УДК 625.72:656.11

Колганова О.О., к.т.н.
Корнієнко С.П.
Кужель Н.В., к.т.н.
Шутко В.М., д.т.н.

МЕТОД ЧИСЕЛЬНОГО РОЗРАХУНКУ ПОХІДНОЇ З ВИКОРИСТАННЯМ ШВИДКОГО СПЛАЙН-ПЕРЕТВОРЕННЯ

Національний авіаційний університет, e-mail: sveta.shkvira@yandex.ru
Національний авіаційний університет, e-mail: kuzhelnina@ukr.net

Стаття присвячена розвитку методики оцінки швидкості та прискорення автомобіля під час руху у колоні «за лідером» на основі нового математичного методу

Ключові слова: *чисельна похідна, сплайн-апроксимація.*

Вступ. Умови руху, тобто реальна обстановка на дорозі, в якій рухається автомобіль у певний момент часу, істотно змінюються із збільшенням інтенсивності руху. Завантаження дороги безпосередньо впливає на ступінь зручності руху автомобіля по дорозі, на ефективність використання автомобільного транспорту і витрату пального.

Залежно від завантаження дороги розрізняють кілька характерних режимів транспортних потоків, пов'язуючи з ними поняття про рівні зручності руху.

Щільний, або насичений, потік (рівень зручності руху Г) – це найбільш складна структурна форма транспортного потоку, для якого характерні однакові швидкості й приблизно однакові відстані між прямуючими один за одним автомобілями, немає можливості обгону, тобто рух кожного автомобіля потоку пов'язаний з діями переднього автомобіля. Швидкість руху різко знижується. В місцях погіршення дорожніх умов можуть виникати затори. Умови роботи водія напружені.Рух в щільному потоці машин вимагає особливої уваги і високої концентрації. У даному випадку особливої актуальності набуває дотримання рядності, яке є головною умовою швидкої і безпечної їзди в транспортному потоці. Часта і даремна зміна смуги руху - джерело додаткових перешкод та незручностей іншим водіям, і нерідко призводить до виникнення ДТП.

При їзді в щільному потоці машин вибирати швидкість руху потрібно, виходячи з швидкості руху всього потоку. Відмінною рисою їзди в обмежених умовах є те, що водії втомлюються швидше, ніж завжди, а також - нерідко втрачають контроль над собою, прагнучи обігнати рухомі попереду транспортні засоби. Основна частка ДТП трапляється при спробах зміни смуги руху, в яких стикаються машини попутного напрямку.Дуже важливо при їзді в щільному потоці машин вміти вибирати безпечну відстань до рухомої попереду машини. При виборі дистанції потрібно брати до уваги стан дорожнього покриття, що склалася дорожню обстановку, технічний стан і вагу свого автомобіля, а також зіставляти свою швидкість і середню швидкість транспортного потоку. При цьому тримати надто велику дистанцію не має сенсу - адже завжди знайдеться той, хто зуміє «вбудуватися» перед автомобілем.

При русі в потоці машин багато що залежить від водія транспортного засобу, що їде попереду (є навіть такий термін - **«водій-лідер»**). Все, що він робить, так чи інакше безпосередньо впливає на рух всього транспортного потоку, тому рішення повинні прийматися виважені і грамотні, а маневри виконуватися безпомилково і чітко. Водій-лідер повинен вибрати оптимальний швидкісний режим з урахуванням вимог Правил дорожнього руху, і рухатися по можливості рівномірно, без різких прискорень або гальмувань. При русі за водієм-лідером потрібно спостерігати не тільки за його діями, але й за поведінкою на дорозі водіїв автомобілів, що рухаються позаду і по боках. Оскільки при їзді в потоці машин огляд дороги перед рухомими попереду автомобілями обмежений, то вам важко буде заздалегідь передбачати причини їх ймовірного зниження швидкості або екстреної зупинки. Тому потрібно уникати їзди за великогабаритними транспортними засобами (автобусами, фурами, вантажівками, тощо).

Аналіз досліджень та публікацій. При розв’язанні питань, пов’язаних зі зменшенням числа дорожньо-транспортних пригод (особливо викликаних зіткненням автомобілів між собою), необхідно детально вивчити взаємодію автомобілів, що рухаються один за одним.

Основи математичного моделювання закономірностей дорожнього руху були закладені в 1912 році російським ученим професором Г. Д. Дубеліром.

Перша спроба узагальнити математичні дослідження транспортних потоків і представити їх у вигляді самостійного розділу прикладної математики була зроблена Ф. Хейтом.

Відомі математичні моделі, які знайшли практичне застосування в організації дорожнього руху, можна розділити на дві групи в залежності від підходу. Це детерміновані та ймовірнісні, тобто стохастичні.

До детермінованих належать моделі, в основі яких лежить функціональна залежність між окремими показниками, наприклад, швидкістю і дистанцією між автомобілями в потоці. При цьому приймається, що всі автомобілі віддалені один від одного на однакову відстань.

Стохастичні моделі відрізняються більшою об'єктивністю. У них транспортний потік розглядається як імовірнісний, випадковий процес. Наприклад, розподіл часових інтервалів між автомобілями в потоці може прийматися не строго визначеним, а випадковим.

Для уточнення взаємного просторового положення рухомих транспортних засобів введено таке поняття, як динамічний габарит транспортного засобу. Цей параметр визначають як суму довжини транспортного засобу, дистанції безпеки і зазору до зупинившогося попереду автомобіля. Для легкових автомобілів цей зазор коливається в межах 1-3 метра. Відомо принаймні три підходи до визначення динамічного габариту. При розрахунку мінімальної теоретичної дистанції виходять з абсолютно рівних гальмівних властивостей пари автомобілів і враховують тільки час реакції веденого водія. Тоді динамічний габарит складається з суми довжини транспортного засобу, зазору, швидкості і часу реакції водія. У цьому випадку можлива інтенсивність транспортного потоку не має меж по мірі збільшення швидкості. Однак це не відповідає реальним характеристикам водіїв і призводить до завищення можливої інтенсивності потоку. Тут головну роль відіграє практичне значне збільшення часу реакції при високих швидкостях.

При розрахунку на повну безпеку виходять з того, що дистанція безпеки повинна бути рівна повному гальмівному шляху заднього автомобіля. Такий підхід більше відповідає вимогам забезпечення безпеки руху при швидкостях, що перевищують 90 кілометрів на годину.

Найбільш реальний підхід заснований на тій передумові, що при розрахунку дистанції безпеки треба враховувати різницю гальмівних шляхів автомобілів, а також ту обставину, що ***лідер*** у процесі гальмування також переміщається на відстань, рівну своєму гальмівному шляху.

У результаті вивчення транспортних потоків високої щільності і спеціальних експериментів, проведених американськими фахівцями, була запропонована **теорія проходження за лідером**, математичним виразом якої є **мікроскопічна модель транспортного потоку.**

Мікроскопічною її називають тому, що вона розглядає елемент потоку, пару слідкуючих один за одним транспортних засобів. Особливістю цієї моделі є те, що в ній відображені закономірності комплексу «водій-автомобіль-дорога-середовище», зокрема, психологічний аспект управління автомобілями. Він полягає в тому, що при русі в щільному транспортному потоці дії водія обумовлені змінами швидкості лідируючого автомобіля і дистанції до нього.

Це питання розглянуто у роботах іноземних та вітчизняних науковців, таких як Ф.Хейт [1], В. Сильянов [2], Е.Лобанов [3,4] та ін. Теорія «слідування за лідером» є розвитком теорії спрощених динамічних моделей. Вона базується на гіпотезі про існування деякої закономірності взаємодії автомобілів, які рухаються один за одним на близькій відстані. Диференційне рівняння теорії «слідування за лідером» одержане з початкової умови, що усі автомобілі рухаються в колонні на відстані, яка вимагається правилами дорожнього руху. Тоді координати положення n-го і (n+1)-го автомобілів можна описати залежністю:

$$x_{n+1} = x_n + \left(l_0 + t_p v_n\right) + l_{n+1}, \qquad (1)$$

де l_0 – мінімальна відстань між стоячими автомобілями; $t_p v_n$ – відстань між автомобілями, які встановлюються у залежності від швидкості руху; l_{n+1} – довжина автомобіля; n – порядковий номер автомобіля.

Диференціюючи рівняння (1) за часом, одержуємо

$$\frac{dx_{n+1}}{dt} = \frac{dx_n}{dt} + t_p \frac{dv_n}{dt}, \quad \text{де } n=1, 2, 3.$$

Це рівняння може бути виражено через швидкість у наступному вигляді:

$$v_{n+1} = v_n + t_p \frac{dv_n}{dt},$$

$$v_{n+1} - v_n = t_p \frac{dv_n}{dt},$$

$$\frac{dv_n}{dt} = \frac{1}{t_p}\left(v_{n+1} - v_n\right),$$

де $\frac{dv_n}{dt}$ – прискорення заднього автомобіля; v_n та v_{n+1} – швидкості заднього і переднього автомобілів; t_p – час реакції водія.

Можна виразити це правило через прискорення:

$$\frac{d^2 v_n}{dt^2} = \frac{1}{t_p}\left(\frac{dv_{n+1}}{dt} - \frac{dv_n}{dt}\right).$$

Постановка завдання дослідження. Щоб дослідити цю модель руху за лідером для реальних об'єктів потрібно обробляти дані про рух зв'язаних об'єктів (наприклад, за допомогою GPS-приймача), які отримані з похибками (похибки викликані неточністю вимірювальної апаратури).

Також потрібно знаходити першу та другу похідні від «зашумлених» графіків руху об'єктів, що відповідає швидкостям та прискоренням руху автомобілів. Тому ставиться задача розробки математичного методу оцінки параметрів руху, який дозволив би мінімізувати вказані похибки.

Основний зміст. Методи чисельного розрахунку похідної від функції, яка спостерігається на фоні випадкових похибок дослідних даних, основані [5] на зглажувані цієї функції поліномами найкращого середньоквадратичного наближення, рядами Фур'є, сплайнами. Тоді подальше знаходження самої похідної виконується аналітично.

Тобто, ставиться задача: обчислити чисельно похідну функції виду

$$F(t) = \frac{dY(t)}{dt}.$$

Нехай на відрізку $[0,T]$ в точках $t = \{t_i\}_{i=1}^N$ задані значення $Y = \{y_i\}_{i=1}^N$ деякої дискретної часової функції. Їм відповідають (ще не розраховані) відліки похідної $F = \{f_i\}_{i=1}^N$ в точках $t = \{t_i\}_{i=1}^N$. Тоді Y і F будуть пов'язані співвідношеннями:

$$F = PY \text{ і } Y = QF,$$

де P і Q - оператори диференціювання і інтегрування відповідно.

Будемо вважати, що значення похідної F описуються локальним кубічним ермітовим сплайном $S_3 = XA$, де X - матриця планування, $A = \{a_j\}_{j=0}^r$ - вектор оцінюваних параметрів (ординат точок "склейки" ділянок сплайну). Такий сплайн належить C^1 - класу неперервно диференційованих функцій.

Тоді $Y = QXA$.

Позначимо через $W = QX$ матрицю, розмірністю $N*(r+1)$, яка складається з проінтегрованих локальних функцій форми сплайну.

Вимагатимемо виконання умови мінімуму середньоквадратичного відхилення:

$$\sum_{i=1}^{N}[y_i - \sum_{j=0}^{r} w_{ij} a_j]^2 = \min, \quad j = \overline{0,r}.$$

Цій умові задовольняє розв'язок системи нормальних рівнянь:

$$(Y - WA)^T (Y - WA) = \min$$

$$W^T W A = W^T Y$$

$$A = (W^T W)^{-1} W^T Y = Z^{-1} B$$

Знайдений вектор оцінюваних параметрів $A = \{a_j\}_{j=0}^r$ повністю визначає сплайн $S_3 = XA$. Відмітимо, що матриці W^T і Z^{-1} не залежать від вхідних параметрів і можуть бути розраховані попередньо. Таким чином, **за часовими відліками початкової функції $Y = \{y_i\}_{i=1}^N$ швидко знаходимо сплайн-апроксимацію S_3 похідної F цієї функції без попереднього розрахунку самих відліків похідної $F = \{f_i\}_{i=1}^N$.**

Значення локального кубічного ермітова сплайну в довільній точці обчислюється за формулою:

$$S(t) = a_{j-1}\,{}^1x(t) + a_j\,{}^2x(t) + a_{j+1}\,{}^3x(t) + a_{j+2}\,{}^4x(t)$$

для $t \in [tu_j, tu_{j+1}]$,

де a_j -е - значення ординат вузлів "склейки" ділянок сплайну,

${}^k x(t)$ - локальні функції форми, дискретні значення яких заповнюють стовбці матриці планування X і розраховуються за формулами:

$$ {}^{1}X_{ij} = -\frac{h_j^2 x_{ij}(1-x_{ij})^2}{h_{j-1}(h_{j-1}+h_j)}, \quad j=\overline{2,r}, \quad i=\overline{1+m_{j-1},m_j}; $$

$$ {}^{2}X_{i1} = 1 - x_{i1} - \frac{h_1 x_{i1}^2(1-x_{i1})}{(h_1+h_2)}, \quad i=\overline{1,m_1}; $$

$$ {}^{2}X_{ij} = 1 - x_{ij} - \frac{h_j x_{ij}^2(1-x_{ij})}{(h_j+h_{j+1})} + \frac{h_j x_{ij}(1-x_{ij})^2}{h_{j-1}}, \quad j=\overline{2,r-1}, \ i=\overline{1+m_{j-1},m_j}; $$

$$ {}^{2}X_{ir} = 1 - x_{ir} - \frac{h_r x_{ir}(1-x_{ir})^2}{h_{r-1}}, \ i=\overline{1+m_{r-1},m_r}; $$

$$ {}^{3}X_{i1} = x_{i1} - \frac{h_1 x_{i1}^2(1-x_{i1})}{h_2}, \quad i=\overline{1,m_1}; $$

$$ {}^{3}X_{ij} = x_{ij} - \frac{h_j x_{ij}^2(1-x_{ij})}{h_{j+1}} - \frac{h_j x_{ij}(1-x_{ij})^2}{h_{j-1}+h_j}, \quad j=\overline{2,r-1}, \ i=\overline{1+m_{j-1},m_j}; $$

$$ {}^{3}X_{ir} = x_{ir} - \frac{h_r x_{ir}(1-x_{ir})^2}{h_{r-1}+h_r}, \ i=\overline{1+m_{r-1},m_r}; $$

$$ {}^{4}X_{ij} = -\frac{h_j^2 x_{ij}^2(1-x_{ij})}{h_{j+1}(h_j+h_{j+1})}, \quad j=\overline{1,r-1}, \ i=\overline{1+m_{j-1},m_j}; $$

$$ x_{ij} = \frac{x_i - \tilde{x}_{j-1}}{h_j}; \quad h_j = \tilde{x}_j - \tilde{x}_{j-1}; \quad j=\overline{1,r}; $$

$$ x_i \in [\tilde{x}_{j-1}, \tilde{x}_j], \quad j=\overline{1,r-1}; \quad x_i \in [\tilde{x}_{r-1}, \tilde{x}_r]; $$

$$ m_j = \sum_{u=1}^{j} K_u, \quad j=\overline{1,r}; \ m_{-1} = m_0 = 0; \quad m_r = N; $$

де K_u - кількість відліків на u - му відрізку.

Кількість операцій множення, додавання, необхідних для обчислення швидкої сплайн-апроксимації похідної від функції, яка спостерігається:

$$ M = N*(r+1) + (r+1)^2. $$

Проведемо порівняння якості запропонованого методу чисельного розрахунку похідної від функції, яка спостерігається на фоні випадкових похибок дослідних даних, із класичним методом (згладжування цієї функції сплайном і подальше аналітичне знаходження самої похідної).

Для 64 відліків початкової функції і 16 вузлів "склейки" сплайну отримано наступні результати:

- середньоквадратичне відхилення «вхідного» гаусівського некорельованого шуму змінювалося з 0,2 до 1,0 (SKV_vh);
- при цьому середньоквадратичне відхилення теоретичної похідної від похідної, чисельно розрахованої класичним методом, змінювалося з 0,5 до 0,55 (SKV_vyh – пряма 1);
- а середньоквадратичне відхилення теоретичної похідної від похідної, чисельно розрахованої запропонованим методом, змінювалося з 0,4 до 0,45 (SKV_vyh – пряма 2).

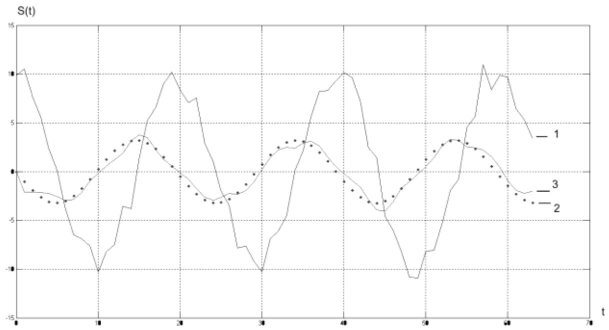

Рис. 1. Чисельний розрахунок похідної класичним методом. (1 – вхідна «зашумлена» косинусоїда; 2 – теоретична похідна; 3 – чисельна похідна).

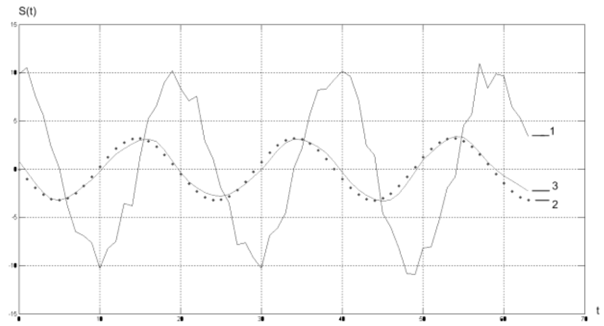

Рис. 2. Чисельний розрахунок похідної запропонованим методом. (1 – вхідна «зашумлена» косинусоїда; 2 – теоретична похідна; 3 – чисельна похідна).

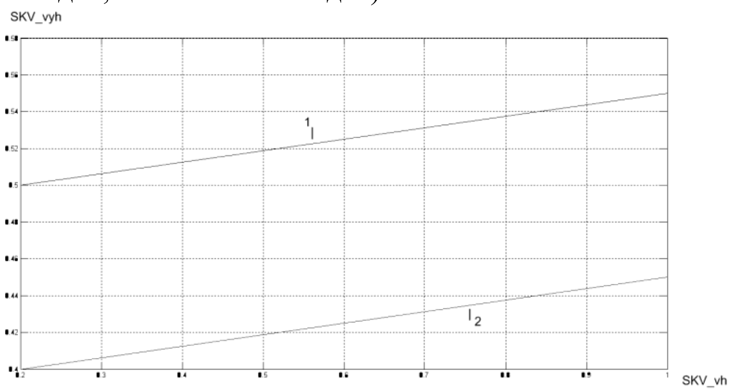

Рис. 3. Зміни середньоквадратичних відхилень чисельних похідних від теоретичної похідної.
(1 – класичний метод; 2 – запропонований метод).

В такий спосіб можна розрахувати і швидку сплайн-апроксимацію другої похідної (прискорення). Детальний розгляд цього методу виходить за межі даної статті.

Висновки. Таким чином, похибки чисельного розрахунку похідної від функції, яка спостерігається на фоні випадкових похибок дослідних даних, запропонованим методом менші ніж похибки чисельного розрахунку цієї ж похідної класичним методом.

Список літературних джерел

1. Ф.Хейт Математическая теория транспортных потоков – М: Изд-во «Мир», 1966. – 286 с.
2. В.В.Сильянов Теория транспортных потоков в проектировании дорог и организации движения – М.: «Транспорт», 1977. – 300 с.
3. Е.М.Лобанов, В.В. Сильянов Продолжительность реакции водителей в реальных дорожных условиях. – В кн.: Проектирование дорог и безопасность движения. – М.: Изд-во МАДИ, 1974, с.155-160. (Труды Моск. автом-дор. ин-та, вып. 72)
4. Е.М.Лобанов Время реакции водителя – М.: «Труды МАДИ», 1975, вып. 95, с.84-109.
5. Г.Корн, Т.Корн Справочник по математике – М.: «Наука», 1984. – 831 с.

ІНФОРМАЦІЙНІ СИСТЕМИ, ОБЧИСЛЮВАЛЬНА Й ЕЛЕКТРОННА ТЕХНІКА, СИСТЕМИ ЗВ'ЯЗКУ ТА ПРИЛАДОБУДУВАННЯ