиксированному значению вероятности γ реализации ПС.

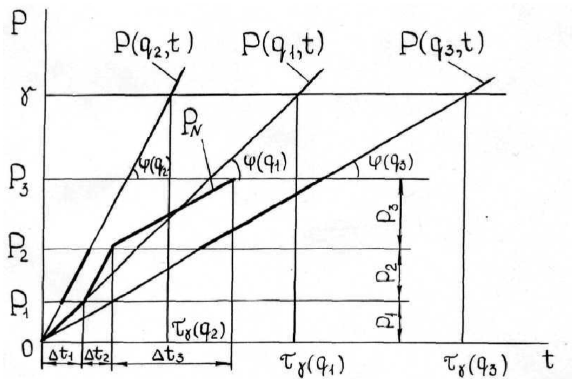

Рис. 2. Схема формирования функции распределения ресурса при блочном нагружении с учетом равной вероятности предельного состояния на отдельных блоках

Если вместо вероятности ПС использовать некоторую скалярную меру поврежденности, изменяющуюся на интервале $[0, \gamma]$, ($\gamma \le 1$), и кинетика которой описывается уравнением типа (5), то для подтверждения ЛПСП получим аналогичный результат [11]. При этом величина поврежденности на каком-то одном блоке нагружения не может быть выраженной в виде относительной наработки $\Delta t / \tau_{\gamma i}$, так как $\sum_{i=1}^{N} \Delta t_i / \tau_{\gamma i}$, где $N < N_\gamma$, не является суммарной, накопленной за N блоков поврежденностью.

Рассмотрим частный случай

автомодельности (5) при $\psi(P) \equiv 1$. Это означает, что распределение ресурса при различных q_i соответствует закону равной вероятности, при котором ФР линейно изменяется во времени (рис.2).

В данном случае на основании соотношений (6) и (8) имеем

$$p_i = P_i - P_{i-1} = \varphi(q_i)\Delta t_i, \tag{11}$$

а из (7) следует $\varphi(q_i) = \dfrac{\gamma}{\tau_{\gamma i}}$, (12)

Объединив (11) и (12), получим $p_i = \dfrac{\gamma \Delta t_i}{\tau_{\gamma i}}$. (13)

Пусть наступление ПС на каждом отдельном блоке нагружения является независимым событием. Вероятность того, что на i-м блоке ПС не наступит будет равна $1 - p_i$. Тогда для P_N - вероятности реализации ПС после N блоков нагружения справедливо соотношение

$$P_N = 1 - \prod_{i=1}^{N} (1 - p_i). \tag{14}$$

Формула (14) является асимптотическим выражением зависимости (4) при условии $\sum_{i=1}^{N} \Delta t_i / \tau_{\gamma i} << 1$ ($N >> 1$), когда произведение $p_k p_n$ (k, n = 1,2,..., N; $k \neq n$) является величиной большего порядка малости, чем p_i.

Прологарифмируем соотношение (14): $\ln\left[\prod_{i=1}^{N}(1 - p_i)\right] = \ln(1 - P_N)$. (15)

При $p_i << 1$ можно записать $\sum_{i=1}^{N} p_i = -\ln(1 - P_N)$. (16)

Подставив в равенство (16) значение p_i из (13), получим $\sum_{i=1}^{N} \dfrac{\Delta t_i}{\tau_{\gamma i}} = -\dfrac{1}{\gamma}\ln(1 - P_N)$. (17)

Из соотношения (1.17) следует, что численное значение суммы относительных наработок зависит от назначенной вероятности ПС при стационарном нагружении γ и от величины вероятности ПС при нестационарном нагружении P_N. Например, для γ = 0,5 условие (1) выполняется при $P_N \approx 0{,}4$, а для $P_N = 0{,}5$ необходимо принять $\gamma \approx 0{,}7$.

Из полученных результатов следует, что даже при весьма некорректном с физической точки зрения условии о равновероятном распределении наработки до ПС при q_i = const, ЛПСП в виде (1) может выполняться. При этом необходимо, чтобы назначенные вероятности ПС при стационарном и нестационарном видах нагружения принимали определенные значения. В общем случае величина суммы относительных наработок зависит от вероятности γ, которая должна быть одинаковой для различных q, и от значения вероятности ПС при блочном нагружении P_N.

Следует отметить, что требование к постоянству вероятности при ЛПСП согласуется с результатами теоретической работы [14], посвященной вопросам надежности изделий при переменных режимах работы. Кроме этого, использованное нами условие $\sum_{i=1}^{N} \Delta t_i / \tau_{\gamma i} << 1$ подтверждается теоретическими и экспериментальными данными о более удовлетворительных результатах ЛПСП применительно к многоблочному нагружению в сравнении с малоблочным [1,15].

Решив уравнение (17) относительно P_N, получим формулу для приближенной вероятностной оценки наступления ПС при нестационарном воздействии нагрузки

$$P_N = 1 - \exp\left(-\gamma \sum_{i=1}^{N} \frac{\Delta t_i}{\tau_{\gamma i}}\right). \tag{18}$$

В данном случае, если отождествлять сумму относительных наработок с накопленной величиной поврежденности, ее нельзя ограничивать сверху единицей, как это принято в классической постановке.

Выводы

Автомодельность вероятностей предельного состояния (5) обеспечивает выполнение линейного суммирования повреждений в условиях блочного нагружения. При суммировании относительных наработок необходимо учитывать, что общая долговечность, а также ресурс для отдельных блоков должны определяться фиксированным значением вероятности предельного состояния.

Вероятностная трактовка линейного суммирования повреждений на примере формул (17) и (18) показывает, что расчетное прогнозирование работоспособности изделий всегда будет связано с определенной вероятностью наступления предельного состояния. В этой связи обоснованный прогноз может быть осуществлен только вероятностными методами, базирующимися на использовании той или иной модели накопления повреждений.

Список литературы

1. Коллинз Дж. Повреждение материалов в конструкциях. Анализ, предсказание, предотвращение. - М.: Мир, 1984. - 624 с.
2. Болотин В.В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций. - М.: Машиностроение, 1984.-312 с.
3. Гецов Л.Б. Детали газовых турбин. - Л.: Машиностроение, 1982. - 295 с.
4. Сазонова Н.Д. Испытание жаропрочных материалов на ползучесть и длительную прочность. - М.: Машиностроение, 1965.-265 с.
5. Кинасошвили Р.С. Определение запасов прочности при нестационарной температуре и нестационарной напряженности // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. - 1959. - № 3. - С. 126-128.
6. К вопросу эквивалентных испытаний авиационных двигателей / И.Н.Шканов, Л.И.Бурлаков, А.А.Ковалев, В.П.Юриков // Пробл. прочности.-1969.-№ 6.-С. 30-34.
7. Кузнецов Н.Д., Цейтлин В.И. Эквивалентные испытания газотурбинных двигателей. - М.: Машиностроение, 1976. - 216 с.
8. Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Иосилевич Г.Б. Расчет на прочность деталей машин: Справочник. - М.: Машиностроение, 1979. - 702 с.
9. Ветров А.Н., Игнатович С.Р., Кучер А.Г. Теоретические основы прогнозирования поврежденности и остаточного ресурса конструктивных элементов АГТД в эксплуатации // Обеспечение надежности авиационных двигателей в эксплуатации: Сб. науч. трудов. - Киев: КИИГА, 1993. - С. 20-26.
10. Игнатович С.Р. О методе расчета долговечности при двухкомпонентном нагружении и различных температурных уровнях // Надежность и долговечность авиационных газотурбинных двигателей: Сб. научн. трудов. - Киев: КИИГА, 1979.-С. 44-51.
11. Теоретические основы оценки поврежденности материалов и конструктивных элементов ГТД / С.Р.Игнатович, А.Н.Ветров, М.А.Молочков, С.И.Йовенко // Динагностика и прогнозирование технического состояния авиационных ГТД: Сб. научн. трудов.-Киев: КИИГА, 1985. - С. 41-47.
12. Игнатович С.Р., Никитин Ю.А., Малютин С.А. Один из подходов расчета остаточного ресурса ГТД с учетом накапливания деформации ползучести сплавами ЖС6К и ЭИ437Б // Эксплуатационная надежность авиационных газотурбинных двигателей: Межвуз. сб. научн. трудов. - Киев: КИИГА, 1981.-С. 89-100.
13. Лапшов В.Ф., Игнатович С.Р., Малютин С.А. К оценке выработки ресурса ГТД по "лимитирующим" конструктивным элементам // Надежность и долговечность авиационных газотурбинных двигателей: Межвуз. сб. науч. трудов.-Киев: КИИГА, 1979.-С. 51-58.
14. Карташов Г.Д. О гипотезе Майнера и принципе Седякина // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. - 1970. - № 6. - С. 71-78.
15. Зайцев В.Г. О влиянии различия в наклоне индивидуальных усталостных кривых на выполнение правила линейного суммирования усталостных повреждений // Пробл. прочности. – 1988. - № 10. - С. 29-34.