УДК 681.518 (045)

Н.О. Лысуненко, академический советчик ИАУ

ВЫБОР ОБРАЗЦОВЫХ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ ПОВЕРКЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО КАНАЛА КООРДИНАТНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ МАШИНЫ

Национальный авиационный университет, Украина

В статье приведен аналитический обзор экспериментальных исследований выбора образцовых средств измерений и метода поверки для проведения метрологической аттестации измерительного канала координатно-измерительной машины. Отмечена зависимость вероятности получения достоверных результатов поверки от вида законов распределения погрешностей образцовых средств измерений и поверяемого средства измерений и их параметров. Показано, как повысить вероятность правильной поверки измерительного канала при соизмеримых погрешностях образцовых средств измерений и поверяемого средства измерений и априори неизвестных законах их распределения.

Ключевые слова: *координатно-измерительная машина, измерительный канал, поверка, метрологические характеристики, доверительные границы.*

Введение

Среди разнообразных задач, которые приходится решать при поверке измерительного канала (ИК) координатно-измерительной машины (КИМ), основное место занимает выбор образцовых средств измерений (ОСИ) и метода поверки.

Доверительную вероятность P оценок метрологических характеристик ИК при поверке можно представить в виде произведения $P_и$ инструментальной и $P_м$ методической вероятностей

$$P = P_и P_м = (1 - \alpha_и - \beta_и)(1 - \alpha_м - \beta_м), \quad (1)$$

где $\alpha_и, \beta_и, \alpha_м, \beta_м$ - вероятности инструментальной и методической ошибок первого и второго рода, обусловленные соответствующими погрешностями. До выпуска [1,2], было принято считать, что высокая вероятность $P_и$ получения достоверных результатов поверки будет гарантирована, если погрешности ОСИ пренебрежимо малы по сравнению с погрешностями поверяемого средства измерений (ПСИ).

Исследуем зависимость вероятности $P_и$ от вида законов распределения погрешностей ОСИ и ПСИ и их параметров, в том числе от нормированной доверительной вероятности ОСИ. Проанализируем повышение вероятности $P_и$ при соизмеримых погрешностях ОСИ и ПСИ и априори неизвестных законах распределения.

Предположим, что ИК, состоящий из большого количества функциональных элементов, можно рассматривать как единое целое, то есть как средство измерения (СИ), распределенное в пространстве и имеющее аналоговый вход и цифровой выход, позволяющий сопряжение с электронно-вычислительной машиной без преобразования [6]. Пусть метрологические характеристики ИК, подлежащие поверке, представлены в виде номинальных значений доверительных границ для суммарных погрешностей с нормированной доверительной вероятностью (1). Для обоснования выбора ОСИ необходимо выявить взаимосвязь между доверительными границами погрешностей ОСИ и ПСИ и нормированными доверительными вероятностями, частные аспекты представлены в [3,4].

Постановка задачи

Пусть при поверке СИ в одной из контролируемых точек на вход с выхода ОСИ поступает сигнал x. Введем обозначения: $f(x)$ - плотность распределения выходного сигнала ОСИ с математическим ожиданием m_x; $[m_x - \Delta_0, m_x + \Delta_0]$ - нормированный доверительный интервал погрешностей Δ_0 ОСИ; P_0 - нормированная доверительная вероятность для погрешностей ОСИ, равная

$$P_0 = \int\limits_{m_x - \Delta_0}^{m_x + \Delta_0} f(x)dx; \quad (2)$$

$f(y)$ - плотность распределения показаний ПСИ в контролируемой точке с математическим ожиданием m_y; $\Delta = y - x$ - погрешность ПСИ с математическим ожиданием $m_\Delta = m_x - m_y$;

$\varphi(\Delta)$ - плотность распределения погрешностей ПСИ в контролируемой точке. Будем считать, что случайные величины Δ и x независимы, систематическая погрешность ПСИ отсутствует, то есть $m_y = m_x = 0$.

Нормируемый доверительный интервал для погрешностей ПСИ $[-\Delta_c, \Delta_c]$ связан с доверительной вероятностью соотношением

$$P_c = \int_{-\Delta_c}^{\Delta_c} \varphi(\Delta) d\Delta. \tag{3}$$

Метрологически годным в контролируемой точке будем считать ПСИ, для которого соблюдается условие

$$P_c \geq P_c^{н}, \tag{4}$$

где $P_c^{н}$ - нормированная доверительная вероятность. Если (4) не выполняется, то ПСИ не может быть признано годным. Возникает необходимость определять P_c в процессе поверки и по ее значению выносить заключение о годности ПСИ.

Вероятность пребывания показаний ПСИ в интервале $[m_y - \Delta_c, m_y + \Delta_c]$ равна

$$P(A_y) = \int_{m_y - \Delta_c}^{m_y + \Delta c} f(y) dy, \tag{5}$$

плотности $f(y)$ и $\varphi(\Delta)$ связаны выражением

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y - \Delta) \varphi(\Delta) d\Delta. \tag{6}$$

Следующее утверждение справедливо, если $f(x)$ и $\varphi(\Delta)$ являются функциями плотности, то определенный интеграл (5) от свертки (6) этих функций всегда меньше определенного интеграла (3), взятого в тех же границах, что и (5), то есть

$$P(A_y) < P_c. \tag{7}$$

На практике при поверке зачастую приходится использовать ОСИ, погрешности которых соизмеримы с погрешностями ПСИ.

Отсюда вытекает следующая задача: необходимо исследовать взаимосвязь между $P(A_y)$, P_0, P_c, $P_c^{н}$ при различных законах $f(x)$ и $\varphi(\Delta)$ и их параметрах для нахождения граничных значений, с помощью которых можно было бы сформулировать неравенство, вытекающее из выражения (4), но уже не для P_c, а для $P(A_y)$. В (4) таким граничным значением является $P_c^{н}$.

Изложение основного материала

Рассмотрим инструментальную достоверность поверки. Пусть в результате однократной поверки с выхода ПСИ считано показание y. При этом возможны следующие события: A_x - величина x на выходе ОСИ находится в своем доверительном интервале с вероятностью

$$P(A_{\bar{x}}) = 1 - P_0; \tag{8}$$

A_y - показание y ПСИ находится в доверительном интервале $[m_y - \Delta_c, m_y + \Delta_c]$ с вероятностью $P(A_y)$; $A_{\bar{y}}$ - показания ПСИ находятся вне доверительного интервала с вероятностью $P(A_{\bar{y}})$.

Возможные следующие следующие попарные комбинации [3]: A_{xy}, $A_{x\bar{y}}$, $A_{\bar{x}\bar{y}}$. Эти события несовместны, образуют полную группу, следовательно сумма их вероятностей

$$P(A_{xy}) + P(A_{x\bar{y}}) + P(A_{\bar{x}y}) + P(A_{\bar{x}\bar{y}}) = 1. \tag{9}$$

Первые два слагаемых суммы (9) представляют собой величину $P_и$, то есть "инструментальную" вероятность события, состоящую в том, что годное средство измерения будет в процессе поверки признано годным, а негодное – негодным. Эту вероятность принято называть вероятностью верного заключения, которая в задачах поверки равна

$$P_и = P(A_{xy}) + P(A_{x\bar{y}}). \quad (10)$$

Остальные два слагаемых (9) представляют собой вероятность ошибочного заключения

$$P_{ош} = P(A_{\bar{x}y}) + P(A_{x\bar{y}}) = \beta_и + \alpha_и. \quad (11)$$

Величины $P(A_y)$ и $P(A_{\bar{y}})$ будут соответственно равны

$$P(A_y) = P(A_{xy}) + P(A_{\bar{x}y}); \quad (12)$$

$$P(A_{\bar{y}}) = P(A_{x\bar{y}}) + P(A_{\bar{x}\bar{y}}); \quad (13)$$

причем, если $f(y-\Delta)$ в (6) – дельта-функция, то вторые слагаемые в (12), (13) равны нулю, то есть инструментальные погрешности отсутствуют. Выражения для слагаемых (12), (13) можно записать через условные вероятности:

$$\begin{aligned} &P(A_{xy}) = P(A_x)P\langle A_y | A_x \rangle; \\ &P(A_{x\bar{y}}) = P(A_x)P\langle A_{\bar{y}} | A_x \rangle; \\ &P(A_{\bar{x}y}) = P(A_{\bar{x}})P\langle A_y | A_{\bar{x}} \rangle; \\ &P(A_{\bar{x}\bar{y}}) = P(A_{\bar{x}})P\langle A_{\bar{y}} | A_{\bar{x}} \rangle. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя значения вероятностей из соотношений (14) в (12), (13) и учитывая, что сумма условных вероятностей полной группы событий равна единице, а также соотношение (10), находим [4]

$$P_и = P_0; P_{ош} = 1 - P_0. \quad (15)$$

Это означает, что инструментальная достоверность поверки определяется исключительно доверительной вероятностью ОСИ и инвариантна к видам законов $f(x)$ и $\varphi(\Delta)$ и отношению $K = \Delta_c / \Delta_0$ доверительных границ погрешностей ПСИ и ОСИ.

При выводе формул для вероятностей, входящих в (9), воспользуемся формулой полной вероятности в интегральной форме, как это сделано при обосновании выбора средства измерения в классической задаче разбраковки деталей, впервые рассмотренной в [5]. Задачи выбора средства измерений при разбраковке деталей являются взаимно зеркальными. Это связанно с двумя особенностями, которые не позволяют воспользоваться результатами сразу из [5, 6].

Итак, пусть выходной сигнал ОСИ и погрешность ПСИ описываются плотностями $f(x)$ и $\varphi(\Delta)$, области существования которых определены границами $[-a, a]$ и $[x-d, x+d]$, соответственно где $\pm a, \pm d$ – крайние точки усеченных или не усеченных функций распределения. Погрешности ОСИ характеризуются доверительными границами и нормированной доверительной вероятностью P_0, определяемой (2). Погрешности ПСИ должны укладываться в доверительный интервал $[-\Delta_c, \Delta_c]$ с доверительной вероятностью $P_c^н$ – в этом необходимо убедиться при поверке.

В зависимости от соотношения между величинами Δ_0, Δ_c, d возможны следующие случаи:

$$\Delta_c \geq d, \ \Delta_c - d \geq \Delta_0; \quad (16а)$$

$$\Delta_c < d, \ d - \Delta_c < \Delta_0; \quad (16б)$$

$$\Delta_c \ll d, \ d - \Delta_c > \Delta_0; \quad (16в)$$

$$\Delta_c > d, \ \Delta_c - d < \Delta_0. \quad (16г)$$

Поскольку имеют место соотношения (10), (11), (15), достаточно для дальнейшего рассмотрения привести формулы только для вероятностей $P(A_{x\bar{y}})$ и $P(A_{\bar{x}y})$. Для случая (16г) они имеют вид

$$P(A_{x\bar{y}}) = 2\int_{\Delta_c - d}^{\Delta_0} f(x)\left[\int_{\Delta_c - x}^{d} \varphi(\Delta)d\Delta\right]dx; \tag{17}$$

$$P(A_{\bar{x}y}) = 2\int_{\Delta_0}^{a} f(x)\left[\int_{-d}^{-\Delta_c - x} \varphi(\Delta)\right]d\Delta. \tag{18}$$

Они получены если законы $f(x)$ и $\varphi(\Delta)$ симметричны. При несимметричных законах вместо множителя 2 в каждой из этих формул будет по 2 слагаемых. Если областью существования симметричных функций $f(x)$ и $\varphi(\Delta)$ служит вся ось абсцисс, то выражение для $P(A_{x\bar{y}})$ принимает вид [4]

$$P(A_{x\bar{y}}) = 2\int_{-\Delta_0}^{\Delta_0} f(x)\left[\int_{-\infty}^{-\Delta_c - x} \varphi(\Delta)\right]d\Delta. \tag{19}$$

Выражения (17) – (19) наглядно демонстрируют функциональную зависимость вероятностей от видов законов распределения и доверительных границ случайных погрешностей ОСИ и ПСИ. Это относится и к искомым граничным значениям P_1 и P_2.

Если $f(x)$ и $\varphi(\Delta)$ являются функциями плотности, то есть неотрицательны и определенные интегралы от каждой из них по всей области их существования равны единице, то выражения (17), (18) будут минимальны, когда $f(x)$ и $\varphi(\Delta)$ описываются нормальным законом распределения, и максимальны при равномерном законе распределения. Отсюда следует:

$$P_{р-р}(A_{x\bar{y}}) > P_{н-н}(A_{x\bar{y}});\ P_{р-р}(A_{\bar{x}y}) > P_{н-н}(A_{\bar{x}y}). \tag{20}$$

где индексы $н-н$ и $р-р$ при вероятностях означают виды законов распределения соответственно $f(x)$ и $\varphi(\Delta)$.

Из неравенства (20) с учетом (15) вытекают два следствия.

Для вероятностей $P(A_{xy})$ справедливо неравенство

$$P_{н-н}(A_{xy}) > P_{р-р}(A_{xy}). \tag{21}$$

Для граничных значений P_1 и P_2 при любых законах распределения $f(x)$ и $\varphi(\Delta)$ справедливы неравенства

$$P_{1(н-н)} < P_1 < P_{1(р-р)};\ P_{2(н-н)} > P_2 > P_{2(р-р)}. \tag{22}$$

Чтобы окончательно определить искомые граничные значения необходимы дополнительно количественные соотношения, определяющие зависимость P_1 и P_2 от K. Частично этот вопрос рассмотрен в [3, 4]. По формулам [3, 4] проведен количественный анализ.

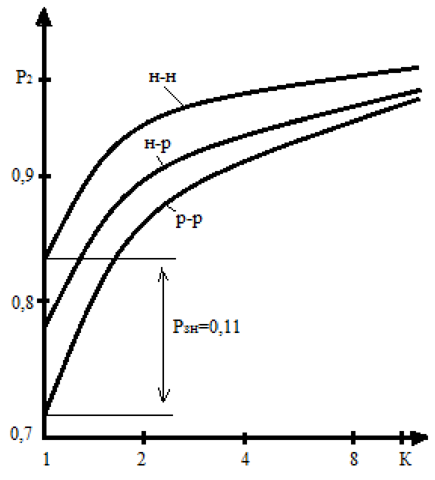

Рис. 1. Кривые зависимости K от граничного значения P_2

На рис. 1 приведены зависимости от K граничного значения P_2, разделяющего области годных и негодных средств измерений для указанных распределений при $P_0 = P_c^н = 0{,}95$ (кривые $н-н$ и $р-р$). Также приведена кривая $н-р$ для которой погрешности ОСИ распределены по нормальному закону, а ПСИ – по равномерному.

Теперь можно записать искомые неравенства для $P(A_y)$, которые при априори неизвестных $f(x)$ и $\varphi(\Delta)$ разделяют пространство на три зоны:

- годности, для которой

$$P_{i-j}(A_y) \geq P_{2(н-н)}; \qquad (24)$$

- негодности, для которой

$$P_{i-j}(A_y) < P_{2(р-р)}; \qquad (25)$$

- неопределенности, для которой

$$P_{2(р-р)} \leq P_{i-j}(A_y) < P_{2(н-н)}, \qquad (26)$$

где индексами $i-j$ обозначены произвольные законы $f(x)$ и $\varphi(\Delta)$.

Решение по (24) означает, что ПСИ годен, а по (25) – негоден с $P_и = P_0$ при любых $f(x)$ и $\varphi(\Delta)$. Относительно (26) сделаем пояснение: физический смысл неопределенности состоит в том, что в эту зону могут попасть годные в смысле (4) и негодные ПСИ, это зависит от вида неизвестных $f(x)$ и $\varphi(\Delta)$. Таким образом, ПСИ, попавшие в зону (26), могут быть признаны годными, но с вероятностью $P_и$, определяемой по (23). Ширина зоны неопределенности максимальна при $K=1$ и уменьшается с ростом K. В частности, для данных на рис. 1 максимальная потеря достоверности равна 0,11. Соответственно растет вероятность инструментальных ошибок.

Погрешности средства измерения и ИК КВМ следует рассматривать как суммарные, изменяя составляющие в каждом конкретном случае. При $m_\Delta \neq 0$ величина m_Δ должна войти в качестве слагаемого (16), поскольку центры рассеяния плотностей $f(x)$ и $\varphi(\Delta)$ будут сдвинуты на m_Δ. Это приводит к усложнению математических выкладок, поскольку ситуация будет аналогична той, которая имеет место при несимметричных законах $f(x)$ и $\varphi(\Delta)$, когда в (17) – (19) вместо множителей 2 появляются отдельные слагаемые.

Вывод

Отсутствие априорной информации о законах распределения метрологических характеристик поверяемых приборов в ОСИ приводит к снижению вероятности поверки, что соответствует основополагающим принципам информационной теории измерений.

Можно построить графики, подобные рис. 1, для различных значений нормируемых [2] доверительных вероятностей для погрешностей ОСИ и ПСИ. Наличие таких графиков позволяет легко и просто проводить расчеты , связанные с выбором ОСИ и определением инструментальной вероятности правильной поверки.

Список литературных источников

1. МИ 162-78. ИИС Организация и порядок проведения метрологической аттестации.: М.: Издательство стандартов, 1979.
2. ГОСТ 8.061-80. ГСИ. Поверочные схемы. Содержание и построение.
3. Шеломанов, А.И. Системы автоматизации метрологических исследований/А.И. Шеломанов. – Львов.: ВНИИМИУС, 1983. – 18 с.
4. Бородачев Н.А. Обоснованные методики расчета допусков и ошибок кинематических цепей: Н.А. Бородачев. – М.: Машиностроение, 1979.
5. Михайлов А.В. Точность радиоэлектронных устройств/А.В. Михайлов, С.К. Савин . – М.: Машиностроение , 1976.
6. Лисуненко Н.О. Методика оцінки характеристик випадкової складової похибки вимірювального каналу координатно-вимірювальної машини/Лисуненко Н.О., Колосова Т.В. //Вісник Інженерної академії України. К.: Інтерсервіс, 2012. – 309с.