

УДК 62-752(031)

К.Я. Охрименко, к.т.н., почесн. проф. ЧДТУ
К. Eichhorn (К.К. Охрименко), к.т.н., доц.
А.В. Манзюра

УПРУГО-ДЕФОРМАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТЕЛ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Черкасский государственный технологический университет, г. Черкассы, fktm-email@ukr.net

Предложен теоретический метод исследования колебаний многопролётной балки постоянного и переменного сечений на упругих опорах в виде винклерового основания при определении форм и частот колебаний.

Ключевые слова: частота, формы колебаний, многопролётная балка, интегрирование, упругие опоры, переменное, постоянное сечение.

Вступление

В работе разработан метод теоретического расчёта формы и частот собственных колебаний многопролётной балки постоянного и переменного сечения на упругих опорах представляющих балку на винклеровом упругом основании. При этом балка представляет совокупность дискретных масс её участков и независимых линейных упругих элементов пружин. Колебания многопролётной балки переменного и постоянного сечений на упругих опорах рассматриваются с учётом собственного веса, дополнительного действия внешних сосредоточенных грузов, упругих связей в виде жёсткости пружин и их массы.

Анализ исследований и публикаций

Известно, какое большое значение имеют различные исследования задач контактной прочности в современном машиностроении. Статические и динамические контактные перемещения играют существенную роль для оценки точности положения рабочих органов на упругом основании, что в свою очередь влияет на колебания и динамические нагрузки, концентрацию и распределение давлений в зоне контакта сопряжённых элементов [1]. Роль контактных перемещений в балансе упругих перемещений с учётом собственной жёсткости элементов может достигать значительных величин до 80-90% на примере положения суппортов, столов на направляющих металлорежущих станков, а для ползунов, карусельных станков 40-70%. Для реальных поверхностей контактные деформации достигают значительных значений при площади номинального контакта более 150 см² [2]. Согласно работе [1], контактные перемещения, в частности, для направляющих станков составляют 1 мкм на каждые 0,1 МПа. В ряде исследований контактные поверхности рассматриваются для реальных тел как случайные поля микрорельефа поверхности с использованием спектральной теории и взаимного влияния деформации отдельных микровыступов. В частности в некоторых работах, рассматриваются исследования точности положения подвижных узлов на направляющих [3], связанные с изготовлением и износом сопряжённых поверхностей.

Совокупность известных исследований упруго-деформационной задачи взаимодействия тел на упругом основании в значительной степени зависит от решения задачи в динамической постановке при определении форм и частот колебаний, что и является предметом настоящего исследования.

Постановка задачи

Положения твёрдого тела на упругом основании позволяет рассматривать как статические задачи упруго-деформационного состояния сопряжённых элементов, так и динамические задачи, для определения динамических характеристик, в частности, частот и форм колебаний. Для обеспечения прочностных и точностных характеристик, увеличения ресурса работы контактного сопряжения необходимо выполнять статические, динамические расчёты, испытания на усталостную прочность элементов машин, включая пластины, направляющие станков, промышленных роботов и разработку испытательных стендов.

Расчётная схема пространственной задачи, в первом приближении, может быть рассмотрена как плоская задача в виде балки на упругом винклеровом основании, где пружинами характеризуются упругие связи контактирующих элементов. В качестве принятых допущений колебания

многопролётной симметричной балки рассматриваются как дискретные независимые упругие линейные элементы под действием изгибающего момента, перерезывающих сил балки и пружин, имитирующих упругие связи сопряжённых тел. Для расчёта формы и частот колебаний в работе использован метод последовательных приближений. В общей постановке, разработанный метод расчёта многопролётной балки переменной жёсткости на упругих опорах, имитирующих винклерово основание, позволяет рассматривать широкий класс задач различных исследований:

- динамической контактной задачи сопряжённых элементов, связанной с определением частот и форм собственных колебаний для балок переменного или постоянного сечения на упругих опорах, эквивалентных упругому винклеровому основанию.

- контактной задачи, связанной с изучением усталостной прочности элементов конструкции в условиях эксплуатации с учётом износа, посредством изменения упругости пружин, как в статическом состоянии сопряжённых элементов, так и подвижных узлов на упругих направляющих, а также разработке конструкций испытательных стендов.

- контактных перемещений деталей с идеальной и реальной поверхностью контакта, учитывающих микро- и макро геометрию поверхностей и местные отгибы сопряжённых элементов, которые влияют на точность позиционирования и положение исполнительного элемента на упругом основании.

Решение поставленной задачи

Для построения метода расчёта форм и частот собственных колебаний сопряжённых деталей контактной задачи полагаем, что система в нейтральном положении не испытывает усилий и деформаций. При введении упругих опор их коэффициент жёсткости подбираем так, чтобы форма колебаний и частота балки незначительно отклонялись от реального состояния.

С этой целью в качестве таких условий полагаем, что коэффициенты жёсткости приблизительно обратно-пропорциональны прогибам соответствующих точек балки

$$k_1 f_1 \cong k_2 f_2 \cong \dots \cong k_n f_n, \quad (1)$$

и удовлетворяют соотношению:

$$\frac{\sum_{i=1}^m k_i x_i^3}{(EI)_{cp} \ell} \cong 0,2 \dots 0,3, \quad (2)$$

где m – количество упругих опор на полуразмахе симметричной балки длиной ℓ ; k_i, x_i – коэффициенты жёсткости и координаты опор по длине балки; средняя жёсткость изгиба балки

$$(EI)_{cp} \cong \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} EI dx.$$

1. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки.

При решении задачи приняты следующие основные допущения: контактирующие участки рассматриваются как дискретные независимые массы балки и линейные упругие элементы пружины с учётом их массы, представляющие собой винклерово основание. Тогда задача сводится к упруго-деформационной задаче колебания балки на упругом основании.

Расчётная схема симметричной относительно оси y балки переменной или постоянной жёсткости $EI(x)$ и переменного погонного веса $h(x)$, покоящаяся на m упругих опорах представлена на рис.1. Балка нагружена S сосредоточенными грузами G_j , где j – номер груза.

Исходя из линейности упругих опор, представленных в виде пружин, с коэффициентами жёсткости k_i , где i – номер опоры. Вес каждой опоры G_i полагаем распределённым по длине пружины a_s по определённому закону, рис. 1. Решение задачи осуществляем приближённым методом для определения свободных колебаний как свободноплавающей системы на весомах упругих опорах переменной жёсткости. Таким образом, колебания многопролётной балки переменного сечения на упругих опорах должно быть подобным распределению изгибающего момента и поперечных сил по длине балки при колебаниях, соответствующих реальному положению её изогнутой оси. Такой подход позволяет исследовать форму и частоту собственных колебаний балки при задании численных значений параметров. Метод расчёта свободных колебаний балки с сосредоточенными грузами и упругими опорами, обеспечивающими совпадение распределения изгибающего момента M и перерезающей силы

Q для реальных состояний, аналогичен рассмотрению колебаний балки на упругом основании.

Расчёт формы и частоты колебаний выполняем методом последовательных приближений. Запишем дифференциальное уравнение изогнутой оси балки в виде [8]:

$$\frac{d^2}{dx^2} EI \frac{d^2 f}{dx^2} = q, \quad (3)$$

где $f(x)$ – прогиб сечения балки по длине; $q(x)$ – погонная нагрузка.

Для случая колебаний погонную нагрузку заменяем силой инерции погонной массы участка балки

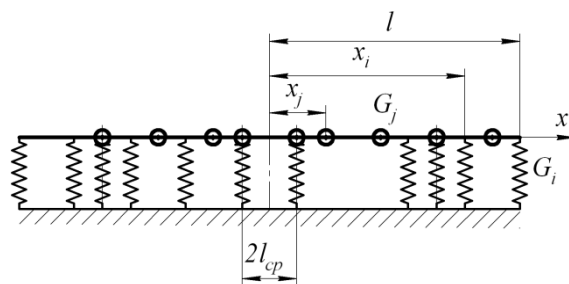


Рис. 1. Расчётная схема

$$q = -\frac{h}{g} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \quad (4)$$

где $h(x)/g$ – погонная масса; $f(x, t)$ – прогиб сечения балки x в момент времени t .

Пологая в виде гармонического процесс колебания, принимаем решение уравнение (4) для функции прогиба f в виде $\bar{f} = f \cdot \cos pt$, где $f = f(x)$ – функция координаты x , характеризующая форму колебаний; p – угловая частота свободных колебаний.

$$\partial^2 f / \partial t^2 = -fp^2 \cos pt. \quad (6)$$

Подставив ф. (6) в уравнение (4), получим:

$$q = p^2 \cdot h/g \cdot f \cdot \cos(pt), \quad (7)$$

откуда при $\cos pt = 1$, максимум погонной нагрузки ф. (7) будет соответствовать значению:

$$q_{\max} = p^2 \cdot h/g \cdot f. \quad (8)$$

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки при максимальной амплитуде колебаний с учётом ф. (8) будет:

$$\frac{d^2}{dx^2} EI \frac{d^2 f}{dx^2} = p^2 \frac{h}{g} f. \quad (9)$$

Проинтегрируем уравнение ф. (9), дополнив его членами уравнения учитывающих: упругость пружин, массы грузиков и пружин:

$$\frac{d}{dx} EI \frac{d^2 f}{dx^2} = p^2 \frac{h}{g} \left[\int_{\ell}^x hf dx + \sum_{\ell}^x G_i f_i \right] - \sum_{\ell}^x k_x f_x + \sum_{\ell}^x R_s + D, \quad (10)$$

где f_i, f_x – перемещения балки в местах расположения сосредоточенных грузов и опор.

Так как интеграл уравнения (9) с переменным верхним пределом выражает поперечную силу в сечении балки x , в его выражение вошли не только поперечные силы инерции распределённых и сосредоточенных масс балки, но и поперечная сила от сил инерции масс пружины $\sum_{\ell}^x R_s$ и постоянная интегрирования D . Определение $\sum_{\ell}^x R_s$ можно найти приближённо по формуле:

$$\sum_{\ell}^x R_s = \frac{p^2}{g} \sum_{\ell}^x \bar{G}_s f_s, \quad (11)$$

где \bar{G}_s – приведенный к балке вес пружины; $R_s = p^2/g \cdot \bar{G}_s \cdot f_s$ – это приведенная к точке крепления пружины сила инерции массы пружины.

Постоянную интегрирования D находим из граничных условий на конце балки. При $x = \ell$ все члены уравнения (10) для поперечных сил $Q(\ell)$ равны нулю, поэтому и постоянная интегрирования $D = 0$. Вводя обозначения поперечных сил в уравнение (10), получим:

$$Q(x) = \int_{\ell}^x hf \, dx + \sum_{\ell}^x G_i f_i; \quad Q_S(x) = \sum_{\ell}^x k_s f_s; \quad Q_R(x) = \sum_{\ell}^x G_s f_s, \quad (12)$$

$$\frac{d}{dx} EI \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{p^2}{g} [Q(x) + Q_R(x)] - Q_S(x). \quad (13)$$

Проинтегрировав уравнение (13)

$$EI \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{p^2}{g} \left[\int_{\ell}^x Q(x) dx + \int_{\ell}^x Q_R(x) dx \right] - \int_{\ell}^x Q_S(x) dx + C, \quad (14)$$

находим постоянную интегрирования C из граничных условий на конце балки при $x = \ell$. При одинаковых пределах интегрирования интегралы правой части уравнения (14) обращаются в нуль (изгибающий момент равен 0), поэтому и постоянная интегрирования $C = 0$. Учитывая, что члены правой части уравнения (14) представляют изгибающие моменты:

$$M(x) = \int_{\ell}^x Q(x) dx; \quad M_S(x) = \int_{\ell}^x Q_S(x) dx; \quad M_R(x) = \int_{\ell}^x Q_R(x) dx, \quad (15)$$

перепишем уравнение (14) в виде:

$$EI \cdot d^2 f / dx^2 = p^2 / g \cdot [M(x) + M_R(x)] - M_S(x). \quad (16)$$

Разделив (16) на EI и проинтегрировав, получим:

$$\frac{df}{dx} = \frac{p^2}{g} \left[\int_{\ell}^x \frac{M(x)}{EI} dx + \int_{\ell}^x \frac{M_R(x)}{EI} dx \right] - \int_{\ell}^x \frac{M_S(x)}{EI} dx + B. \quad (17)$$

Постоянная интегрирования B определяется из граничных условий симметрии балки при $x = 0$, где угол поворота сечения балки от любых сил равен нулю. Окончательно $B = 0$. Вводя

новые обозначения
$$\Theta(x) = \int_{\ell}^x \frac{M}{EI} dx; \quad \Theta_S(x) = \int_{\ell}^x \frac{M_S}{EI} dx; \quad \Theta_R(x) = \int_{\ell}^x \frac{M_R}{EI} dx, \quad (18)$$

$$df/dx = p^2/g \cdot [\Theta(x) + \Theta_R(x)] - \Theta_S(x). \quad (19)$$

Последующее интегрирование уравнение (19), определяет выражение прогиба балки:

$$f = \frac{p^2}{g} \left[\int_{\ell}^x \Theta dx + \int_{\ell}^x \Theta_R dx \right] - \int_{\ell}^x \Theta_S dx + A, \quad (20)$$

где при:
$$\Phi(x) = \int_{\ell}^x \Theta dx; \quad \Phi_S(x) = \int_{\ell}^x \Theta_S dx; \quad \Phi_R(x) = \int_{\ell}^x \Theta_R dx, \quad (21)$$

$$f(x) = \frac{p^2}{g} [\Phi(x) + \Phi_R(x)] - \Phi_S(x) + A. \quad (22)$$

Уравнение (22) выражает уравнение изогнутой оси балки при колебаниях, где A – постоянная интегрирования. С учётом принципа суперпозиции прогиб балки при колебаниях состоит из алгебраической суммы трёх прогибов, два из которых от сил инерции масс балки $\Phi(x)p^2/g$ и сил инерции масс пружин $\Phi_R(x)p^2/g$, зависящих от частоты, и третий прогиб от сил реакции пружин $\Phi_S(x)$, независящих от частоты. Для определения постоянной, интегрирования A граничных условий оказывается не достаточно, поэтому дополнительно воспользуемся условием динамического равновесия поперечных сил.

2. Уравнение равновесия поперечных сил. Уравнение равновесия проекций всех сил на ось y , действующих на балку при колебаниях, как и для случая действия максимальных сил при выводе уравнения изогнутой оси балки, когда рассматривалось максимальное перемещение $f(x)$, без учёта времени процесса, имеет вид:

$$\sum P_y = \frac{p^2}{g} \left[\int_{\ell}^0 hf \, dx + \sum_{\ell}^0 G_i f_i \right] - \sum_{\ell}^0 k_s f_s + \frac{p^2}{g} \sum_{\ell}^0 \bar{G}_s f_s = 0. \quad (23)$$

Обозначения уравнения (23) аналогичны уравнениям (10) и (11). Уравнение (23) справедливо для колебаний каждой из половин симметричной балки. Вводя в уравнение (23) значения прогиба $f(x)$ по формуле (22), в котором все члены правой части, кроме p^2 и A известны, выражение изгиба балки представим в виде двух уравнений:

$$f(x) = y(x) + A, \quad (24)$$

$$y(x) = p^2/g \cdot [\Phi(x) + \Phi_R(x)] - \Phi_s(x). \quad (25)$$

Так как выражения $\Phi(x)$, $\Phi_R(x)$, $\Phi_s(x)$ правой части уравнения (25) определены согласно решения уравнений (21), (22), неизвестной остаётся только величина p^2 . Полагаем, что p^2 известна, тогда в уравнении (24) неизвестна будет величина A . Подставим (24) в уравнение (23) и выполнив преобразования, получим:

$$\frac{p^2}{g} \left[\int_{\ell}^0 hf \, dx + \sum_{\ell}^0 G_i y_i + \sum_{\ell}^0 \bar{G}_s y_s \right] - \sum_{\ell}^0 k_s y_s + A \left[\frac{p^2}{g} \left(\frac{1}{2} G_c + \sum_{\ell}^0 G_s \right) - \sum_{\ell}^0 k_s \right] = 0, \quad (26)$$

где общий вес балки со всеми грузиками G_c определяется соотношением: $\frac{1}{2} G_c = \int_{\ell}^0 h \, dx - \sum_{\ell}^0 G_i$. Уравнение (26) – это уравнение поперечных сил балки, необходимое для определения постоянной интегрирования A в уравнении (22).

3. Определение формы и частоты методом последовательных приближений.

Для определения первого тона собственных колебаний симметричной балки достаточно иметь два уравнения (22) и (26). Для начального приближения используем форму изогнутой оси балки, которую зададим в качестве необходимой. Пусть необходимо получить форму кривой изогнутой оси балки конструктивного исполнения при проектировании или её вид при стендовых испытаниях. Тогда функцию формы $f(x)$ можно определить из дифференциального уравнения изогнутой оси балки

$$M(x) = EI(x) \cdot d^2 f / dx^2, \quad (27)$$

в виде:

$$f(x) = \int_0^x \int_0^x \frac{M}{EI} dx^2 + A. \quad (28)$$

При табличном методе численного интегрирования за исходное приближение можно принять $A_0 = 0$, когда предугадать величину этого приближения A затруднительно. Затем полученную в табличной форме функцию $f_0(x)$ нужно пронормировать так, чтобы $f_0(\ell) = 1$, т.е. привести её к безразмерному виду. Для этого используем отношение $f_0(x)/f_0(\ell)$. Подставляя безразмерные значения f_0 в уравнении (22) и имея значения жёсткостей упругих опор k_s и приведенные веса этих опор G_s , вычисляем в табличной форме $Q(x)$, $Q_R(x)$, $Q_s(x)$. Продолжая вычисления по формуле (15), находим $M(x)$, $M_R(x)$, $M_s(x)$ затем, разделяя эти значения на жёсткости балки $EI(x)$, по формуле (18) определяем $\Theta(x)$, $\Theta_R(x)$, $\Theta_s(x)$; и окончательно по формуле (21) определяем $\Phi(x)$, $\Phi_R(x)$, $\Phi_s(x)$. Значения последних функций для $x = \ell$ подставляем в уравнение (22), левая часть которого $f(\ell) = 1$. Тогда (22) примет вид:

$$1 = p^2/g \cdot [\Phi(\ell) + \Phi_R(\ell)] - \Phi_s(\ell) + A. \quad (29)$$

Откуда частота колебаний

$$p^2 = g(1 + \Phi_s(\ell) - A)/(\Phi(\ell) + \Phi_R(\ell)). \quad (30)$$

В этой формуле известны все величины, кроме p^2 и A . Для определения A используем формулу (26). Введём обозначения для некоторых членов уравнения (26):

$$\bar{Q}(0) = \int_{\ell}^0 h y \, dx + \sum_{\ell}^0 G_i f_i; \quad \bar{Q}_s(0) = \sum_{\ell}^0 k_s y_s; \quad \bar{Q}_R(0) = \sum_{\ell}^0 G_s y_s. \quad (31)$$

Ети величини вычисляются подобно вычислениям $Q(x), Q_R(x), Q_S(x)$ только вместо значений $f(x)$ нужно брать значения $y(x)$. Ход вычисления остальных членов уравнения (26) рассмотрен ранее и не требует пояснений. Уравнение (26) удобно записать в виде:

$$A = \frac{\frac{p^2}{g} [\bar{Q}(0) + \bar{Q}_R(0)] - \bar{Q}_S(0)}{\frac{p^2}{g} \left[\frac{1}{2} G_c + \sum_{\ell}^0 G_s \right] - \sum_{\ell}^0 k_s}. \quad (32)$$

Систему уравнений (30) и (32) наиболее просто решать методом итерации, приняв начальное приближение $A^{(0)} = 0$ или какое либо предполагаемое приближённое значение. Так, для конструкций самолётов с крылом большого удлинения $A \approx -0,1f(\ell)$. Находя p^2/g из уравнения (30) и подставив его в ф. (25), вычислим значение $y(x)$. Подставив значения $y(x)$ в ф.(31), определяем значения $Q(0), Q_R(0), Q_S(0)$. Подставляем эти величины в ф.(32) и вместо p^2/g найденное значение по ф.(30). Решая уравнение (32), в результате находим первое приближение $A^{(1)}$. Затем подставляем $A^{(1)}$ в ф. (30) и весь процесс повторяется до тех пор пока p^2 и A не совпадут достаточно точно со значениями предыдущих приближений. Полученные в результате решения уравнений (30) и (32) значения являются решением первого приближения (т.е. p_1^2, A_1). Дальнейший расчёт строится следующим образом. В первом приближении по ф.(22) вычисляются функции формы колебаний $f_1(x)$ при p_1^2, A_1 . Остальные члены уравнения (22) уже вычислены ранее для нулевого приближения функции формы $f_0(x)$. Полученные значения $f_1(x)$ необходимо пронормировать так, чтобы отношение $f_1(x)/f_1(\ell)$ определялось при $f_1(\ell)=1$. В дальнейшем весь расчёт повторяется вместо f_0 используем f_1 ; в результате получаем второе приближение p_2^2, A_2 затем определим $f_2(x)$ и т.д. Расчёт выполняется до тех пор, пока значения p^2, A и f не совпадут достаточно близко со значениями предыдущего вычисления. При табличном методе расчёта интегрирование выполняется методом трапеций. Обычно для итерационного метода решения задачи достаточно 2-х, 3-х приближений.

Выводы

Предложенный метод расчёта позволяет рассматривать различные варианты загрузки балки грузами или изменением жёсткости упругих пружин с учётом постоянного или переменного сечения собственной массы многопролётной балки на упругом основании, погрешностей изготовления реальных сопрягаемых поверхностей и других причин при получении форм и частот собственных колебаний.

Использование эквивалентности при имитации балки переменного сечения балкой постоянного сечения с грузиками, на дискретных участках, равносильно учёту масс участков балки переменного сечения упругими опорами (пружинами) разной жёсткости. Это позволяет в разной постановке задач решать вопросы разработки теоретических методов расчёта исходных динамических, статических и точностных характеристик конструкций, связанных с положением, износом и точностью позиционирования рабочих элементов, например, направляющих несущих систем металлорежущих станков и промышленных роботов, а также с решением прочностных задач и разработкой испытательных стендов различных несущих конструкций.

Список литературных источников

1. Решетов Д.Н. Работоспособность и надёжность деталей станков. – М.: Высш. шк., 1974. – 206 с.
2. Левина З.М. Решетов Д.Н. Контактная жёсткость машин. – М.: Машиностроение, 1971. – 264 с.
3. Портман В.Т., Генин Д.В., Халдей М.Б. Исследование точности положения подвижных узлов на направляющих. – М.: СТИН, 1993, №2. – С. 5-9.