

УДК 621.317

О. М. Безвесільна, д.т.н, професор
Л.О.Чепюк, ст.викладач

ВИЗНАЧЕННЯ ПОХИБКИ ВИМІРЮВАННЯ СТРУННОГО ГРАВИМЕТРА АВІАЦІЙНОЇ ГРАВИМЕТРИЧНОЇ СИСТЕМИ

¹Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут",
e-mail: bezvesilna@mail.ru

²Житомирський державний технологічний університет,
e-mail: chepyuk.larina@mail.ru

У статті виконано розрахунок похибки вимірювання струнного гравіметра авіаційної гравіметричної системи.

Ключові слова: прискорення сили тяжіння, авіаційна гравіметрична система, похибки вимірювання, струнний гравіметр.

Постановка проблеми у загальному вигляді та її актуальність.

Визначення характеристик гравітаційного поля Землі (прискорення g та аномалій Δg) широко використовуються у багатьох галузях науки і техніки – в авіаційній і космічній техніці, у геології, геодезії і геофізиці.

Авіаційна гравіметрична система (АГС) використовується для визначення характеристик гравітаційного поля Землі. Ефективність роботи АГС значною мірою забезпечується вибором чутливого елемента системи – гравіметра. Використання струнного гравіметра (СГ) забезпечує підвищення точності, швидкої і точної цифрової реєстрації гравітаційного прискорення на літаку [1].

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Проведений аналіз літератури у галузі авіаційної гравіметрії показав, що великий внесок у дослідженнях авіаційних гравіметрів було зроблено видатними вченими В.О. Багрянцем, А.М. Лозинською, Є.І. Поповим та іншими [2]. Аналіз останніх досліджень і публікацій показав, що у літературі недостатньо висвітлено питання розрахунку похибок СГ у якості гравіметра АГС.

Метою даної роботи є розрахунок складових сумарної похибки вимірювання струнного гравіметра в якості гравіметра АГС.

Викладення основного матеріалу дослідження

Аналіз похибок струнного гравіметра. Проведений аналіз гравіметрів АГС показав, що на сьогоднішній день досяжною є точність авіаційних гравіметричних вимірювань 3...10 мГл. Однак, аерогравіметрична зйомка потребує суттєвого підвищення точності та швидкодії авіаційних гравіметричних вимірювань до 1 мГл. Це пов'язане, насамперед, із необхідністю підвищення точності гравіметра, розвитком методів автоматичної компенсації похибок вимірювань Δg , з удосконаленням математичної моделі АГС, вирішенням проблем фільтрації збурюючих впливів у вихідному сигналі гравіметра АГС.

Використання в якості гравіметра АГС автоматизованого струнного гравіметра дозволить досягти необхідної точності вимірювань [3].

Струнні гравіметри мають високу точність вимірювання, високу вібраційну та ударну міцність, надійність, частотно-модульований вихідний сигнал, високу потужність вихідного сигналу, а також малі габарити та вагу. Вони дозволяють виконувати швидко і точно цифрову реєстрацію прискорень g . До переваг також слід віднести малість сталої часу, що важливо при вимірюваннях на літаку, і майже необмежений діапазон вимірювання вхідних величин без перебудови приладу

На сумарну похибку вимірювання струнного гравіметра впливають інструментальна похибка гравіметра, вертикальні збурюючі прискорення, горизонтальні збурюючі прискорення, вплив висоти польоту, ефект Етвеша, помилка другого порядку.

Виконаємо аналіз вказаних складових похибки СГ.

Інструментальна похибка.

Інструментальна похибка виникає внаслідок відхилу основних конструктивних параметрів вимірювального кола від їх номінальних значень, неточності виготовлення та збірки, внаслідок зовнішніх дій.

Початковою для розрахунку інструментальної похибки являється основна робоча формула СГ [3]:

$$f = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{Mg}{\rho S}}, \quad (1)$$

де M – маса вантажу; l – довжина струни; ρ – густина матеріала струни, S – площа поперечного перерізу струни.

Істинне значення прискорення сили тяжіння визначається по формулі:

$$g = \frac{4l^2 \rho S f^2}{M}. \quad (2)$$

Відносна похибка вхідного сигналу рівна сумі добутків відносних похибок параметрів, що входять до формули (1), на показники ступенів цих параметрів

$$\frac{\Delta g}{g} = 2 \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta S}{S} + 2 \frac{\Delta f}{f} - \frac{\Delta M}{M}.$$

Дана похибка повинна бути не більше, чим $\frac{\Delta g}{g} = \frac{1}{9,81 \cdot 10^5} = 0,1 \cdot 10^{-5}$.

Розглянемо кожен складову похибки окремо:

Відносне подовження струни $\Delta l/l$ визначається за законом Гука:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta F}{ES},$$

де $\Delta F = M \Delta g$; Δg – границя виміру прискорення сили тяжіння.

Зміна густини матеріалу струни:

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = 0.$$

Під дією оточуючих умов похибка від нестабільності частоти $\frac{\Delta f}{f}$ викликана зміною власних параметрів струни.

Для розрахунку температурної похибки представимо робочу формулу струнного гравіметра у вигляді:

$$f = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Mg}{m_c l}},$$

де $m_c = \rho S l$ – маса струни, яка зі зміною температури залишається постійною.

Довжина струни зі зміною температури змінюється за законом:

$$\Delta l = l \alpha_{cmp} \Delta t,$$

де α_{cmp} – температурний коефіцієнт лінійного розширення матеріалу струни, Δt – величина зміни температури, $t = +50^\circ\text{C} \div -50^\circ\text{C}$.

Частота коливань струни змінюється згідно виразу

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial l} \Delta l,$$

$$\text{де } \frac{\partial f}{\partial l} = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{Mg}{m_c}} \cdot \frac{1}{l^2} \text{ і } \Delta f = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{Mg}{m_c}} \cdot \frac{1}{l^2} \Delta l.$$

Відносна зміна частоти від зміни температури:

$$\left(\frac{\Delta f}{f} \right)_1 = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{Mg}{m_c}} \sqrt{l} \frac{1}{l^2} \cdot 2 \sqrt{\frac{m_c l}{Mg}} \Delta l = -\frac{1}{2} \alpha_{cmp} \Delta t. \quad (3)$$

Для берилієвої бронзи $\alpha = 15 \cdot 10^{-6}$ 1/град. Температура у корпусі струнного гравіметра підтримується термостатом з постійною похибкою $\pm 0,5^\circ\text{C}$, тоді

$$\left(\frac{\Delta f}{f}\right)_1 = -\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 10^{-6} \cdot 1 = 7,5 \cdot 10^{-6}.$$

Вплив тиску та вологості оточуючого середовища на коливання струни зводиться до зміни приєднаної маси, що коливається разом зі струною та зменшує її частоту.

Зміна густини середовища, в якій коливається струна, характеризує вплив тиску та вологості на частоту коливань струни:

$$\left(\frac{\Delta f}{f}\right)_2 = -2 \frac{\rho_{cp}}{\rho}, \quad (4)$$

де $\rho = 8,8 \cdot 10^{-6}$ кг/мм³ – для берилієвої бронзи, $\rho_{cp} = 1,7 \cdot 10^{-13}$ кг/мм³ – для повітря при тиску $p = 10^{-2}$ мм рт. ст.

Звідси:

$$\left(\frac{\Delta f}{f}\right)_2 = -2 \frac{1,7 \cdot 10^{-13}}{8,8 \cdot 10^{-6}} = 0,04 \cdot 10^{-6}.$$

Похибка, що визивається пружним наслідком:

$$\left(\frac{\Delta f}{f}\right)_3 = -\beta_{np} \frac{\Delta l}{l}, \quad (5)$$

де β_{np} – величина пружного наслідку, для берилієвої бронзи $\beta_{np} = 0,2\%$:

$$\left(\frac{\Delta f}{f}\right)_3 = -0,002 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = -0,004 \cdot 10^{-6}.$$

Кінцева похибка від нестабільності частоти:

$$\frac{\Delta f}{f} = -\sqrt{\left(\frac{\Delta f}{f}\right)_1^2 + \left(\frac{\Delta f}{f}\right)_2^2 + \left(\frac{\Delta f}{f}\right)_3^2}$$

$$\frac{\Delta f}{f} = -\sqrt{(7,5 \cdot 10^{-6})^2 + (0,04 \cdot 10^{-6})^2 + (0,004 \cdot 10^{-6})^2} = -7,5 \cdot 10^{-6}.$$

Відносна похибка площі поперечного перерізу струни $\frac{\Delta S}{S}$:

$$\frac{\Delta S}{S} = \sqrt{\left(\frac{\delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\delta h}{h}\right)^2}, \quad (6)$$

де $S = l \cdot h$, δh , δl – допуски на сторони поперечного перерізу струни. $\delta h = \delta l = 0,8$ мкм – при виготовленні струни по еквіваленту hl :

$$\frac{\Delta S}{S} = \sqrt{\left(\frac{0,8 \cdot 10^{-3}}{0,25}\right)^2 + \left(\frac{0,8 \cdot 10^{-3}}{0,025}\right)^2} = 0,03.$$

Рівняння для відносної похибки:

$$\frac{\Delta M}{M} = 2 \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta S}{S} + 2 \frac{\Delta f}{f} - \frac{\Delta g}{g} = 2 \cdot 0,256 \cdot 10^{-6} + 0,03 + 2 \cdot 7,5 \cdot 10^{-6} - 1 \cdot 10^{-6} = 0,03.$$

Звідси $\Delta M = 0,03M = 0,03 \cdot 60 = 1,8$.

Для забезпечення необхідної інструментальної похибки потрібно при виготовленні та збірці забезпечити контроль маси з точністю до 1,8 г [4].

Вертикальні і горизонтальні збурюючі прискорення.

Крім постійно діючих прискорень сили тяжіння, на струнний гравіметр діють періодичні прискорення руху літака. Частота Ω періодичних збурюючих прискорень набагато менше частоти коливань струни [3]. Позначимо результуючу збурюючу вертикальну компоненту \ddot{z} , горизонтальні \ddot{x} та \ddot{y} .

Величина миттєвого результуючого прискорення, у напрямку якого буде встановлюватись

вісь струни, буде рівною

$$|G(t)| = \sqrt{(g + \ddot{z})^2 + \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}.$$

Оскільки компоненти \ddot{x} , \ddot{y} , \ddot{z} в порівнянні з g малі, то обмежуючись малими другого порядку, запишемо:

$$|G(t)| = g \left(1 + \frac{\ddot{z}}{g} + \frac{\ddot{x}^2}{g^2} + \frac{\ddot{y}^2}{2g^2} \right).$$

Відповідно миттєва частота струни:

$$f = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{Mg}{\rho S}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\ddot{z}}{g} - \frac{1}{8} \frac{\ddot{z}^2}{g^2} + \frac{1}{4} \frac{\ddot{x}^2}{g^2} + \frac{1}{4} \frac{\ddot{y}^2}{g^2} \right).$$

Середнє значення частоти струни за інтервал часу T буде:

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{Mg}{\rho S}} \left[1 + \frac{1}{2g} + \frac{1}{T} \int_0^T \ddot{z} dt - \frac{1}{8g^2} \frac{1}{T} \int_0^T \ddot{z}^2 dt + \frac{1}{4g^2} \frac{1}{T} \int_0^T (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2) dt \right].$$

Уявімо, що

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= a \sin[\Omega_z t + \varphi_z] \\ \ddot{y} &= b \sin[\Omega_y t + \varphi_y], \\ \ddot{x} &= c \sin[\Omega_x t + \varphi_x] \end{aligned}$$

тоді середнє значення частоти буде:

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{Mg}{\rho S}} \left[1 - \frac{1}{16} \frac{a^2}{g^2} + \frac{1}{8} \frac{b^2 + c^2}{g^2} + \frac{1}{2g} \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\Omega_z t + \varphi_z) dt + \right. \\ &\left. + \frac{1}{16} \frac{a^2}{g^2} \frac{1}{T} \int_0^T \cos 2(\Omega_z t + \varphi_z) dt - \frac{1}{8} \frac{b^2}{g^2} \frac{1}{T} \int_0^T \cos 2(\Omega_x t + \varphi_x) dt - \frac{1}{8} \frac{c^2}{g^2} \frac{1}{T} \int_0^T \cos 2(\Omega_y t + \varphi_y) dt \right]. \end{aligned}$$

У попередньому виразі збурююча складова 1-го порядку: $\frac{1}{2g} \int_0^T \sin(\Omega_z t + \varphi_z) dt$ може бути

зроблена малою у таких випадках:

1. Якщо проміжок часу виміру T взяти кратним проміжку періоду вертикальних збурюючих прискорень: $\frac{2\pi}{\Omega_z}$, оскільки при

$$T = \frac{2\pi h}{\Omega}, \int_0^T \sin(\Omega t + \varphi) dt = 0. \quad (7)$$

2. Якщо проміжок часу T взяти достатньо великим, то можна знехтувати усіма чотирма останніми членами. З іншої сторони інтегральне середнє значення прискорення сили тяжіння, віднесене до моменту часу $\left(t + \frac{T}{2} \right)$ може бути записано у вигляді:

$$\bar{G}(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} G(t) dt = g + \frac{1}{T} \left[\left(\frac{dz}{dt} \right)_{t+T} - \left(\frac{dz}{dt} \right)_t \right]. \quad (8)$$

Звідси виходить, що для знаходження з достатньою точністю необхідно додатково, незалежно від гравіметра, виміряти вертикальну швидкість літака для урахування другого члена попереднього виразу.

Поправка на горизонтальне збурююче прискорення визначається за виразом:

$$\Delta g_{\Gamma} = -\frac{1}{2g}(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2).$$

Горизонтальні збурюючі прискорення на літаку можна реєструвати за допомогою центральної гіровертикалі, встановленої у підвісі або за допомогою горизонтальних акселерометрів, встановлених на гіроплатформі.

Вплив висоти польоту та помилка другого порядку.

Прискорення сили тяжіння при вимірі струнним гравіметром визначається по формулі:

$$g = \frac{1}{\alpha^2} f^2 = \beta f^2.$$

Значення β визначається до польоту шляхом вимірювань на початковій точці при g_n частоти коливань f_n :

$$\beta = \frac{g_n}{f_n^2}.$$

Відхил прискорень сили тяжіння від початкового положення визначається:

$$\Delta g = g - g_n = \frac{g_n}{f_n^2} f^2 - g_n = \frac{g_n}{f_n^2} [f^2 - f_n^2] = \frac{g_n}{f_n^2} (f - f_n)(f + f_n) = \frac{2g_n}{f_n} \left(1 + \frac{\Delta f}{2f_n}\right) \Delta f, \quad (9)$$

де $\Delta f = f - f_n$.

Позначимо $c = \frac{2g_n}{f_n}$, звідси $\Delta g = c\Delta f + c \frac{\Delta f^2}{2f_n}$,

де $c = \frac{\Delta f^2}{2f_n} = \Delta g_{II}$ – поправка другого порядку, яка при вимірюваннях з борту літака може

досягати великої величини і її потрібно враховувати.

Вимірювання сили тяжіння проводять на різних висотах відносно рівня моря або рівня початкової точки. При віддаленні від центра Землі сила тяжіння зменшується, тому вводимо поправку на висоту від місця нагляду [3].

$\Delta g_H = 0,3086H$, де H – висота польоту над рівнем моря.

Ефект Етвеша.

Ефект Етвеша характеризує зміну центробіжної сили, діючої на прилад. Він має велике значення при аерогравіметричних зйомках. Повна формула для обчислення ефекту Етвеша:

$$\Delta g_E = \left(1 + \frac{H}{R_\varphi}\right) \left(\lambda \omega \cos \varphi v_E + \frac{v^2}{R_\varphi}\right), \quad (9)$$

де R_φ – радіус Землі на географічній широті φ ; H – висота польоту; ω – кутова швидкість повороту Землі, $v = \sqrt{v_E^2 + v_N^2}$ – шляхова швидкість літака, де v_E , v_N – східна та північна складові шляхової швидкості літака.

У таблиці 1 зведені всі описані вище похибки та обчислені їх орієнтовні значення при наступних величинах параметрів:

- збурюючі прискорення \ddot{x} , \ddot{y} , $\ddot{z} = 10$ Гл;
- відхил частоти від початкової $\Delta f = 50$ Гц;
- висота польоту $H = 3$ км;
- фактична швидкість літака 300 км/год;
- широта місця польоту $\varphi = 52^\circ$;
- східна складальна шляхової швидкості $v_E = 200$ км/год.

Похибки та обчислені їх орієнтовні значення

Таблиця 1

Джерело похибки	Математичний вираз	Наближене значення	%, від межі виміру	Засіб обчислення або позбавлення
Інструментальна	$\frac{\Delta g}{g} = \frac{2\Delta l}{l} + \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta S}{S} + 2\frac{\Delta f}{f} - \frac{\Delta M}{M}$	1 мГл	0,04	Еталонування, термостатування
Вертикальні збурюючі прискорення	$\Delta g_e = \frac{1}{T} \left[\left(\frac{dz}{dt} \right)_{t+T} - \left(\frac{dz}{dt} \right)_t \right] = \frac{d^2 z}{dt^2}$	100 мГл	14,3	Вимірювання вертикальної швидкості
Горизонтальні збурюючі прискорення	$\Delta g_r = \frac{1}{2g} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$	100 мГл	2	Вимірювання горизонтальних прискорень
Зміна висоти польоту	$\Delta g_H = 0,3086 \text{ Н}$	620 мГл	12	Вимірювання висоти висотоміром
Ефект Етвеша	$\Delta g_E = \left(1 + \frac{H}{R_4} \right) \times \left(2\omega \cdot \cos \varphi v_E + \frac{v^2}{R_\varphi} \right)$	150 мГл	16,7	Вимірювання висоти і широти під час польоту
Помилка другого порядку	$\Delta g_{II} = c \frac{\Delta f^2}{2f_n}$	30 мГл	0,6	Вимірювання кількості імпульсів спеціальним лічильником

Аналізуючи дані у таблиці 1 можна сказати: найбільшим джерелом похибки є вплив вертикальних збурюючих прискорень, а також ефект Етвеша. Для зменшення впливу висоти польоту потрібно виконувати вимірювання на однаковій висоті. На всі розглянуті джерела похибок необхідно вводити відповідні поправки.

Висновки: Визначено склад та структуру похибок СГ, розраховано інструментальну похибку гравіметра. Розглянуто вплив вертикальних та горизонтальних збурюючих прискорень, висоти польоту, ефекту Етвеша, помилки другого порядку для визначення сумарної похибки СГ.

Список літературних джерел

1. Безвесільна О. М. Вимірювання прискорень / Безвесільна О. М. – К. : Либідь, 2001.– 261с.
2. Безвесільна О.М. Авіаційні гравіметричні системи та гравіметри: Монографія/ Безвесільна О.М.– Житомир : ЖДТУ, 2007. – 604 с.
3. Лозинская А. М. Измерения силы тяжести на борту самолета //Сер. Региональная, разведочная и промышленная геофизика. – М.: Изд. ВИЭМС. 1978. – 113 с.
4. Безвесільна О.М. Технологічні вимірювання та прилади. Перетворюючі пристрої приладів / О. М. Безвесільна, Г.С. Тимчик: підручник – Житомир : ЖДТУ, 2012. – 812 с.