

УДК 681.5

Д.П. Кучеров, д.т.н.

СУБОПТИМАЛЬНЕ ЗА ШВИДКОДІЄЮ КЕРУВАННЯ СИСТЕМОЮ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ З ОДНИМ НУЛЬОВИМ ПОЛЮСОМ

Національний авіаційний університет

В статті показано синтез закону керування для системи третього порядку, що забезпечує мінімально можливий час відпрацювання завдання в умовах, коли завади в каналах вимірювання координат відсутні. Особливістю запропонованого закону керування є відсутність ковзного режиму та введення області досяжності, яка виключає можливість створення межових циклів в околиці кінцевого стану об'єкта керування. Наводиться структурна схема такої системи. Приведені результати модельного експерименту.

Ключові слова: система керування, субоптимальне за швидкодією керування, структурна схема

Вступ. Сервосистема є основою систем керування рухомих у просторі об'єктів. Особливістю побудови систем даного виду є наявність нелінійних елементів, які приводять чи до небажаної якості регулювання за рахунок неминучих втрат в каналі перетворення інформації чи свідомо вводяться з метою надання системі певних корисних властивостей. До останніх відносяться системи з релейними підсилювачами та виконавчими пристроями, які називають релейними [1, с. 395].

Аналіз досліджень і публікацій. В 50-х роках минулого століття відомим радянським вченим Л.С. Понтрягиним та його учнями були розроблені основи теорії побудови оптимальних за швидкодією систем. Ця теорія дає інструмент для визначення моментів перемикачів знаку керування як для найменшої кількості інтервалів керування, так і забезпечення мінімального часу керування та визначає підходи до технічного виконання регулятора [1, 2]. З практичної точки зору її застосування вимагає від системи керування рішення $2n+1$ диференціальних рівнянь в реальному часі та тому широкого застосування не отримала [3, 4].

Альтернативним підходом до побудови регуляторів став підхід, заснований на блискучій ідеї О.А. Фельдбаума, згідно з якою сигнал керування визначається у фазовому просторі, який поділяється лінією (поверхнею) перемикачів на два півпростори, що відповідають керуванням протилежних знаків [5]. Однак практика побудови таких регуляторів дозволила виявити їх недоліки, пов'язані перш за все із хибними перемикачними сигналами керування та межовими циклами в околиці області цілі (досягнення) [5]. Існуючі складності у визначенні точного закону керування для довільних об'єктів та об'єктів високого порядку ($n \geq 3$) долаються шляхом побудови квазіоптимального регулятора, що працює в так званому «ковзному режимі» [6]. Але цей режим в [7] вважається неприпустимим із-за низької надійності сервоприводу та затягуванні процесу керування на 20-50%.

Очевидно, що ці недоліки можуть бути суттєво усунені, якщо вирішувати цю задачу як задачу керування динамічним об'єктом з невідомими параметрами, як це було запропоновано в [8-10]. В результаті застосування адаптивного підходу визначаються параметри регулятора, які пов'язані з невідомими параметрами об'єкта керування. Такий підхід має певні переваги при керуванні простими об'єктами ($n=2$) над квазіоптимальним [6], що і демонструється в [8-10]. Складності, які пов'язані з побудовою адаптивного керування для об'єктів більш високого порядку викликані з реалізацією закону керування, в якому вид поверхні перемикачів невідомий.

Останні публікації в відомих виданнях ближнього та дальнього зарубіжжя підкреслюють дослідницький інтерес в цій галузі знань. Так в [10] пропонується рішення задачі синтезу безперервного регулятора, оптимального за часом регулювання, заснованого на методі бажаних передатних функцій, що визначаються за допомогою стандартних передатних функцій у вигляді Вишеградського. Застосування цього метода визначається характером розташування полюсів та нулів виключно для правої напівплощини та тому має обмежений характер. Метод побудови квазіоптимальних регуляторів, який запропонований в [11, 12] передбачає введення малої області в околиці області цілі, де релейний закон керування замінюється пропорційним. Такий підхід є повністю виправданим, однак ця задача вирішена виключно для об'єкта, математична модель якого є потрійний інтегратор. Найбільш типовим об'єктом третього порядку вважається об'єкт, передатна функція якого має всього лиш один нульовий та два ненульових полюса. У відомій літературі вид поверхні перемикачів закону керування для такого об'єкту при великих значеннях сигналу керування відсутній.

Мета роботи. В даній статті на основі підходів, які розроблені в [1, 2, 4, 12], пропонується рішення задачі побудови закону керування об'єктом третього порядку, що має передатну

функцію з одним нульовим та двома ненульовими полюсами та забезпечує мінімальний час переведення фазових координат об'єкта керування із заданого стану в область досягнення.

Постановка завдання. Нехай динамічний об'єкт має передатну функцію

$$W(s) = \frac{k}{s(s+a)(s+b)}, \quad (1)$$

де $s=d/dt$, $k>0$, $a>b>0$ – параметри об'єкта, ненульові полюси системи.

Позначимо вихідну величину об'єкта $x(t)$, сигнал керування $u(t)$. Передбачається, що об'єкту керування (1) ставиться завдання відпрацювання вхідної величини $r(t)=const$. В цьому разі об'єкт (1) може бути представлений диференціальним рівнянням

$$\frac{d^3 x(t)}{dt^3} + (a+b) \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + ab \frac{dx(t)}{dt} = ku(t). \quad (2)$$

Вводиться до розгляду вектор $X^T(t)=(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, координати якого є вихідною величиною, швидкістю її зміни та прискоренням

$$x_1(t) = x(t), \quad x_2(t) = \dot{x}(t), \quad x_3(t) = \ddot{x}(t). \quad (3)$$

Початковий стан об'єкта керування (2) вважається заданим, тобто відомі значення $X^T(t_n)=(x_1(t_n), x_2(t_n), x_3(t_n))$, $X(t_n) \in V \subset \mathcal{R}^3$. Передбачається, що в каналах виміру координат перешкоди відсутні. В процесі керування здійснюється перевід координат динамічного об'єкта (2) за час $T=t_k-t_n$, де $t_n=0$, з початкового стану $X^T(0)=(x_1(0), x_2(0), x_3(0))$ в околицю початку координат, яка визначається областю Ω , т.е. $X(t_k) \in \Omega \subset \mathcal{R}^3$.

Ставиться завдання визначення закону керування $u(t)$, що забезпечує перевід об'єкта керування (2) з початкового начального стану $X(0)$ в область досягнення Ω за мінімальний час T .

Закон керування. Як і в [11] для визначення закону керування представимо (2) в компактній формі $\dot{X}(t) = AX(t) + bu(t)$,

$$\text{де } A \text{ і } b \text{ – матриця і вектор виду } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -ab & -(a+b) \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Враховуючи, що матриця A має власні значення $0, -a, -b$ перетворимо рівняння (4) за допомогою перетворення подібності до еквівалентної системи рівнянь $\dot{Z}(t) = \Lambda Z(t) + P^{-1}bu(t)$.

$$\text{В (6) } Z(t) = P^{-1}X(t), \quad \Lambda = P^{-1}AP \text{ – жорданова канонічна форма матриці } A \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix},$$

$$\text{а матриці } P \text{ і } P^{-1} \text{ мають вигляд } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -a & -b \\ 0 & a^2 & b^2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & (ab)^{-1}(a+b) & (ab)^{-1} \\ 0 & b(a(a-b))^{-1} & (a(a-b))^{-1} \\ 0 & -a(b(a-b))^{-1} & -(b(a-b))^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Система рівнянь (3) у формі (6) має вигляд } \begin{cases} \dot{z}_1 = az_1 - ku[a(b-a)]^{-1}, \\ \dot{z}_2 = bz_2 + ku[b(b-a)]^{-1}, \\ \dot{z}_3 = ku(ab)^{-1}. \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{В системі рівнянь (7) введемо таке перетворення координат } \begin{cases} y_1 = \frac{a^2(b-a)}{k} z_1, \\ y_2 = \frac{b^2(b-a)}{k} z_2, \\ y_3 = \frac{ab}{k} z_3. \end{cases} \quad (8)$$

Перетворення (8) дозволяє отримати еквівалентну (7) систему рівнянь, яка має простішу форму, але при цьому зберігає усі властивості (7) та (3)

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = ay_1 - au, \\ \dot{y}_2 = by_2 + bu, \\ \dot{y}_3 = u. \end{cases} \quad (9)$$

З метою забезпечення мінімального часу досягнення початку координат закон керування

$$u(t) = \begin{cases} \text{sign}(f_1(y)), & \text{якщо } f_1(y) \neq 0, \\ \text{sign}(f_2(y)), & \text{якщо } f_1(y) = 0, f_2(y) \neq 0, \\ \text{sign}(y_3), & \text{якщо } f_1(y) = 0, f_2(y) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

В (10) використано такі позначення $f_1(y) = -y_2 + \Delta - \Delta \left(\frac{\Delta + B}{\Delta + y_3} \right)^{-c_1} \left(2 - (1 - \Delta B)^{c_1} \right)$, (11)

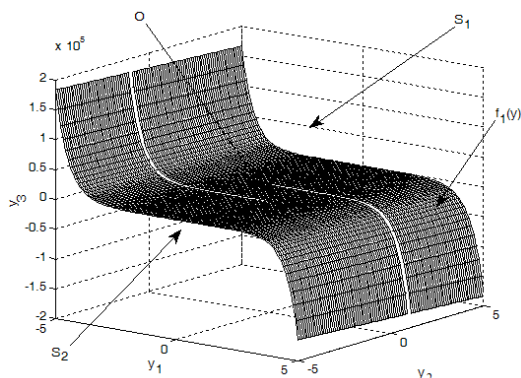


Рис.1. Вигляд поверхні $f_1(y)$ у фазовій площині

$$B = -\Delta \sqrt{-\Delta + (\Delta + y_3) e^{\Delta c_2 |y_1|}}, \quad (12)$$

$$\Delta = \text{sign} \left\{ -y_3 + \frac{y_1}{|y_1|} \left(1 - e^{c_2 |y_1|} \right) \right\}, \quad (13)$$

$$f_2(y_3, y_1) = -y_3 + \frac{y_1}{|y_1|} \left(1 - e^{c_2 |y_1|} \right), \quad (14)$$

$$c_1 = a/b, \quad c_2 = b. \quad (15)$$

Функція $f_1(y)=0$ має такі властивості: 1) $f_1(0)=0$, що означає, що функція $f_1(y)$ проходить через точку з координатами $(0, 0, 0)$;

2) функція $f_1(y)$ ділить весь фазовий простір S на два напівпростори S_1, S_2 так, що в просторі \mathbb{R}^3 вони відповідають різним знакам функції $f_1(y)$,

тобто $S_1 \subset f_1(y) > 0$, $S_2 \subset f_1(y) < 0$, а $S_1 \cup S_2 = S$. Їх перетин, тобто $S_1 \cap S_2 = S$ утворюють лінії згину поверхонь $f_2(y_1, y_3) = 0$, які є ділянкою оптимальної траєкторії в площині $\{y_3, y_1\}$;

3) $f_1(-y) = f_1(y)$, тобто функція $f_1(y)$ є монотонною, безперервною, немає розривів. Справедливість властивостей (1)-(3) встановлюється шляхом відповідних підстановок в формулах (11)-(14). Функція (11) при русі точки в фазовому просторі грає роль поверхні перемикачів.

Структура системи керування в постановці завдання (1)-(3) окрім традиційного контролера для об'єкта керування включає ще й перетворювач координат (рис.2), необхідність якого впливає з закону керування (10).

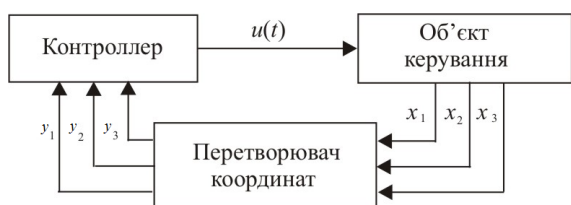


Рис.2. Структура системи керування, що забезпечує перевід об'єкта з початкового стану в кінцевий стан $(0, 0, 0)$

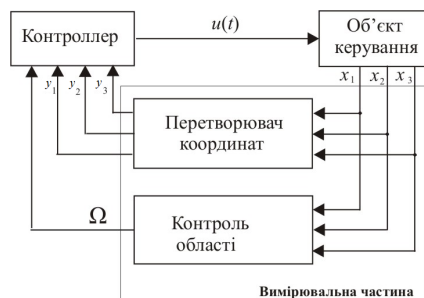


Рис.3. Структура системи керування, що забезпечує перевід об'єкта з початкового стану в область досяжності Ω

Враховуючи, що в реальній системі присутні такі явища, як тертя, мертві зони, гістерезис, похибки обчислень, які визивають межові цикли в околиці початку координат. Тому закон керування (10) потребує модернізації, що враховує зазначені негативні ефекти.

Така модернізація повинна включати введення області досяжності Ω , попадання та залишення в якій є достатнім для забезпечення цілей керування з законом наближенням до (10)

$$u(t) = \begin{cases} \text{sign}(f_1(y)), & \text{якщо } f_1(y) \notin \Omega, \\ ky, & \text{в протилежному випадку,} \end{cases} \quad (16)$$

де Ω – область досяжності, що визначається еліпсоїдом $x^T P x \leq k$, в якому P – позитивно

визначена матриця $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_4 & p_5 \\ p_4 & p_2 & p_6 \\ p_5 & p_6 & p_3 \end{pmatrix}$, (17)

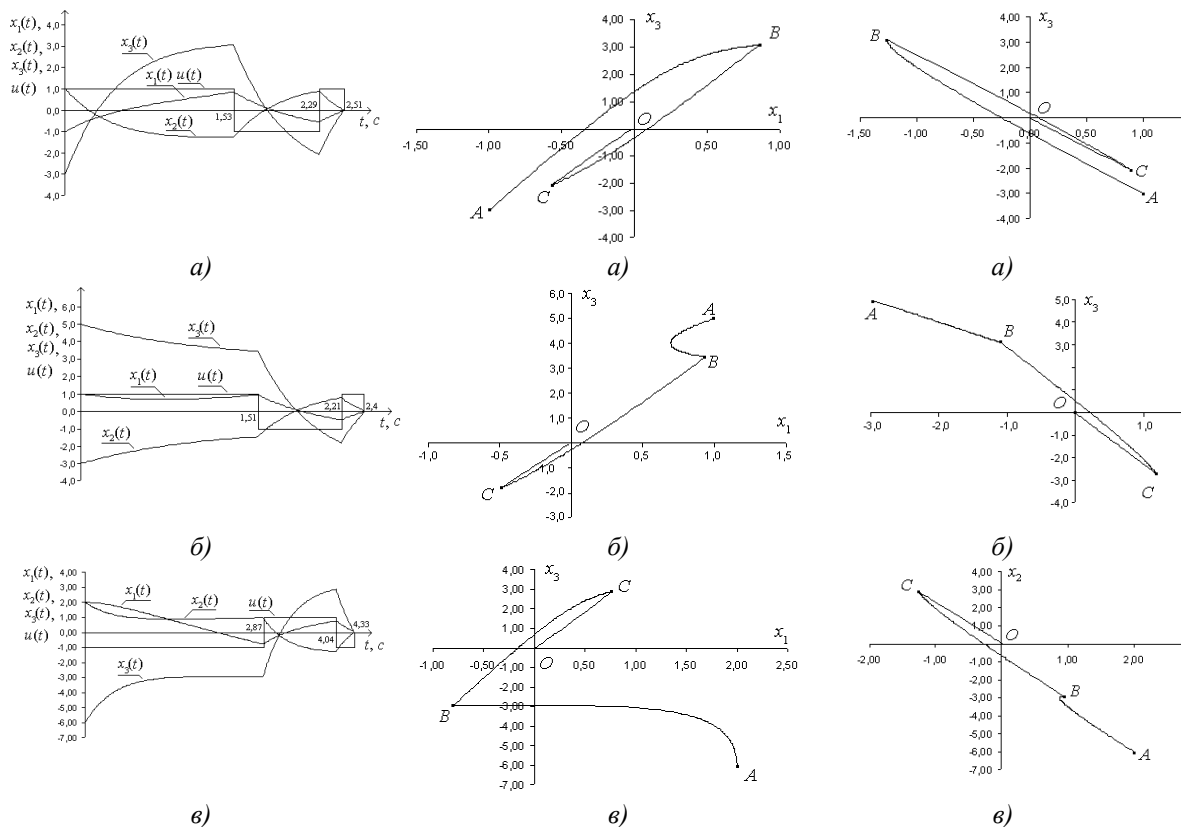
а k - деяка постійна. Матриця P розраховується з уявлень про максимальні розміри області досяжності та узгоджена з розміром можливих межових циклів.

Закон керування (16) може бути реалізованим в структурі, наведеній на рис.3, яка відрізняється від наведеної на рис.2 вимірювальною частиною, яка додатково містить блок контролю області досяжності Ω .

Розглянутий підхід побудови субоптимального керування повністю узгоджується з результатами, отриманими в [10, 12, 13]. При цьому на відміну від [10, 12, 13], де синтез закону керування спрямовано на безінерційну сервосистему, що являє собою потрійний інтегратор, в даній статті розглядається більш загальний випадок, коли система має дві постійні часу $\tau_1=a^{-1}$, $\tau_2=b^{-1}$. Наявність перетворення координат хоча й незначно ускладнює вимірювальну частину сервосистеми, але дозволяє спростити вигляд функції перемикачів $f_1(y)$ для представлення її у контролері та наблизити її вид до тих, що пропонуються у [12, 13]. Завдання контролера перевести координати об'єкта керування в область Ω , яка за формою є еліпсоїдом. При цьому керування є наближеним до оптимального, якщо координати об'єкта керування зафіксовано в Ω , то вони утримуються завдяки пропорційному закону керування (друге рівняння в (16)).

Моделювання. Для об'єкта керування з параметрами $k=1$, $a=2$, $b=1$ проводилася експериментальна перевірка працездатності закону керування (10)-(15) при різних початкових умовах. Траєкторії x , \dot{x} , \ddot{x} реальних координат об'єкта керування (1) при його русі з початкового стану $(3, 1, 0)$ до області Ω надані на рис. 4-6. На рис. 4 представлені змінні $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $u(t)$, що характеризують рух об'єкта керування в часовій площині з законом керування (16), на рис. 5 представлені змінні x_1 , x_3 , а на рис. 6 – змінні x_2 , x_3 для того ж самого руху в фазовій площині, що представлений на рис. 4 а)-г). Вибір закону керування у вигляді (16) дозволяє отримати мінімально можливий час регулювання об'єктом керування при різних початкових умовах. Закон керування має три інтервали керування. Область досягнення Ω : $x^T P x = \kappa$, $\kappa=0,005$, де $P > 0$ позитивно-визначена матриця.

В процесі керування фазові координати приходять до області Ω та залишаються там, як і повинно бути.



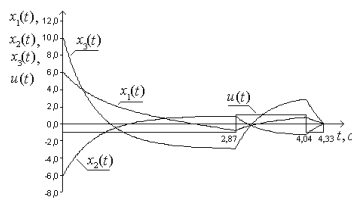


Рис. 4 а)-з) Змінні x_1, x_2, x_3, u в часовій площині

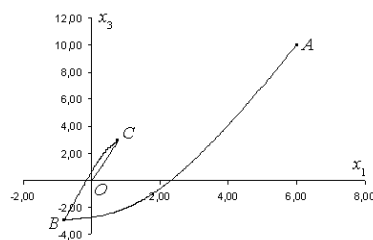


Рис. 5 а)-з) Змінні x_1, x_3 в фазовій площині

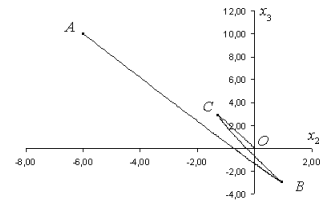


Рис. 6 а)-з) Змінні x_2, x_3 в фазовій площині

Висновки. Представлений нелінійний закон керування виду (10)-(15) забезпечує перевід об'єкта третього порядку (1), що має один нуль та два ненульових полюси, з довільного початкового стану до області досягнення Ω за відсутності завад. При цьому регулятор із запропонованим законом керування, реалізує субоптимальне за часом керування в системі з об'єктом керування (1), що забезпечує не більш як три інтервали керування та мінімальний можливий час при попаданні до області Ω , що відповідає теоремі про n -інтервалів. Відрізняювальними особливостями алгоритму керування є введення області Ω , де діє інший закон керування, що дозволяє уникнути межового циклу в околиці початку координат, яким може бути, наприклад, пропорційний.

Основні ідеї цієї статті можуть бути застосовані при створенні регуляторів для об'єктів третього порядку з дійсними коренями, враховуючи зміни виду функції перемикання в законі керування. Подальші дослідження планується зосередити на побудову закону керування в умовах завад.

Список літературних джерел

1. Красовский А.А. Основы автоматки и технической кибернетики / Красовский А.А., Поспелов В.Г. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1962. – 600 с.
2. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления / Болтянский В.Г. – М.: Наука, 1969. – 408 с.
3. Математическая теория оптимальных процессов / [Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко]. – [4-е изд.] – М.: Наука, 1983. – 392 с.
4. Антомонов Ю.Г. Автоматическое управление с применением вычислительных машин / Антомонов Ю.Г. – Л.: Судпромгиз, 1962. – 484 с.
5. Фельдбаум А.А. Вычислительные устройства в автоматических системах / Фельдбаум А.А. – М.: Физматгиз, 1959. – 800 с.
6. Смольников Л.П. Синтез квазиоптимальных систем автоматического управления / Смольников Л.П. – Л.: Энергия, 1967. – 168 с.
7. Справочник по теории автоматического управления / [Александров А.Г., Артемьев В.М. и др.]; под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука, 1987. – 712 с.
8. Кучеров Д.П. Об адаптивном управлении инерционной системой второго порядка, субоптимальной по быстродействию / Д.П. Кучеров // Наук. пр. ДонНТУ. – Вип. 48. – Донецьк: ДонНТУ, 2002. – С. 63-69.
9. Кучеров Д.П. Алгоритм обучения субоптимальному по быстродействию управлению динамической системой второго порядка без нулевых полюсов / Д.П. Кучеров // Автоматика. Автоматизация. Электротехнические комплексы и системы. – 2004. – № 2 (14). – С. 169-176.
10. Кучеров Д.П. Адаптивное терминальное управление динамическим объектом, квазиоптимальное по быстродействию / Д.П. Кучеров // Вестник СевГТУ: Автоматизация процессов и управление: сб. науч. тр. – Вып. 72. – Севастополь: СевНТУ, 2006. – С.52-58.
11. Ким Д.П. Синтез оптимальных по быстродействию непрерывных линейных регуляторов / Ким Д.П. // Автоматика и телемеханика. – №3. – 2009. – С. 5-14.
12. Pao L.Y. Proximate time-optimal control of third-order servomechanisms / Pao L.Y., Franklin G.F. // IEEE Transactions on Automatic Control. – vol.38. – № 4. – 1993. – P. 560-580.
13. Kaylor M. Design of continuous time controllers having almost minimum time response // Transactions of the ASME. – Vol. 124. – June. – 2002. – P. 252-260.