УДК 681.513.625

С.А. Положаенко, д.т.н., профессор
Д.Є. Контрерас, к.т.н., доцент

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ ОБЪЕКТОВ В ВИДЕ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ

Одесский национальный политехнический университет

Предложены математические модели (ММ) класса физических объектов и процессов с выраженным направленным действием в виде вариационных неравенств. Разработан метод численной реализации данных ММ на основе применения оптимизационной процедуры метода максимума функции Гамильтона.

***Ключевые слова**: математическая модель. Вариационное неравенство, метод оптимизации, принцип максимума, минимизация функционала.*

Анализ физических явлений, характерных для класса физических процессов с явно выраженным направленным действием (например, распространение волн различной природы в неоднородных средах, деформация элементов механических систем переменной структуры, фильтрация высокопарафинистых нефтей в пластах с частичной проводимостью границ и т.д.), обусловливает возможность рассмотрения в качестве адекватного математического описании этих процессов аппарат вариационных неравенств [1 - 4].

В работе [5] получена и обоснована обобщенная математическая модель (ММ) для исследуемого класса процессов, которая в терминах теории вариационных неравенств может быть представлена в следующем виде.

Пусть функция $\psi(t,\overline{z})$, определенная на ограниченном открытом множестве Ω пространства $\Re^n$, $n=1,2$, с гладкой границей Γ и интервале времени $(0,T)$ для $T<\infty$, $Q=\Omega\times(0,T)$, $\Sigma=\Gamma\times(0,T)$ является решением вариационного неравенства

$$\psi\in K:\left(m(\overline{z})\frac{\partial\psi}{\partial t}, v-\psi\right)+\left(B(\gamma)\psi, v-\psi\right)+j(v)-j(u)\geq\left(f, v-\psi\right)\forall v\in H^1(\Omega) \tag{1}$$

с начальным условием $\psi(0,\overline{z})=\psi_0(\overline{z})$, (2)

где оператор $e(\gamma)$ задает линейное преобразование $e(\gamma):H^1(\Omega)\to H^1(\Omega)$ и определен билинейной формой $\left(B(\gamma)\psi, v-\psi\right)=\int\limits_{\Omega}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial\psi}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial(v-\psi)}{\partial z_i}\right)d\overline{z}$, (3)

f — вынуждающая функция процесса, для которой операция $\left(f, v-\psi\right)$ совпадает со скалярным произведением в $L^2(\Omega)$, т.е. $\left(f, v-\psi\right)=\int\limits_{\Omega}\left[f(\overline{z}), v-\psi\right]d\Omega$ или $\left(f, v-\psi\right)=\int\limits_{\Gamma}\left[f(\overline{z}), v-\psi\right]d\Gamma$ (далее, для простоты изложения, ограничимся рассмотрением задач на границе Γ);

$j(\cdot)$ — выпуклые функционалы, определяющие вид физического процесса реологии и которые заданы следующим образом $j(\cdot)=\int\limits_{\Gamma}\varphi(\psi,\overline{z})\cdot\lambda(\psi)d\Gamma$, (4)

В соотношении (4) принято, что $\varphi(\cdot)$ — непрерывная функция, $\lambda(\cdot)$ — непрерывная дифференцируемая или не обладающая свойством дифференцируемости функция.

Пространства допустимых функций для $\varphi(\cdot)$ и $\lambda(\cdot)$ определяются как $\Delta\in L^{\infty}(\overline{Q}),\Lambda\in L^{\infty}(\overline{Q})$, причем предполагается, что $\varphi(\cdot),\lambda(\cdot)\in L^{\infty}(\overline{Q})$, $\overline{Q}=\overline{\Omega}\times(0,t_k)$, а пространства Δ и Λ являются банаховыми относительно нормы $\left\|\varphi(\psi,\overline{z})\right\|_{\Delta}=\left\|\varphi(\psi,\overline{z})\right\|_{L^{\infty}(\overline{Q})}$

Предлагаемый метод решения вариационного неравенства вида (1), (2) основан на доказательстве следующего утверждения:

Для отыскания оптимального решения $\psi(t,\overline{z})$ вариационного неравенства (1), (2) необходимо существование такой ненулевой непрерывной функции $p(t,\overline{z})$, чтобы в любой момент времени t в интервале $0\leq t\leq T$ (T — время протекания физического процесса) функция Гамильтона $\widetilde{H}$ в пространственной области Ω (или на ее границе Γ) принимала бы максимальное значение, где

$$\widetilde{H} = \rangle\left(\left(B(\gamma)\widetilde{\psi}, \widetilde{v} - \widetilde{\psi}\right) + \phi(\widetilde{v}) - \phi(\widetilde{\psi}) - \left(\theta(\widetilde{\psi}, \widetilde{v}), \widetilde{v} - \widetilde{\psi}\right) - \left(f, \left(\widetilde{v} - \widetilde{\psi}\right)\right)\right), \widetilde{p}$$

Предварительно выполним ряд преобразований, позволяющих упростить исходную постановку задачи. Введем обозначения

$$\varphi(t, \bar{z}) \cdot \lambda(\psi) = \Phi(\psi), \ \varphi(t, \bar{z}) \cdot \lambda(v) = \Phi(v)$$

и

$$\phi(\psi) = \int_{\Gamma} \Phi(\psi) d\Gamma, \ \phi(v) = \int_{\Gamma} \Phi(v) d\Gamma .$$

Кроме того, введем в рассмотрение дополнительную неизвестную функцию $\theta(\psi, v)$, по структуре отвечающую функционалам $j(\cdot)$ такую, что $(\theta(\psi, v), v - \psi) \geq 0 \forall v \in K$.

С учетом выполненных преобразований соотношения (1), (2) представим в виде

$$\psi \in K: \left(m(\bar{z})\frac{\partial \psi}{\partial t}, v - \psi\right) + \left(B(\gamma), v - \psi\right) + \phi(v) - \phi(\psi) - \left(\theta(\psi, v), v - \psi\right) = \left(f, v - \psi\right) \forall v \in K \quad (5)$$

$$\psi(0, \bar{z}) = \psi_0(\bar{z}), \quad (6)$$

Для решения поставленной задачи нахождения функции состояния $\psi(t, \bar{z})$ воспользуемся оптимизационной процедурой принципа максимума Понтрягина [6], для которой выберем следующий критерий качества $J = \min \int_{\Gamma} \int_0^T |v - \psi| \quad dt d\Gamma$. (7)

Физический смысл приведенного критерия вытекает из следующего. Пробная функция $v(t, \bar{z})$ является некоторым приближением искомой функции $\psi(t, \bar{z})$, отражая лишь суть физики конкретного процесса. Поэтому адекватность протекания физических процессов, обусловленных действием функций $v(t, \bar{z})$ и $\psi(t, \bar{z})$, обеспечивается с точностью до разницы между указанными функциями. При этом интегральную разницу между пробной $v(t, \bar{z})$ и искомой $\psi(t, \bar{z})$ функциями можно рассматривать как количественную меру или штраф за отклонение фактического протекания процесса от его истинного значения.

Получим необходимые условия оптимальности задачи (5), (6), (7).

Согласно [6] введем новую координату $\dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial t \partial z} = |v - \psi|\|_{z \in \Gamma}$. (8)

Таким образом, исходная задача будет рассматриваться в $(n+1)$- мерном пространстве с уравнением динамики

$$\widetilde{\psi} \in K: \left(m(\bar{z})\frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial t}, \widetilde{v} - \widetilde{\psi}\right) + \left(B(\gamma), \widetilde{v} - \widetilde{\psi}\right) + \phi(\widetilde{v}) - \phi(\widetilde{\psi}) - \left(\theta(\widetilde{\psi}, \widetilde{v}), \widetilde{v} - \widetilde{\psi}\right) = \left(f, \widetilde{v} - \widetilde{\psi}\right) \forall \widetilde{v} \in K \quad (9)$$

где $\widetilde{\psi} = (\sigma, \psi_1, ..., \psi_n)$, $\quad v = (\sigma, v_1, ..., v_n)$ при начальных условиях $\widetilde{\psi}(0, \bar{z}) = [0, \psi_0(\bar{z})]$.

Предположим, что найдено $\psi(t, \bar{z})$. Этому условию соответствует соотношение

$$\min \int_{\Gamma} \int_0^T |\widetilde{v} - \widetilde{\psi}| dt d\Gamma \to J_{\min} = J^* .$$

В момент времени $t = \tau (0 \leq \tau \leq T)$ выполним игольчатую вариацию длительностью ε. В результате выполненной вариации изменится значение функционала J (2.50)

$$\mathfrak{F} = \int_{\Gamma} \int_0^T |\widetilde{v} - \widetilde{\psi}| dt d\Gamma > J_{\min} .$$

Запишем подробнее результат вариации

$$\delta \widetilde{v} = \widetilde{v} - \widetilde{\psi} = \varepsilon \{ [(B(\gamma)\widetilde{\psi}, \widetilde{v} - \widetilde{\psi}) + \phi(\widetilde{v}) - \phi(\widetilde{\psi}) - (\theta(\widetilde{\psi}, \widetilde{v}), \widetilde{v} - \widetilde{\psi}) - (f, (\widetilde{v} - \widetilde{\psi}))] -$$
$$- (B(\gamma)\widetilde{\psi}, \widetilde{\psi}) + \phi(\widetilde{\psi}) - (\theta(\widetilde{\psi}), \widetilde{\psi}) - (f, \widetilde{\psi}) \}_{t = \tau} . \quad (10)$$

Выразим $\widetilde{v}$ через вариацию и оптимальную функцию состояния

$$\widetilde{v} = \widetilde{\psi} + \delta \widetilde{v} . \quad (11)$$

Подставляя (11) в (9) получим

$$\tilde\psi \in K:\ \left(m(\bar z)\frac{\partial\tilde\psi}{\partial t},(\tilde\psi+\delta\tilde v)-\tilde\psi\right) = \left(B(\gamma)\tilde\psi,(\tilde\psi+\delta\tilde v)-\tilde\psi\right)+\phi(\tilde\psi+\delta\tilde v)-\phi(\tilde\psi)-$$

$$-\left(\theta(\tilde\psi,(\tilde\psi+\delta\tilde v)),(\tilde\psi+\delta\tilde v)-\tilde\psi\right)-\left(f,(\tilde\psi+\delta\tilde v)-\tilde\psi\right)\forall\tilde v\in K, \qquad (12)$$

Для дальнейших преобразований используем покоординатный аналог (12)

$$\tilde\psi_i \in K:\ \left(m(\bar z_i)\frac{\partial\tilde\psi_i}{\partial t},(\tilde\psi_i+\delta\tilde v_i)-\tilde\psi_i\right) = \left(B(\gamma)\tilde\psi_i,(\tilde\psi_i+\delta\tilde v_i)-\tilde\psi_i\right)+\phi(\tilde\psi_i+\delta\tilde v_i)-\phi(\tilde\psi_i)-$$

$$-\left(\theta(\tilde\psi_i,(\tilde\psi_i+\delta\tilde v_i)),(\tilde\psi_i+\delta\tilde v_i)-\tilde\psi_i\right)-\left(f,(\tilde\psi_i+\delta\tilde v_i)-\tilde\psi_i\right)\forall\tilde v_i\in K,$$

$$i=0,1,...,n \qquad (13)$$

Разложим (13) в ряд Тейлора и ограничим рассмотрение величинами 1-го порядка малости

$$m(z_i)\left(\frac{\partial\tilde\psi_i}{\partial t}+\frac{\partial\tilde v_i}{\partial t}\right)=\left(B(\gamma)\tilde\psi_i,\tilde\psi_i\right)+\phi(\tilde\psi_i)-\left(f,\tilde\psi_i\right)+\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial\left[\left(B(\gamma)\tilde\psi_i,\tilde\psi_i\right)_i+\phi(\tilde\psi_i)-\left(f,\tilde\psi_i\right)\right]}{\partial\tilde v_i}\delta\tilde v_i,\ i=0,1,...,n\ .(14)$$

Из (14) следует, что $$m(z_i)\frac{\partial\tilde v_i}{\partial t}=\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial\left[\left(B(\gamma)\tilde\psi_i,\tilde\psi_i\right)+\phi(\tilde\psi_i)-\left(f,\tilde\psi_i\right)\right]}{\partial\tilde v_i}\delta\tilde v_i,\ i=0,1,...,n\ . \qquad (15)$$

Обратимся теперь к моменту времени $t=T$. Определим вариацию функционала в момент времени $t=T$, $\delta J_{t=T}=Ѓ-J_{min}>0$ или $-\delta J_{t=T}=-\delta\sigma_{Њ=Ѓ}\le 0$

Введем переменную $\tilde p(t,\bar z)$ таким образом, чтобы при $t=T$ выполнялось условие

$$-\delta J_{t=T}=-\delta\sigma(T)=\rangle\delta\tilde v,\tilde p\langle_{t=T}\,. \qquad (16)$$

Покоординатный аналог (16) выглядит следующим образом $-\delta J_{t=T}=-\delta\sigma(T)=\rangle\delta\tilde v_i,\tilde p_i\langle_{t=T}, i=0,1,...,n$.

Так как $\delta\sigma(T)>0$, то для того, чтобы выполнялось последнее соотношение, должно иметь место: $p^0(T,\bar z_i)=-1; p_j(T,\bar z)=0$, где $i=0,1,...,n; j=1,...,n$. Таким образом, если оптимальное решение не найдено, то $-\delta J<0$, а для оптимального решения справедливо $-\delta J=0$, поскольку для оптимального решения вариация функционала должна быть равна нулю.

Свяжем переменную $\tilde p(t,\bar z)$ с уравнением динамики исследуемого процесса через пробную функцию $v(t,\bar z)$. Найдем такую переменную $\tilde p(t,\bar z)$, которая удовлетворяет условию

$$\rangle\delta\tilde v(t,\bar z),\tilde p(t,\bar z)\langle=\rangle\delta\tilde v(T,\bar z),\tilde p(T,\bar z)\langle_{\tau+\varepsilon\le t\le T}=const\,.$$

Тогда справедливо $$\frac{\partial}{\partial t}\rangle\delta\tilde v(t,\bar z),\tilde p(t,\bar z)\langle=\left\rangle\frac{\partial\delta\tilde v(t,\bar z)}{\partial t},\tilde p(t,\bar z)\right\langle+\left\rangle\frac{\partial v\tilde p(t,\bar z)}{\partial t},\delta\tilde v(t,\bar z)\right\langle_{\tau+\varepsilon\le t\le T}=0 \quad (17)$$

Покоординатный аналог (17) имеет вид

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial\delta\tilde v_i(t,\bar z)}{\partial t},\tilde p_i(t,\bar z)+\sum_{i=0}^{n}\delta\tilde v_i(t,\bar z)\frac{\partial\tilde p_i\tilde v_i(t,\bar z)}{\partial t}=0\,,\ i=0,1,...,n\ . \qquad (18)$$

Подставим в (18) значение производной $\frac{\partial\delta\tilde v(t,\bar z)}{\partial t}$ из (15)

$$m(z_i)\sum_{i=0}^{n}\tilde p_i\cdot\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial\left[\left(B(\gamma)\tilde\psi_i,\tilde\psi_i\right)+\phi(\tilde\psi_i)-\left(f,\tilde\psi_i\right)\right]}{\partial\tilde v_i}\delta\tilde v_i+\sum_{i=0}^{n}\delta\tilde v_i\,\frac{\partial\tilde p}{\partial t}=0,\ i=0,1,...,n\ . \qquad (19)$$

Изменим порядок суммирования в (2.62)

$$m(z_i)\sum_{i=0}^{n}\delta\tilde v_i+\left[\sum_{i=0}^{n}\tilde p_i\frac{\partial\left[\left(B(\gamma)\tilde\psi_i,\tilde\psi_i\right)+\phi(\tilde\psi_i)-\left(f,\tilde\psi_i\right)\right]}{\partial\tilde v_i}+\frac{\partial\tilde p_i}{\partial t}\right]=0\,,\ i=0,1,...,n\ .$$

Тогда окончательно получим $$\frac{\partial\tilde p_i}{\partial t}=-\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial\left[\left(B(\gamma)\tilde\psi_i,\tilde\psi_i\right)+\phi(\tilde\psi_i)-\left(f,\tilde\psi_i\right)\right]}{\partial\tilde v_i}\tilde p_i\,,\ i=0,1,...,n\ .$$

Заметим, что последнее уравнение является сопряженным к (5), а переменная $\tilde p(t,\bar z)$ выражена через функцию состояния.

Вновь обратимся к вариации функционала (7) в момент времени $t=T$ $-\delta J_{t=T}=\rangle\delta\tilde v(t,\bar z),\tilde p(t,\bar z)\langle_{t=T}=0$.

Заменим вариацию $\delta\tilde v$ значением (10), сократим на ε и, поскольку τ может быть любым, получим

$$\rangle\left(\left(B(\gamma)\tilde{\psi},\tilde{v}-\tilde{\psi}\right)+\phi(\tilde{v})-\phi(\tilde{\psi})-\left(\theta(\tilde{\psi},\tilde{v}),\tilde{v}-\tilde{\psi}\right)-\left(f,\left(\tilde{v}-\tilde{\psi}\right)\right)\right),\tilde{p}\langle_{t=\tau}-\rangle\left(\left(B(\gamma)\tilde{\psi},\tilde{\psi}\right)+\phi(\tilde{\psi})-\left(f,\tilde{\psi}\right)\right),\tilde{p}\langle_{t=T}=0 \quad (20)$$

Из (20) следует, что второе слагаемое в нем соответствует оптимальному решению вариационного неравенства (5). В том случае, когда оптимальное решение $\psi(t,\bar{z})$ найдено, вариация функционала J будет равна нулю, т.е. $\delta J=0$. Учитывая это, первое слагаемое в (20), определяемое функцией Гамильтона $\tilde{H}=\rangle\left(\left(B(\gamma)\tilde{\psi},\tilde{v}-\tilde{\psi}\right)+\phi(\tilde{v})-\phi(\tilde{\psi})-\left(\theta(\tilde{\psi},\tilde{v}),\tilde{v}-\tilde{\psi}\right)-\left(f,\left(\tilde{v}-\tilde{\psi}\right)\right)\right),\tilde{p}\langle$ (21) должно принимать максимальное значение. Тем самым вышеприведенное утверждение доказано. Покажем возможность определения максимального значения функции Гамильтона.

Покоординатный аналог (21) определяется выражением

$$\tilde{H}=\rangle\left(\left(B(\gamma)\tilde{\psi}_i,\tilde{v}_i-\tilde{\psi}_i\right)+\phi(\tilde{v}_i)-\phi(\tilde{\psi}_i)-\left(\theta(\tilde{\psi}_i,\tilde{v}_i),\tilde{v}_i-\tilde{\psi}_i\right)-\left(f,\left(\tilde{v}_i-\tilde{\psi}_i\right)\right)\right),\tilde{p}\ \ i=0,1,...,n . \quad (22)$$

Для обеспечения максимального значения функции $\tilde{H}$ необходимо приравнять нулю все частные производные этой функции по пробной переменной $v(t,\bar{z})$, что с учетом (22) дает систему уравнений $\frac{\partial\tilde{H}}{\partial v_i}=0,\ \ i=0,1,...,n$. (23)

Покоординатный аналог (22) содержит $(n+1)$ функций v_i, $(n+1)$ функций θ_i и $(n+1)$ функций p_i. Поскольку уравнений (23) всего $(n+1)$, а неизвестных — $(3n+3)$, то система (23) не может быть решена. Для решения (23) определим также частные производные

$$\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\theta_i}=\tilde{p}_i,\ \ i=0,1,...,n . \quad (24)$$

$$\frac{\partial\tilde{H}}{\partial p_i}=\left[m(\bar{z}_i)\frac{\partial\tilde{\psi}_i}{\partial t},\tilde{v}_i-\tilde{\psi}_i\right],\ \ i=0,1,...,n . \quad (25)$$

В этом случае решение системы (23) может быть получено.

В результате выполненных рассуждений, схема алгоритма решения вариационного неравенства (5) с использованием принципа максимума может быть представлена следующим образом:

1. Записывается уравнение динамики (9) с учетом дополнительной координаты σ.

2. Составляется вспомогательная функция $\tilde{H}$ (функция Гамильтона) в соответствии с выражением (22).

3. Определяется пробная функция $v(t,\bar{z})$, доставляющая максимум функции $\tilde{H}$ в соответствии с выражением (23). Для доопределения независимых переменных θ и p система (23) дополняется уравнениями (24) и (25).

4. Искомая переменная $\psi(t,\bar{z})$ определяется значением пробной переменной $v(t,\bar{z})$, которая доставляет максимальное значение функции $\tilde{H}$.

Таким образом, предложен метод и реализующий его алгоритм решения класса вариационных неравенств, представляющих собой математические модели указанных выше физических процессов с явно выраженным направленным действием. Предложенный метод основан на использовании оптимизационной процедуры принципа максимума. Обоснован выбор критерия оптимальности при решении поставленной экстремальной задачи.

Список литературных источников

1. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике.- М.: Наука, 1980.- 383с.

2. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения.- М.: Мир. 1983.- 256с.

3. Панагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии.- М.: Мир, 1989.- 494с.

4. Бернадинер М.Г., Ентов В.М. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей.- М.: Наука, 1975.- 199с.

5. Положаенко С.А. Математические модели процессов течения аномальных жидкостей // Моделирование и информационные технологии. Сб. науч. тр.— К.: ИПМЭ, 2001.— Вып. 9.— С. 14 — 21.

6. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов . - М.: Физматгиз, 1961.- 352 с.