

УДК 531.383

С. А. Мураховский, А.А. Хоца

**СИНТЕЗ НАБЛЮДАЮЩЕГО УСТРОЙСТВА ДЛЯ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ
ДВИЖЕНИЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА ГИРОТЕОДОЛИТА**

Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»

*Проведен синтез наблюдающего устройства для определения оценки угловой скорости чувствительного элемента гиротеодолита в азимуте. Рассмотрены погрешности оценивания наблюдающего устройства. Показана эффективность использования наблюдателя для алгоритмической компенсации постоянной составляющей вибрационной ошибки гиротеодолита.***Ключевые слова:** гиротеодолит, наблюдающее устройство, вибрационная погрешность, алгоритмическая компенсация.**Введение**

Гиротеодолит в реальных условиях эксплуатации находится под воздействием вибраций, которые приводят к значительным погрешностям в его показаниях. В работах [1...3] проведены исследования функционирования гироскопических приборов определения азимутальных углов на вибрирующем основании и найдена обобщенная форма представления постоянной составляющей вибрационной погрешности, а также показана возможность уменьшения вибрационной погрешности в помощью алгоритмической компенсации. Для реализации алгоритмической компенсации вибрационной погрешности необходимо измерять колебания чувствительного элемента вокруг главной оси гироскопа и угловую скорость чувствительного элемента вокруг вертикальной оси. В предлагаемой статье предпринята попытка определения оценки угловой скорости чувствительного элемента вокруг вертикальной оси, путем синтеза наблюдающего устройства.

Постановка задачи

В работе [3] показано, что для алгоритмической компенсации вибрационной погрешности гиротеодолита необходимо получить (измерить) значения угловой скорости азимутальных колебаний чувствительного элемента – $\dot{\alpha}$ и угла γ .

Рассмотрим возможность построения наблюдающего устройства для определения оценки $\hat{\alpha}$ угловой скорости. В качестве измеряемой величины принимаем угол α отклонения главной оси гироскопа от курсовой черты прибора. Математическую модель гиротеодолита запишем на основании уравнений движения по координатам α и β :

$$\begin{cases} J_y \ddot{\alpha} + H \dot{\beta} + (F_{KC} + f_\alpha) \dot{\alpha} + H \omega_3 \cos \varphi_g (1 + \kappa) \cdot \alpha = mgl [\gamma \cdot n_X(t) + \beta \cdot n_Z(t)] \\ J_z \ddot{\beta} - H \dot{\alpha} + f_\beta \dot{\beta} + mgl \beta = mgl \cdot n_X(t) + H \omega_3 \sin \varphi_g \end{cases}, \quad (1)$$

где J_Y, J_Z – моменты инерции чувствительного элемента; H – кинетический момент гироскопа; m – масса чувствительного элемента; l – смещение центра масс ЧЭ относительно точки подвеса; α, β, γ – углы поворота чувствительного элемента относительно корпуса прибора; f_α, f_β – коэффициенты вязкого трения; ω_3 – угловая скорость вращения Земли; φ_g – географическая широта места установки прибора; F_{KC} – коэффициент демпфирования, компенсационной связи; $\kappa = \frac{k_{KC}}{\omega_3 \cos \varphi_g}$, $k_{KC} = \frac{K_{KC}}{H}$; K_{KC} – коэффициент компенсационной

связи. Величины перегрузок по горизонтальным осям будем полагать изменяющимися по закону:

$$n_X(t) = n_m \cos(\varepsilon + \psi_0) \sin \omega t; \quad n_Z(t) = n_m \sin(\varepsilon + \psi_0) \sin \omega t.$$

В дальнейшем используем обозначения

$$\omega_{pr} = \frac{mgl}{H}; \quad p_\alpha = \frac{f_\alpha}{H}; \quad p_\beta = \frac{f_\beta}{H}; \quad p_{KC} = \frac{F_{KC}}{H}. \quad (2)$$

Уравнения (1) выведены в предположении $\psi_0 = 0$, $\omega_{pr} \gg \omega_3 \cos \varphi_g$.

Перепишем систему уравнений (2) в форме пространства состояний, обозначив переменные состояния $x_1 = \alpha$, $x_2 = \dot{\alpha}$, $x_3 = \beta$, $x_4 = \dot{\beta}$:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} \\ \mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X} \end{cases} \quad (3)$$

где \mathbf{X} - вектор состояния, \mathbf{A} - матрица состояния, \mathbf{Y} - вектор измерения, \mathbf{C} - матрица измерения:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_\alpha}{J_y} & -\frac{f_\alpha + F_{KC}}{J_y} & 0 & -\frac{H}{J_y} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{H}{J_z} & -\frac{mgl}{J_z} & -\frac{f_\beta}{J_z} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0 \ 0].$$

Система матричных уравнений (3) записана при условии отсутствия внешних возмущений.

Следовательно, вектор измерения \mathbf{Y} состоит из одного элемента – измеряемого угла α . Запишем матрицу наблюдаемости:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T : \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T : (\mathbf{A}^T)^2 \mathbf{C}^T : (\mathbf{A}^T)^3 \mathbf{C}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{k_\alpha}{J_y} & \frac{k_\alpha(f_\alpha + F_{KC})}{J_y^2} \\ 0 & 1 & -\frac{f_\alpha + F_{KC}}{J_y} & \left(-\frac{k_\alpha}{J_y} + \frac{(f_\alpha + F_{KC})^2}{J_y^2} - \frac{H^2}{J_y J_z} \right) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{mgl \cdot H}{J_y J_z} \\ 0 & 0 & -\frac{H}{J_y} & \frac{H(f_\alpha + F_{KC})}{J_y^2} \end{bmatrix}.$$

Ранг матрицы наблюдаемости равен порядку объекта $rank \mathbf{Q} = 4$, следовательно, по измеренному выходному вектору \mathbf{Y} можно оценить все переменные состояния объекта. Наблюдающее устройство при отсутствии внешних возмущений описывается уравнением:

$$\dot{\mathbf{X}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{X} + \mathbf{K}\mathbf{Y}, \quad (4)$$

здесь \mathbf{X} - вектор оценок переменных состояния, \mathbf{K} - матрица коэффициентов наблюдающего устройства.

$$\mathbf{X} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T; \quad \mathbf{K} = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]^T.$$

Коэффициенты матрицы \mathbf{K} выбираются таким образом, чтобы собственные значения наблюдателя, описываемого уравнением (4), располагались в заданных точках на комплексной плоскости. Характеристическое уравнение наблюдателя имеет вид:

$$\det(p\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{K}\mathbf{C}) = 0; \quad (5)$$

где \mathbf{E} - единичная матрица, соответствующей размерности, p - оператор Лапласа.

Таким образом, задача синтеза наблюдающего устройства сводится к определению матрицы коэффициентов \mathbf{K} .

Синтез наблюдающего устройства

Выберем биномиальное распределение корней характеристического уравнения [4], тогда должно выполняться равенство:

$$\det(p\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{K}\mathbf{C}) = (p + \omega_0)^4; \quad (6)$$

т.е. характеристическое уравнение наблюдающего устройства будет иметь один отрицательный вещественный корень $p = -\omega_0$ кратности 4. Подставляя матрицы \mathbf{A} , \mathbf{K} , \mathbf{E} и \mathbf{C} в левую часть выражения (6) получим:

$$\det(p\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{K}\mathbf{C}) = p^4 + \left(\frac{(F_{KC} + f_\alpha)J_z + f_\beta J_y}{J_y J_z} + k_1 \right) p^3 +$$

$$+ \left(\frac{(F_{KC} + f_\alpha)f_\beta + J_y mgl + k_\alpha J_z + H^2 + k_1((F_{KC} + f_\alpha)J_z + f_\beta J_y)}{J_y J_z} + k_2 \right) p^2 +$$

$$+ \frac{(F_{KC} + f_\alpha)mgl + k_\alpha f_\beta + k_1((F_{KC} + f_\alpha)f_\beta + H^2 + J_y mgl) + k_2 f_\beta J_y - k_4 J_z H}{J_y J_z} p +$$

$$+ \frac{k_\alpha mgl + k_1(F_{KC} + f_\alpha)mgl + k_2 J_y mgl + k_3 H \cdot mgl}{J_y J_z}.$$

Правая часть выражения (6): $(p + \omega_0)^4 = p^4 + 4\omega_0 p^3 + 6\omega_0^2 p^2 + 4\omega_0^3 p + \omega_0^4$.

Приравнявая коэффициенты при равных степенях p в левой и правой части выражения (6), можно определить коэффициенты матрицы \mathbf{K} :

$$k_1 = 4\omega_0 - \frac{(F_{KC} + f_\alpha)}{J_y} - \frac{f_\beta}{J_z};$$

$$k_2 = 6\omega_0^2 - 4\omega_0 \frac{(F_{KC} + f_\alpha)}{J_y} + \frac{(F_{KC} + f_\alpha)^2}{J_y^2} - \frac{4\omega_0 f_\beta}{J_z} + \frac{f_\beta^2}{J_z^2} + \frac{(F_{KC} + f_\alpha)f_\beta}{J_y J_z} - \frac{mgl}{J_z} - \frac{k_\alpha}{J_y} - \frac{H^2}{J_y J_z};$$

$$k_3 = -6\omega_0^2 \frac{J_y}{H} + 4\omega_0 \frac{f_\beta J_y}{J_z H} + \omega_0^4 \frac{J_y}{H \cdot mgl} + \frac{H}{J_z} - \frac{J_y f_\beta^2}{J_z^2 H} + \frac{J_y mgl}{J_z H};$$

$$k_4 = 6\omega_0^2 \frac{f_\beta J_y}{H} + 4\omega_0 \left(H + \frac{J_y mgl}{H} - \frac{J_y f_\beta^2}{J_z H} \right) - 4\omega_0^3 \frac{J_y}{H} - \frac{2f_\beta H}{J_z} + \frac{J_y f_\beta^3}{J_z^2 H} - \frac{2J_y f_\beta mgl}{J_z H} - \frac{H(F_{KC} + f_\alpha)}{J_y}.$$

Таким образом, задача синтеза наблюдающего устройства решена. Полученные выражения для коэффициентов наблюдателя включают заданные параметры объекта (гиротеодолита), а также значение ω_0 , которое, в общем случае, может быть выбрано произвольно. Величина ω_0 будет определять точность и быстродействие наблюдающего устройства. Синтез проведен для случая отсутствия внешних возмущений, однако на гиротеодолит действуют поступательные вибрации $n_X(t)$, $n_Z(t)$, поэтому наблюдающее устройство будет оценивать переменные состояния с некоторой погрешностью. Для анализа погрешностей оценивания рассмотрим частотные характеристики объекта и наблюдателя. Для определения частотных характеристик гиротеодолита запишем систему уравнений (2) в форме пространства состояний, при этом будем учитывать внешние возмущения не выше первого порядка малости.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{G}\boldsymbol{\Xi} \\ \mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X} \end{cases}, \quad (7)$$

где $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{mgl}{J_z} \end{bmatrix}^T$ - матрица передачи возмущений, $\boldsymbol{\Xi}$ - вектор возмущений (в нашем случае состоит из одного элемента $n_X(t)$).

Переходя от оригиналов к изображениям Лапласа, из первого уравнения системы (7) получим матричную передаточную функцию гиротеодолита:

$$\mathbf{W}_{GT}(p) = \frac{\mathbf{X}(p)}{n_X(p)} = (p\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{G}.$$

Матричная передаточная функция $\mathbf{W}_{GT}(p)$ состоит из четырех передаточных функций для каждой переменной состояния. Для анализа погрешности оценивания угловой скорости $\dot{\alpha}$ при

действию поступательной вибрации определим частотные характеристики гиротеодолита по выходным переменным состояния x_1 , x_2 и входной переменной $n_x(t)$:

$$N_{IT1}(\omega) = \frac{mgl \cdot H \cdot \omega}{\sqrt{(\omega^4 - a_2\omega^2 + a_0)^2 + (a_1\omega - a_3\omega^3)^2}}; \quad \varphi_{IT1}(\omega) = -90^\circ - \arctg \frac{-a_3\omega^3 + a_1\omega}{\omega^4 - a_2\omega^2 + a_0}; \quad (9)$$

$$N_{IT2}(\omega) = \frac{mgl \cdot H \cdot \omega^2}{\sqrt{(\omega^4 - a_2\omega^2 + a_0)^2 + (a_1\omega - a_3\omega^3)^2}}; \quad \varphi_{IT2}(\omega) = -\arctg \frac{-a_3\omega^3 + a_1\omega}{\omega^4 - a_2\omega^2 + a_0}; \quad (10)$$

где
$$a_0 = \frac{k_\alpha mgl}{J_y J_z}, \quad a_1 = \frac{(F_{KC} + f_\alpha) mgl + k_\alpha f_\beta}{J_y J_z}, \quad a_2 = \frac{(F_{KC} + f_\alpha) f_\beta + J_y mgl + k_\alpha J_z + H^2}{J_y J_z},$$

$$a_3 = \frac{(F_{KC} + f_\alpha) J_z + f_\beta J_y}{J_y J_z}.$$

Рассмотрим теперь частотные характеристики наблюдающего устройства, на вход которого подается измеренная величина α . Запишем уравнение (4) в операторной форме:

$$(p\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{X}(p) = \mathbf{K}\alpha(p).$$

Отсюда матричная передаточная функция наблюдающего устройства:

$$\mathbf{W}_{HY}(p) = \frac{\mathbf{X}(p)}{\alpha(p)} = (p\mathbf{E} - \mathbf{A} + \mathbf{K}\mathbf{C})^{-1} \mathbf{K}.$$

Из передаточной функции $\mathbf{W}_{HY}(p)$ частотные характеристики наблюдателя по входу $\alpha(t)$ и выходу $\dot{\alpha}(t)$:

$$N_2(\omega) = \frac{\sqrt{(-b_2\omega^2 + b_0)^2 + (b_1\omega - b_3\omega^3)^2}}{(\omega^2 + \omega_0^2)^2}; \quad \varphi_2(\omega) = \arctg \frac{b_1\omega - b_3\omega^3}{b_0 - b_2\omega^2} - 4\arctg \frac{\omega}{\omega_0};$$

где $b_3 = k_2$, $b_2 = \frac{-k_1 k_\alpha J_z + k_2 J_y f_\beta - k_4 J_z H}{J_y J_z}$, $b_1 = \frac{-k_1 k_\alpha f_\beta + k_2 J_y mgl + k_3 mgl H}{J_y J_z}$, $b_0 = \frac{-k_1 k_\alpha mgl}{J_y J_z}$.

С учетом выражений (9), частотные характеристики наблюдателя по входу $n_x(t)$ и выходу $\dot{\alpha}(t)$:

$$N_{HY2}(\omega) = \frac{mgl \cdot H \cdot \omega \sqrt{(-b_2\omega^2 + b_0)^2 + (b_1\omega - b_3\omega^3)^2}}{(\omega^2 + \omega_0^2)^2 \sqrt{(\omega^4 - a_2\omega^2 + a_0)^2 + (a_1\omega - a_3\omega^3)^2}}; \quad (11)$$

$$\varphi_{HY2}(\omega) = -90^\circ - \arctg \frac{-a_3\omega^3 + a_1\omega}{\omega^4 - a_2\omega^2 + a_0} + \arctg \frac{b_1\omega - b_3\omega^3}{b_0 - b_2\omega^2} - 4\arctg \frac{\omega}{\omega_0}. \quad (12)$$

На рис.1 представлены графики частотных характеристик гиротеодолита (10) и наблюдателя (11), (12) построенные для разных значений ω_0 . Из полученных графиков видно, что при малых значениях корня полинома наблюдателя ($\omega_0 = 1, 10 \text{ с}^{-1}$) имеют место значительные амплитудные и фазовые искажения оценки угловой скорости $\dot{\alpha}$ относительно точного значения $\dot{\alpha}$, как в области низких частот, так и в области высоких частот. При увеличении $\omega_0 = 100 \text{ с}^{-1}$ в области низких частот амплитудных и фазовых искажений уже не наблюдается, а в области высоких частот присутствуют искажения по фазе и по амплитуде, начиная с частоты $\omega = 50 \text{ с}^{-1}$. При $\omega_0 = 1000 \text{ с}^{-1}$ графики АЧХ и ФЧХ гиротеодолита и наблюдателя практически совпадают до частоты $\omega = 500 \text{ с}^{-1}$.

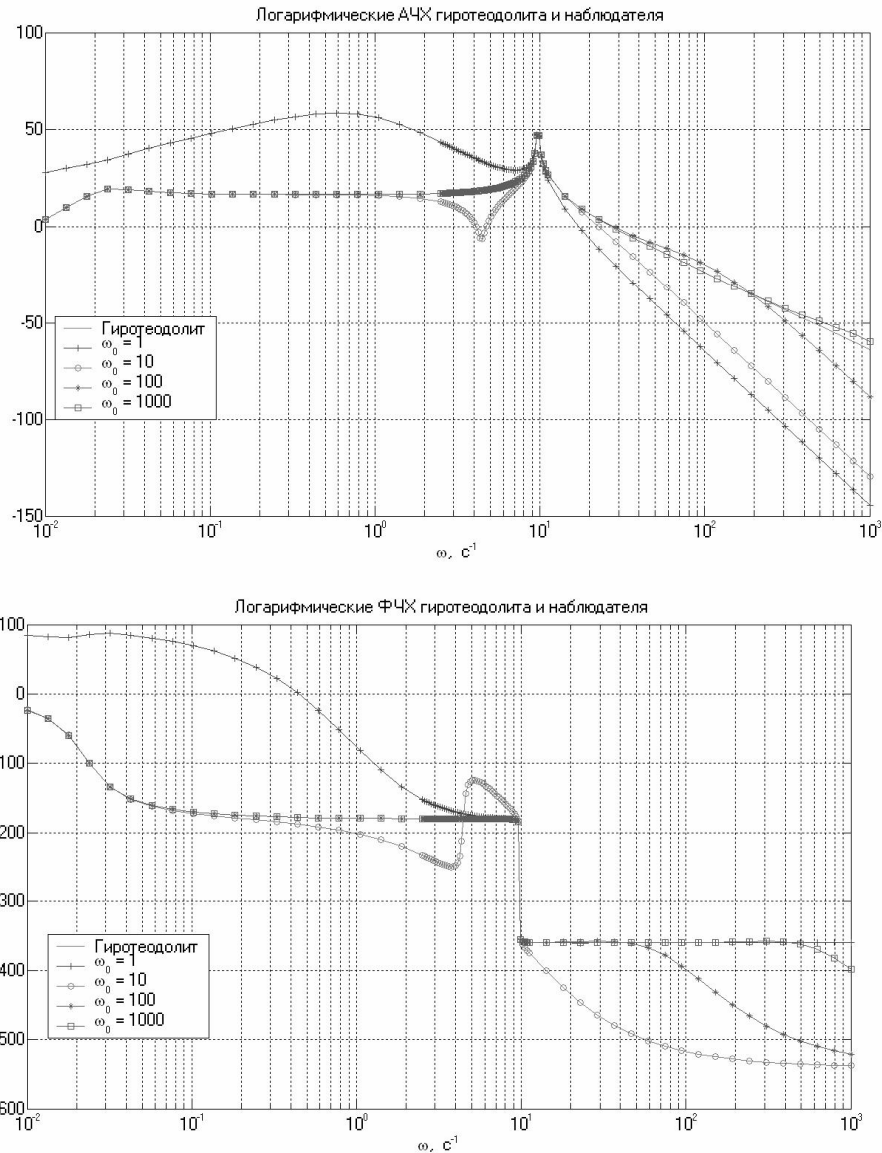


Рис. 1. Графики логарифмических частотных характеристик.

Таким образом, можно сделать вывод, что для уменьшения погрешности оценивания наблюдающего устройства, при воздействии на объект поступательных вибраций необходимо увеличивать абсолютные значения корней полинома наблюдателя. Однако следует отметить, что такое увеличение собственных значений приводит к заметному увеличению вычислительной сложности определения оценки угловой скорости $\hat{\xi}$, поскольку в этом случае требуется уменьшение шага при интегрировании уравнения (4).

Моделирование процесса алгоритмической компенсации постоянной составляющей вибрационной погрешности

Процесс алгоритмической компенсации постоянной составляющей вибрационной погрешности подробно описан в работе [3]. Точное значение постоянной составляющей вибрационной погрешности гиросеодолита будем определять по формуле [2]:

$$\sin\langle\alpha\rangle = \frac{\langle\dot{\alpha}\gamma\rangle}{\omega_3 \cos\phi_g}.$$

Соответственно, можно записать приближенное выражение, в котором используется оценка угловой скорости чувствительного элемента в азимуте $\hat{\xi}$:

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \arcsin \frac{\langle \dot{\mathcal{E}} \rangle}{\omega_3 \cos \phi_g}$$

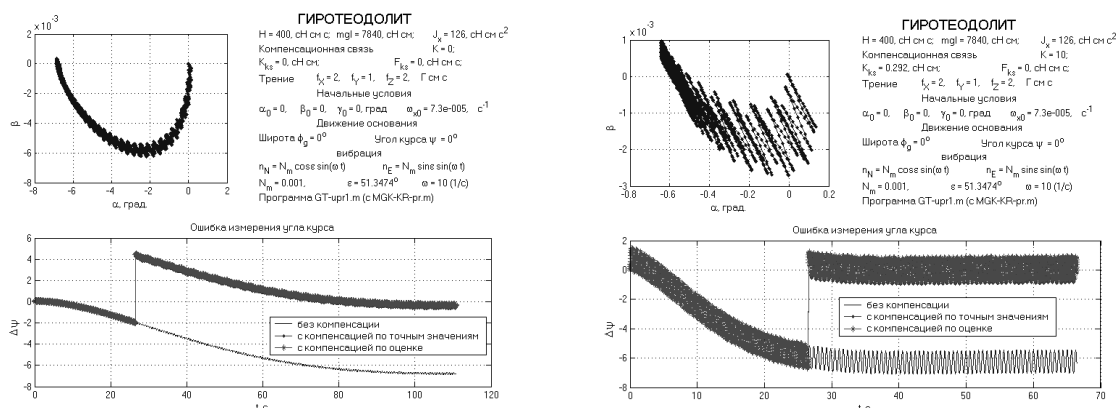


Рис. 2. Алгоритмическая компенсация при $\kappa = 0$ и при $\kappa = 10$.

Как следует из проведенных программных экспериментов (рис. 2), процесс алгоритмической компенсации приводит к исключению большей части постоянной составляющей вибрационной погрешности как при использовании точного значения угловой скорости $\dot{\alpha}$, так и при использовании оценки угловой скорости \mathcal{E} . Такая компенсация может быть эффективным средством повышения виброустойчивости гиротеодолита. Синтезированное наблюдающее устройство исключает необходимость применения специальных конструктивных устройств для определения угловой скорости $\dot{\alpha}$, или же численное дифференцирование сигнала α .

Выводы

Наблюдающее устройство для оценки угловой скорости чувствительного элемента гиротеодолита вокруг вертикальной оси позволяет с достаточной точностью определить искомое значение \mathcal{E} , что достигается выбором соответствующих собственных значений наблюдателя. Анализ частотных характеристик показывает, что для обеспечения минимальных погрешностей оценивания необходимо увеличивать ω_0 .

Как показали результаты моделирования, алгоритмическая компенсация вибрационной погрешности гиротеодолита при использовании оценки угловой скорости \mathcal{E} дает результат не хуже, чем при точном знании угловой скорости $\dot{\alpha}$.

Дальнейшие исследования должны прояснить возможности измерения колебаний чувствительного элемента вокруг главной оси гироскопа, а также степень влияния погрешностей измерений на эффективность алгоритмической компенсации вибрационной погрешности гиротеодолита.

Список литературных источников

1. Лазарев Ю. Ф., Мироненко П.С., Литовко Г.В. О погрешностях гирокомпаса в компенсационном режиме при поступательной вибрации точки подвеса. // Вестник КПИ. Приборостроение. – 1982. – вып. 12. – С. 26-28.
2. Лазарев Ю. Ф., Мироненко П.С. Обобщенная форма представления систематической погрешности наземного гирокомпаса, обусловленной вибрацией. // Механика гироскопических систем. – 1987. – вып. 6. – С. 23-27.
3. Мураховский С.А., Лазарев Ю. Ф., Мироненко П.С. Динамика наземного компенсационного маятникового гирокомпаса. // Вісник Інженерної академії України. – 2010. – вип. 2. – С. 125-130.
4. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. – М.: «Машиностроение», 1976. – 184 с.