УДК 519.62

В. П. Денисюк, д.ф.-м.н., проф.
О. В. Негоденко, аспірант

ПРО ОДИН ЕФЕКТ, ЩО ВИНИКАЄ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ МЕТОДОМ КОЛЛОКАЦІЙ З ВИКОРИСТАННЯМ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ МНОГОЧЛЕНІВ

Національний авіаційний університет e-mail: kvomden@Nau.edu.ua

Виявлено один ефект, що виникає при розв'язанні крайової задачі для диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами у вигляді тригонометричних многочленів. Невизначені параметри визначаються методом колокацій. Цей ефект полягає в тому, що визначник матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь обертається на 0 при деяких значеннях параметра a.

Ключові слова: *тригонометричний многочлен, вузлові точки, нев'язка, формули Бесселя.*

Вступ

В багатьох задачах науки і техніки в ролі математичних моделей досліджуваних процесів, які змінюються у часі під впливом внутрішніх та зовнішніх чинників, використовують диференціальні рівняння.

Для знаходження розв'язків диференціальних рівнянь використовують точні та наближені методи. Точні методи розв'язання диференціальних рівнянь передбачають знаходження точного розв'язку у певному вигляді через елементарні та спеціальні функції. Але можливості отримати такі розв'язки істотно обмежені складністю математичних задач. Тому виникає необхідність застосування наближених методів.

Постановка задачі

Серед різних типів наближених методів розв'язання диференціальних рівнянь обмежимось розглядом таких, при яких шуканий розв'язок можна подати у вигляді:

$$u \approx \tilde{u} = \sum_{m=1}^{M} \alpha_m \psi_m, \tag{1}$$

де $\{\psi_{\mathrm{m}}; \mathrm{m} = 1,2,...\}$ − система лінійно незалежних (зокрема ортогональних) *базисних функцій*, α_m $(m = 1,2,...,M)$ − невизначені параметри.

Розглянемо деякі способи визначення параметрів α_m, які використовуються у виразі (1).

Нехай маємо крайову задачу для звичайного лінійного диференціального рівняння

$$Lu(x) = f(x);$$

з крайовими умовами

$$\begin{aligned} u(c) &= C; \\ u(d) &= D. \end{aligned} \tag{2}$$

Розв'язок шукаємо у вигляді

$$u_M^*(x) = \varphi(x) + \sum_{m=1}^{M} \alpha_m \psi_m(x),$$

де $\varphi(x)$ − функція, яка задовольняє крайовим умовам.

Підставляючи $u_M{}^*(x)$ в (1), отримуємо нев'язку

$$\varepsilon(\mathrm{x}, \alpha_1, ..., \alpha_m) = Lu_M^*(x) - f(x).$$

Зрозуміло, що для визначення M невизначених параметрів $\alpha_1,...,\alpha_m$ необхідно скласти M рівнянь. Для побудови цієї системи застосовують різні прийоми. Розглянемо деякі з них.

Розглянемо вираз

$$\int_c^d W_l(x) \varepsilon(x, \alpha_1, ..., \alpha_m) dx = 0, \quad 1 \le l, m \le M, \tag{3}$$

де $\{W_l(x); l = 1,2,...\}$ – множина лінійно незалежних функцій; ці функції називаються ваговими.

В залежності від вибору вагових функцій $W_l(x)$ розглянемо деякі частинні випадки. Для цього на відрізку $[c,d]$ задамо сітку $c = x_0 < x_1 < ...x_{l-1} < x_l < ... < x_n = d$. Тоді можливі такі випадки[3]:

1. $W_l(x) = \delta(x - x_l)$,

де $\delta(x - x_l)$ – дельта-функція Дірака, яка має властивість

$$\int_{x<x_l}^{x>x_l} f(x)\delta(x - x_l)dx = f(x_l).$$

Підставляємо $W_l(x)$ в (3), маємо

$$\int_c^d W_l(x)\varepsilon(x,\alpha_1,...,\alpha_m)dx = \int_c^d \delta(x - x_l)\varepsilon(x_l,\alpha_1,...,\alpha_m)dx = \varepsilon(x_l,\alpha_1,...,\alpha_m) = 0,$$

$l = 1,2,..,M$.

Тобто, застосування таких вагових функцій зводиться до вимог обертання нев’язки на 0 у вузлах сітки. Такий метод називають методом точкової колокації.

2. $W_l(x) = \{\begin{matrix} 1, & x_l < x < x_{l+1,} \\ 0, & x < x_l, x > x_{l+1}, \end{matrix}$

Підставляємо $W_l(x)$ в (3), маємо

$$\int_c^d W_l(x)\varepsilon(x_l,\alpha_1,...,\alpha_m)dx = \int_{x_{l-1}}^{x_l} \varepsilon(x_l,\alpha_1,...,\alpha_m)dx = 0, \quad l = 1,2,..,M.$$

Введення таких вагових функцій зводиться до вимог обертання інтегралів від нев’язки на 0 на відрізках $[x_{l-1}; x_l]$; цей метод називають методом підобластей.

3. $W_l(x) = \gamma_l(x)$,

де $\gamma_l(x)$ – деяка система ортогональних функцій.

Підставляємо $W_l(x)$ в (3), маємо

$$\int_c^d W_l(x)\varepsilon(x_l,\alpha_1,...,\alpha_m)dx = \int_c^d \gamma_l(x)\varepsilon(x_l,\alpha_1,...,\alpha_m)dx = 0, \; l = 1,2,..,M.$$

Маємо в загальному випадку метод ортогональних проекцій. Якщо ж $\gamma_l(x) = \psi_m(x)$, то цей метод називають методом Гальоркіна.

4. Метод найменших квадратів також відносять до даного класу методів. В методі найменших квадратів мінімізується інтеграл від квадрата похибки на відрізку $[c,d]$, тобто вираз виду

$$I(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m) = \int_c^d \varepsilon(x,\alpha_1,...,\alpha_m)^2 dx.$$

Можна показати, що I досягає мінімуму при умові

$$\int_c^d \varepsilon(x,\alpha_1,...,\alpha_m)\psi_m dx = 0.$$

Отримане співвідношення співпадає із (3) з вагою $W_l(x) = \psi_m$, і таким чином, у цьому випадку метод найменших квадратів еквівалентний методу Гальоркіна [4].

Основний зміст

Ми обмежимось розглядом лише методом точкової колокації. Застосуємо цей метод для знаходження наближеного розв’язку крайової задачі для лінійно-незалежного диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами

$$y'' + ay + \sin 2x = 0 \qquad (4)$$

з крайовими умовами

$$y/_{x=\pi} = 1 = y'/_{x=2\pi}$$

для випадку, коли в ролі функції ψ_m вибирають тригонометричну систему функцій.

Задамо на проміжку $[0,2\pi]$ сітку $\Delta_N = \{x_i\}_{i=0}^{N-1}$, де $x_i = (i-1)\cdot h$, $h = \dfrac{2\pi}{N}$, $N = 2n+1$, $N \geq 2$ – натуральне, h – крок сітки.

Будемо шукати розвязок у вигляді тригонометричного многочлена [1]

$$T_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kt + b_k \sin kt), \qquad (5)$$

де в ролі невизначених параметрів виступають коефіцієнти $a_0, a_k, b_k, k = 1,2,...,n,$ цього многочлена. Припустимо, що нам відомі значення шуканого розв'язку у вузлах сітки $f(t_i)$. Тоді доцільно вимагати, щоб тригонометричний многочлен проходив через точки t_i і $f(t_i)$. Інакше кажучи, в цьому випадку маємо задачу інтерполяції. Відомо, що коефіцієнти інтерполяційного многочлена визначаються за формулами Бесселя, тобто

$$a_0 = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} f(t_i),\ a_k = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} f(t_i)\cos kt_i,\ b_k = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} f(t_i)\sin kt_i, \quad k = 1,2,..,n.$$

Зауважимо, що оскільки $T_n(t)$ є періодичною функцією, то з того, що він інтерполює функцію у точці $t = 0$ випливає, що інтерполяція здійснюється і у точці $t = 2\pi$.

Використання форми (5) інтерполяційного многочлена є незручним. Краще брати іншу форму запису цього многочлена, яку нескладно отримати.

Розглянемо функції

$$S(k,t) = \frac{1}{N}\left[1 + 2\sum_{\mathrm{j=1}}^{\frac{\mathrm{N-1}}{2}} \cos\left[\mathrm{j}\left(\mathrm{t - x_k}\right)\right]\right].$$

Нескладно показати, що функції $S(k,t_j) = \{\begin{matrix} 1, k = j, \\ 0, k \neq j, \end{matrix}$ тобто задовольняють інтерполяційним умовам. Враховуючи це, тригонометричний інтерполяційний многочлен можна записати у вигляді

$$u(t,\gamma_1,...,\gamma_N) = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k S(k,t), \qquad (6)$$

де γ_k – значення шуканої нев'язки у вузлах сітки.

Така форма запису наводиться наприклад в роботі [2].

Підставимо (3) в (4), для цього знайдемо першу і другу похідні:

$$S'(k,t) = \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}}(-j)\sin\left[j\left(t - x_k\right)\right],$$

при $k \rightarrow x_k,\ t_k = x_k$.

$$S''(k,t) = -\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} j^2 \cos\left[j\left(t - x_k\right)\right],$$

Отримаємо:

$$\sum_{k=1}^{N}\gamma_k S''(k,t) + a\sum_{k=1}^{N}\gamma_k S(k,t) = f(t)$$

що можна подати у вигляді

$$\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\left(S''(k,t)+aS(k,t)\right)=f(t).$$

Застосуємо метод колокацій, тобто будемо вимагати щоб нев'язка оберталися на 0 у вузлах сітки.

Підставляємо $t = x_i$, $i = 1,2,...,N$ і отримаємо систему рівнянь.

$$\gamma_0(S''(0,x_1)+aS(0,x_1))+...+\gamma_{N-1}(S''(N-1,x_1)+aS(N-1,x_1))=f(x_1),$$

$$\gamma_0(S''(0,x_2)+aS(0,x_2))+...+\gamma_{N-1}(S''(N-1,x_2)+aS(N-1,x_2))=f(x_2),$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad ....$$

$$\gamma_0(S''(0,x_N)+aS(0,x_N))+...+\gamma_{N-1}(S''(N-1,x_N)+aS(N-1,x_N))=f(x_N).$$

Підставляючи $S''(k,t)$ і $S(k,t)$, цю систему можна подати у вигляді:

$$\gamma_0\left(\frac{1}{N}+\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}}\left[\left(a-j^2\right)\cos\left[j\left(t_1-x_1\right)\right]\right]\right)+...+\gamma_{N-1}\left(\frac{1}{N}+\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}}\left[\left(a-j^2\right)\cos\left[j\left(t_{N-1}-x_1\right)\right]\right]\right)=f(x_1),$$

$$... \; ... \quad \ldots \quad .... \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (7)$$

$$\gamma_0\left(\frac{1}{N}+\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}}\left[\left(a-j^2\right)\cos\left[j\left(t_1-x_N\right)\right]\right]\right)+...+\gamma_{N-1}\left(\frac{1}{N}+\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}}\left[\left(a-j^2\right)\cos\left[j\left(t_{N-1}-x_N\right)\right]\right]\right)=f(x_N).$$

Дослідимо поведінку визначника $\Delta(B(a))$ - визначника системи лінійних алгебраїчних рівнянь (7), як функції параметра a. В результаті обчислень виявилось, що при $N=3$ визначник матриці обертається на 0 при значеннях параметра $a=1$. Якщо $N=5$, то $\Delta(B(a))=0$ при $a=1,4$, якщо $N=7$, то $\Delta(B(a))=0$ при $a=1,4,9$. Графік поведінки визначника $\Delta(B(a))$ як функції при $N=5$ наводиться на Рис.1.

Висновки

Виявлено один ефект, що виникає при розв'язанні крайової задачі для диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами у вигляді тригонометричних многочленів. Невизначені параметри визначаються методом колокацій. Цей факт полягає в тому, що визначник матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь обертається на 0 при деяких значеннях параметра a.

На нашу думку, цей ефект виникає внаслідок того, що при значеннях параметра $a=k^2$, $(k=1,2,...)$ функції $\cos kt_i$ і $\sin kt_i$ є власними функціями диференціального оператора (2); інші ж функції в (5) є ортогональними до $\cos kt_i$ і $\sin kt_i$.

Список літературних джерел

1. Денисюк В.П. Сплайни та сигнали: Монографія.- ЗАТ:ВІПОЛ, 2007.-228с.
2. Натансон И.П. Конструктивная теория функций – М.: Госиздат. техн.-теор. литер.: 1949.-684 с.
3. О. Зенкевич, К. Морган. Конечные элементы и аппроксимация – М.:Мир, 1986.-312с.
4. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина – М.:Мир, 1988. -352с.