УДК 621.377.624

О.О. Колганова, О.В. Савченко, І.Б. Ніколенко

СПЛАЙНОВИЙ БАГАТОМАСШТАБНИЙ РОЗКЛАД З ПІДВИЩЕНИМИ ВАГАМИ У ВУЗЛАХ СКЛЕЙКИ СПЛАЙНУ

Національний авіаційний університет, e-mail: shutko@nau.edu.ua

Стаття присвячена розробці сплайнового багатомасштабного розкладу з підвищеними вагами у вузлах склейки сплайна та оцінці його переваг в порівнянні з прямою процедурою сплайнового багатомасштабного розкладу.

Ключові слова: *сплайн, багатомасштабний розклад, стиснення графічних даних.*

Вступ. Сучасні популярні стандарти MPEG4, DivX 5.x, JPEG2000 та відомі графічні програмні засоби Corel DRAW 9/10 широко використовують вейвлет-технології обробки зображень. Системи комп'ютерної математики MATLAB, Mathcad і Mathematica також мають професійно орієнтовані пакети розширень по вейвлетам для їх практичного застосування. Вейвлет-обробка сигналів забезпечує можливість досить ефективного стиснення сигналів і їх відновлення з малими втратами якості, а також вирішення задач фільтрації сигналів.

Вейвлет-перетворення природно виникає в контексті багатомасштабного аналізу (multiresolution analysis). Багатомасштабний аналіз (БА) – це математична конструкція, що синтезує дві ідеї обробки сигналів. Перша ідея – розкладання сигналу по піддіапазонах (subband decomposition) за допомогою квадратурних дзеркальних фільтрів (quadrature mirror filters) – з'явилася в задачі стиску мови. Друга ідея – пірамідне представлення (pyramid representation) – у задачі стиску зображень. Обидві ідеї зв'язані із застосуванням до сигналу фільтрів спеціального виду. У першому випадку теорія будувалася в термінах Фур'є-перетворення сигналу, у другому – у термінах вихідного сигналу [1, 3].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В сучасній літературі [1, 2, 3, 4, 5] для задач стиснення графічних даних застосовується такий підхід. Концепція багатомасштабного аналізу дає певну схему представлення сигналів: простір функцій (сигналів) вичерпується системою вкладених підпросторів (аналог піраміди гаусіанів). Кожне з них породжене цілочисельними зсувами однієї й тієї ж функції $\varphi(t)$, розтягнутої в 2^n раз. Для кожного підпростору n фіксовано, і характеризує масштаб. Завдання полягає в тому, щоб розкласти сигнал на його "грубу" великомасштабну версію і набір "деталей", що відрізняє версії проміжних масштабів один від одного.

Внесок техніки розкладання по під діапазонах полягає в тому, що коефіцієнти h повинні бути такими, щоб фільтр $H(\omega)$ задовольняв умові: $\left|H(\omega)\right|^2 + \left|H(\omega+\pi)\right|^2 \equiv 2$

Виявляється, у цьому випадку процес переходу від більш тонкої до більш грубої версії сигналу зводиться до застосування низькочастотного фільтра, а обчислення "деталей" – до застосування високочастотного фільтра. Детальніше ця процедура описана в літературі [1, 2, 3].

Внесок самої схеми БА в цю картину такий: виявляється, що при виконанні попередніх умов простори "деталей" влаштовані аналогічно просторам різномасштабних версій. А саме, існує така функція, що породжує ці простори своїми зсувами і розтяганнями. Ця функція називається ортогональним вейвлетом.

Так як сплайни – кусково-поліноміальні функції, то вони легко можуть бути використані при обчисленнях. Дійсно, алгоритми для графічного зображення кривих з допомогою сплайнів та для обчислення їх поліноміальних складових надзвичайно ефективні [2, 6]. А в класі неперервно диференційованих функцій за теоремою Велікіна найкращим лінійним апаратом наближення являються сплайни.

Розробка сплайнового багатомасштабного розкладу в роботі [8] дозволила під час розрахунку матриці планування за відомими формулами на кожному етапі отримати швидку реалізацію БА з кратністю не 2 та зі змінною кратністю.

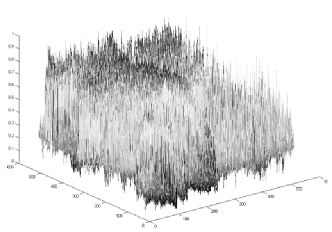
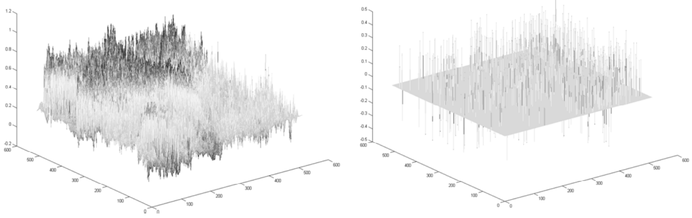


Рис.1. Оброблюваний сигнал (яскравісна компонента)

Постановка завдання. Нехай початкові дані представлені матрицею $N \times N$ дискретних відліків. Проводимо апроксимацію сплайном даних спочатку по рядках матриці, а потім по стовпцях. Згідно з формулами наведеними у статті [8] знаходимо спочатку функцію $f_i(n)$ по рядках, а потім $f_j(n)$ по стовпцях (рис.1).

4. Для збереження інформації про похибки знаходимо різниці між значеннями початкової та нової матриць у $N \times N$ точках. Значна частина таких різниць буде достатньо мала щоб можна було ними знехтувати. Встановлюється поріг, нижче якого значення різниць приймаються рівними нулю. Кількість вагомих (тобто ненульових) деталізуючих коефіцієнтів першого рівня позначимо $\det_1$. Тоді результатом першого кроку стиснення буде $N^2/4 + \det_1$ значень, які потрібно зберігати для можливого відновлення початкової функції (рис.2).



а *б*

Рис.2. Сплайн-апроксимація яскравісної компоненти сигналу (*а*) і деталізуючі коефіцієнти (*б*) після першого кроку

5. Аналогічно проводиться стиснення і на подальших кроках. На кожному кроці зберігаються деталізуючи коефіцієнти.

Відновлення початкового сигналу відбувається в зворотному порядку. До значень коефіцієнтів у вузлах склейки сплайну на останньому рівні додаються деталізуючі коефіцієнти $\det_4$ та виконується інтерполяція. Так отримується сигнал попереднього кроку стиснення. Аналогічно поетапно розраховуються матриці коефіцієнтів на усіх рівнях. Таким чином крок за кроком відновлюється зображення.

Таким чином бачимо, що в другому випадку досягнуто того ж ступеня стиснення для апроксимуючих коефіцієнтів ($\frac{N^2}{64}$), що і в першому, але замість трьох кроків виконується два, що скорочує витрати часу на обчислення та зменшує кількість деталізуючих коефіцієнтів. Однак збільшення кроку призводить до збільшення амплітуд деталізуючих коефіцієнтів, тобто компресія зображення проводиться грубіше. Тому для порівняння якості стиснення першим і другим методами потрібно провести експериментальну оцінку.

В статті ставиться задача пошуку можливостей підвищення ефективності стиснення зображень.

Сплайновий багатомасштабний розклад з підвищеними вагами у вузлах склейки сплайну. Розглянемо процедуру побудови сплайну.

Нехай на відрізку *[a,b]* в точках $X = \{x_i\}_{i=1}^N$ задані значення $Y = \{y_i\}_{i=1}^N$ деякої гладкої функції.

Знайдемо сітку $\Delta_r = \{\tilde{x}_j\}_{j=0}^r$ $(r < N)$, на якій можна побудувати сплайн $S(x) \in C_{[a,b]}^k, K = 1,2,\ldots$, що має неперервні похідні до k -го порядку включно.

Відповідно до постановки задачі сітки Δ_N і Δ_r не збігаються, тобто на кожній ділянці сітки Δ_r може знаходиться кілька спостережень, що і будуть визначати поводження шуканої залежності. Для цього необхідно знайти матрицю $C = X^T * X$ (де X^T - транспонована матриця) і зворотну їй матрицю C^{-1}, а також матрицю $B = X * Y$.

У розглянутому випадку матриця *C* виходить симетричною семи діагональною матрицею вигляду:

$$C = \begin{vmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} & 0 & \ldots & 0 \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & \ldots & 0 \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & \ldots & 0 \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & \ldots & 0 \\ 0 & C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & C_{rr} \end{vmatrix}$$

Оцінки ординат точок «склейки» ділянок сплайна (елементи матриці $\hat{A}$) знаходяться за формулою:

$$a_i = \sum_{j=0}^{r} C_{ij}^{-1} b_j\ , \quad i = \overline{0,r}\ .$$

Значення локального кубічного ермітова сплайну в довільній точці обчислюється за формулою:

$$S(t) = a_{j-1}\,{}^1x(t) + a_j\,{}^2x(t) + a_{j+1}\,{}^3x(t) + a_{j+2}\,{}^4x(t) \text{ для } t \in [tu_j, tu_{j+1}],$$

де ${}^k x(t)$ - локальні функції форми, a_j - значення ординат вузлів "склейки" ділянок сплайну.

Точність наближення шуканої залежності за допомогою обраного сплайна заснована на мінімумі суми квадратів відхилень ординат точок спостережень від знайденої залежності.

$$d = \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1+m_{j-1}}^{m_j} \left[y_i - S_3(x_i) \right]^2$$

При апроксимації узагальненим методом найменших квадратів (МНК) з підвищеними вагами у вузлах склейки сплайна матриця X помножується на матрицю вагових коефіцієнтів:

$$M = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Обернена матриця C^{-1} знаходиться з виразу:

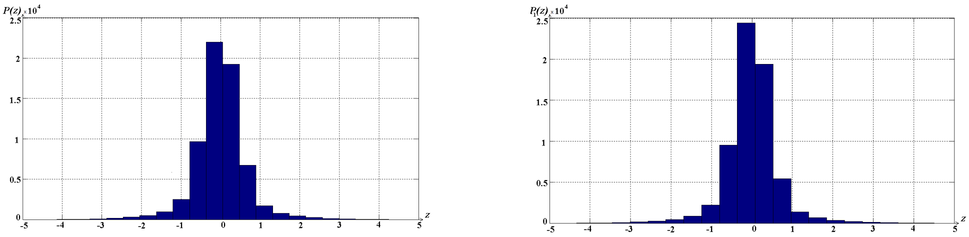
$$C^{-1} = \left(X^T * M * X \right)^{-1}. \text{ Тоді } B = X^T * M * Y.$$

Значення коефіцієнтів у вузлах склейки сплайну: $A = C^{-1} * B$.

Сплайн будуємо за формулою $S = X * A$.

При апроксимації узагальненим методом найменших квадратів (МНК) з підвищеними вагами у вузлах склейки сплайна відбувається підвищення середньоквадратичних відхилень рядка зображення від апроксимуючого сплайну до 2%.

Але, водночас, гістограма деталізуючих відліків z стає більш нерівномірною у порівнянні з методом 1, наведеним у [8], з невеликою перевагою в бік коефіцієнтів малої амплітуди (рис.3).



а *б*

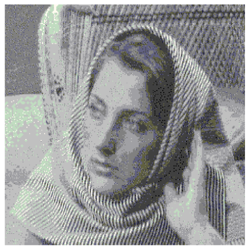
Рис. 3 Гістограми деталізуючих коефіцієнтів для прямого (*а*) та запропонованого (*б*) сплайнових багатомасштабних розкладів

Це обумовлює вищу ефективність стиснення цих деталізуючих коефіцієнтів архіватором (наприклад, ZIP).

Порівняємо коефіцієнти стиснення прикладу зображення при однакових середньоквадратичних відхилень (СКВ) відновленого після стиснення зображення від оригіналу.

Оригінал зображення – 65,5 КБайт

Метод 1 – 13,2 кБайт (при СКВ 9,21 градацій сірого)



Метод 2 – 12,3 кБайт (при СКВ – 9,20 градацій сірого

Висновки. Експериментальні дані підтверджують ефективність і конкурентноспроможність розробленого в статті методу. Виграш у стисненні при однаковій якості відновленого зображення в порівнянні з прямою процедурою сплайнового багато масштабного розкладу складає 7%.

Список літературних джерел

1. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. – М: РХД, 2001. – 464 с.
2. Чуи К. Введение в вейвлеты.–М.: «Мир», 2001.– 412 с.
3. Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике.– М.: Солон-Р, 2002.– 440с.
4. Методы сжатия данных. Устройство архиваторов, сжатие изображений и видео. / Д. Ватолин, А. Ратушняк, М. Смирнов, В. Юкин. – М.: "Диалог-МИФИ", 2002. – 381 с.
5. Рудаков П.И., Сафонов И.В. Обработка сигналов и изображений. MATLAB 5x. – М.: "Диалог-МИФИ", 2000. – 413 с.
6. Шутко М.О., Шутко В.М., Колганова О.О. Сплайновий багатомасштабний аналіз // Вісник Інженерної академії – К.: ДП "Друкарня МВС України", 2008.– №1. – С. 207-214.
7. Колганова О.О. Двовимірний сплайновий багатомасштабний аналіз // Вісник Інженерної академії– К.: вид-во Нац. ун-ту кораблебудування ім. адм. Макарова, 2010.–№.2– С.103-108.
8. Колганова О.О. Метод зберігання та передачі графічної інформації у базах даних на основі сплайнового багатомасштабного розкладу: Автореф. дис. канд.техн.наук: 01.05.03 / НАУ. – К., 2009. – 20 с.