

УДК 517.929.7

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНОЇ ДИФУЗІЇ

Т. А. Григорова

Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського
вул. Першотравнева, 20, м. Кременчук, 39600, Україна. E-mail: gasta1@yandex.ru

Розглянуто модель процесу високотемпературної дифузії, яка представлена системою крайових задач для рівнянь теплопровідності та дифузії. Проведено аналіз чисельних методів розв'язання рівнянь теплопровідності та дифузії, запропоновано підхід до розв'язку системи крайових задач який об'єднує кілька методів і дозволяє провести комп'ютерне моделювання процесу високотемпературної дифузії. Побудована комп'ютерна модель для проведення чисельних розрахунків у вигляді діаграми класів реалізації на мові моделювання UML. На основі розробленої моделі створена програма, проведені розрахунки і отримані графіки температурних розподілів у прес-формі та у виробі, а також графіки концентрації пластифікатора та легкоплавких домішок у виробі із спресованого порошку під час процесу спікання. Отримані результати можуть бути використані у системі автоматизованого керування процесом спікання виробів із порошкового матеріалу для отримання необхідних фізико-механічних властивостей виробу.

Ключові слова: комп'ютерна модель, чисельні методи, різницеві схеми.

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ДИФФУЗИИ

Т. А. Григорова

Кременчугский национальный университет имени Михаила Остроградского
ул. Первомайская, 20, г. Кременчуг, 39600, Украина. E-mail: gasta1@yandex.ru

Рассмотрена модель процесса высокотемпературной диффузии, представленная системой краевых задач для уравнений теплопроводности и диффузии. Проведен анализ численных методов решения уравнений теплопроводности и диффузии, предложен подход решения системы краевых задач, объединяющий несколько методов и позволяющий провести компьютерное моделирование процесса высокотемпературной диффузии. Построена компьютерная модель для проведения численных расчетов в виде диаграммы классов реализации на языке моделирования UML. На основе разработанной модели создана программа, проведены расчеты и получены графики температурных распределений в пресс-форме и в изделии, а также графики концентрации пластификатора и легкоплавких примесей в изделии из спрессованного порошка в процессе спекания. Полученные результаты могут быть использованы в системе автоматизированного управления процессом спекания изделий из порошкового материала для получения необходимых физико-механических свойств изделия.

Ключевые слова: компьютерная модель, численные методы, разностные схемы.

АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ. Процес високотемпературної дифузії під час гарячого пресування та спікання спресованого виробу із порошкових матеріалів описує математична модель, яка враховує зміну, концентрації пластифікатора та легкоплавких домішок за рахунок дифузії, витрат на хімічні реакції та конвективного переносу вздовж однієї або всіх координат зі швидкістю $\vec{v}_p = \{v_r, v_z, v_t\}$ [1]. Математична модель температурного поля виробу, що складається з порошку та пластифікатора, і процесу дифузії пластифікатора у виробі, представлена системою крайових задач для рівнянь теплопровідності та дифузії:

$$\begin{aligned} \lambda \Delta T - c_2 \rho_2 (\vec{v}_p \text{grad} T) - c_1 \rho_1 T_t = \\ - g(T, P), \quad P \in \Omega, t > 0, \\ m D \Delta C - (\vec{v}_p \text{grad} C) - m C_t = \\ f(T, C, P), \quad P \in \Omega, t > 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де c_i, ρ_i – теплофізичні характеристики спресованого порошку та пластифікатора, \vec{V}_p – швидкість у напрямі однієї з координатних осей, $\Delta = \text{div grad}$ – оператор Лапласа; $g(T, P) = w_1(T, P) - w_2(T)$ – різниця між щільністю інтенсивності джерел і стоків тепла; $f(T, C, P)$ – щільність інтенсивності витрати пластифікатора [2].

Мета роботи – комп'ютерне моделювання процесів високотемпературної дифузії.

МАТЕРІАЛ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ.

Розглянуті особливості розрахункової схеми, яка використовується для розв'язку крайових задач у моделі, що описує процеси високотемпературної дифузії порошкових матеріалів і проводиться її порівняння зі схемами, які використовують для розв'язку параболічних рівнянь, а також підходи комп'ютерного моделювання цієї задачі.

У циліндричній системі координат у області $\Omega \times t: \{0 < r < r_0, 0 < z < l, t > 0\}$ задача має вигляд

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_{1,2}}{\partial r} \right) + \lambda_{1,2} \frac{\partial^2 T_{1,2}}{\partial z^2} - c_{1,2} \rho_{1,2} \frac{\partial T_{1,2}}{\partial t} = \\ - \frac{I^2 \rho_0 (1 + \beta T_{1,2})}{S^2}, \quad r - \Delta \leq r < r_0 \\ 0, \quad 0 < r < r_0 - \Delta \end{cases}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) - v_z \frac{\partial C}{\partial z} - v_r \frac{\partial C}{\partial r} - \\ - \frac{\partial C}{\partial t} = f(T, C, P), \end{aligned} \quad (3)$$

$$0 < z < l, \quad T_{1,2} > 0,$$

$$T_{1,2}(r, z, 0) = T_0, \quad (4)$$

$$T_{1,2}(r, 0, t) = T_0, \quad T_{1,2}(r, l, t) = T_l, \quad (5)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=r_0} + \alpha_1(T_1 - T_c) + \varepsilon_1 \sigma(T_1^4 - T_c^4) = 0, \quad (6)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=r_0-\Delta-0} + \alpha_2(T_1 - T_c) + \varepsilon_2 \sigma(T_1^4 - T_c^4) = 0, \quad (7)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{r=r_0-\Delta+0} - \alpha_2(T_2 - T_{cl}) - \varepsilon_2 \sigma(T_2^4 - T_{cl}^4) = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0,$$

$$D \frac{\partial C}{\partial r} \Big|_{r=r_0+\Delta-0} = -\chi.$$

$$\left(\beta C + \frac{k_r D}{T_2} \left(\frac{\alpha_2}{\lambda} (T_2 - T_{cl}) + \frac{\varepsilon_2 \sigma D}{\lambda} (T_2^4 - T_{cl}^4) \right) \right) \quad (9)$$

$$\frac{\partial C}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0,$$

$$D \frac{\partial C}{\partial z} \Big|_{z=0} - \beta C = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial z} \Big|_{z=l} + \beta C = 0, \quad (10)$$

де $\alpha_{1,2}$, λ , $\varepsilon_{1,2}$, $T_{c,cl}$, S – коефіцієнти тепловіддачі, теплопровідності, ступінь чорноти, температура середовища і площа кільця, $f(T, C, P) = \gamma T(r, z, t)$. Усі теплофізичні й дифузійні характеристики вважаються відомими.

Перше рівняння системи – це рівняння теплопровідності (2), воно описує температурне поле циліндричної прес-форми і температурне поле холодно спресованого виробу.

Друге рівняння цієї системи (3) описує зміну концентрації пластифікатора і легкоплавких домішок у виробі. Граничні умови (8), (9) є умовами зміни концентрації пластифікатора та легкоплавких домішок у виробі, що спікається.

Розв'язок цієї задачі складається з кількох етапів. Спочатку знаходимо температурний розподіл у зовнішньому циліндрі, а далі переходимо до розв'язання задачі у внутрішньому циліндрі [2]. Таким чином маємо дві початково-крайові задачі:

– одновимірну відносно температури $T(z, t)$ для визначення температурного поля на границі зовнішнього і внутрішнього циліндрів [1]

$$\frac{\lambda_1 S}{2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} - \frac{c_1 \rho_1 S}{2 \Delta t} \frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{I^2 \rho_0 \beta}{2S} T_1 + \frac{I^2 \rho_0}{2S} + r_0 \left[\alpha(T_1 - T_c) + \varepsilon \sigma(T_1^4 - T_c^4) \right] + \frac{\lambda_2 S_1}{2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} - \frac{c_2 \rho_2 S_1}{2 \Delta t} \frac{\partial T_1}{\partial t} = 0 \quad (11)$$

$$v(0, t) = v(l, 0) = T_0, \quad v(l, t) = T_1, \quad (12)$$

де $S_1 = \pi(r_0 - \Delta)^2$;

– двовимірну – щодо визначення температурного розподілу та концентрації пластифікатора у внутрішньому циліндрі [1]:

$$\lambda_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) + \lambda_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} - c_2 \rho_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = 0, \quad (13)$$

$$0 < r < r_0 - \Delta, \quad 0 < z < l, \quad t > 0$$

$$D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) - v_z \frac{\partial C}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial t} = f(T, C, P), \quad (14)$$

$$T_2(r, z, 0) = T_0, \quad (15)$$

$$T_2(r, 0, t) = T_0, \quad T_2(r, l, t) = T_1. \quad (16)$$

Умови (7)–(10) залишаються без змін.

Для розв'язку крайових задач чисельним методом проведемо аналіз задачі.

Рівняння теплопровідності та дифузії відносять до рівнянь параболічного типу. Для розв'язку одновимірних рівнянь використовуються кінцево-різницева схеми: явна, неявна, неявна Кранка–Ніколсон, тришарова неявна схема Ріхтмайер і Мортон, тришарова явна схема Дюфорта – Франкела і їх модифікації.

Для розв'язку двовимірних рівнянь: різницева схема Кранка–Ніколсон, неявна двокрокова різницева схема змінних напрямів, загальна неявна схема змінних напрямів Дугласа–Ганна, схеми методів розщеплення і дробових кроків, явний метод змінних напрямів Саульєва та їх модифікації [3,5].

Крайові задачі (11), (12) і (13)–(16) є нелінійними завдяки нелінійності у граничних умовах, але початкові функції є гладкими, тому віддається перевага використанню різницевої схеми Кранка–Ніколсон [4], яка має другий порядок точності. Але з точки зору комп'ютерного моделювання використання різницевої схеми Кранка–Ніколсон для крайових задач (11), (12) і (13)–(16) не є доцільним, тому що задача (11), (12) є одновимірною, а (13)–(16) – двовимірною.

Використання схеми Кранка–Ніколсон для одновимірних задач приводить до розв'язку на $(n + 1)$ -му шарі за часом системи алгебраїчних рівнянь з трьох діагональною матрицею, а для двовимірних рівнянь – система складається з 16-ти лінійних рівнянь. Потрібне використання різних методів розв'язку для систем лінійних рівнянь, що ускладнює комп'ютерну модель. Для розв'язку задачі (13)–(16) обираємо загальну неявну схему змінних напрямів Дугласа–Ганна, алгоритм якої можна описати за допомогою послідовності рішень, що апроксимуються u^{*n+1} , u^{**n+1} і т.д., рівняння Кранка–Ніколсон [5] та на кожному кроці розщеплювання задача зводиться до розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь з трьохдіагональною матрицею. Лінійаризацію нелінійної граничної умови виконуємо згідно методу Ньютона–Рафсона–Канторовича [4].

Кінцево-різницева схема Кранка–Ніколсон для задачі (11), (12) в області $\bar{\Omega} \times t$ $\{0 \leq z \leq l, t > 0\}$ з інтервалами: $h = l/M$, $\Delta t = t_0/j_0$ має вигляд:

$$a^2 \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} =$$

$$\frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1} + u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{2h^2} +$$

$$+ Au_i^{j+1} + C(u_i^{j+1})^4 - B$$

де

$$A = \left(\frac{I^2 \rho_0 \beta}{S(\lambda_1 S + \lambda_2 S_1)} + \frac{2r_0 \alpha}{(\lambda_1 S + \lambda_2 S_1)} \right),$$

$$a^2 = \frac{c_1 \rho_1 S + c_2 \rho_2 S_1}{(\lambda_1 S + \lambda_2 S_1)}, \quad C = \frac{2r_0 \varepsilon \sigma}{(\lambda_1 S + \lambda_2 S_1)},$$

$$B = -\frac{I^2 \rho_0}{S(\lambda_1 S + \lambda_2 S_1)} + \frac{2r_0 (\alpha T_c + \varepsilon \sigma T_c^4)}{(\lambda_1 S + \lambda_2 S_1)}$$

Кінцево-різницева схема Дугласа-Ганна для розв'язку задачі (13)–(16) в області $\bar{\Omega} \times t \{0 \leq r \leq r_0 - \Delta, 0 \leq z \leq l, t > 0\}$ з інтервалами $h_1 = (r_0 - \Delta) / N, h_2 = l / M, \Delta t = t_0 / j_0$ має вигляд

$$\frac{u_{n,m}^{j+1/2} - u_{n,m}^j}{\Delta t / 2} = \frac{\lambda_2}{rc_2 \rho_2} \frac{u_{n+1,m}^{j+1/2} - u_{n,m}^{j+1/2}}{2h_1} +$$

$$+ \frac{\lambda_2}{c_2 \rho_2} \frac{u_{n-1,m}^{j+1/2} - 2u_{n,m}^{j+1/2} + u_{n+1,m}^{j+1/2}}{h_1^2} +$$

$$+ \frac{\lambda_2}{c_2 \rho_2} \frac{u_{n,m-1}^j - 2u_{n,m}^j + u_{n,m+1}^j}{h_2^2}$$

$$\frac{u_{n,m}^{j+1} - u_{n,m}^{j+1/2}}{\Delta t / 2} = \frac{\lambda_2}{rc_2 \rho_2} \frac{u_{n+1,m}^{j+1} - u_{n,m}^{j+1/2}}{2h_1} +$$

$$+ \frac{\lambda_2}{c_2 \rho_2} \frac{u_{n-1,m}^{j+1/2} - 2u_{n,m}^{j+1/2} + u_{n+1,m}^{j+1/2}}{h_1^2} +$$

$$+ \frac{\lambda_2}{c_2 \rho_2} \frac{u_{n,m-1}^{j+1} - 2u_{n,m}^{j+1} + u_{n,m+1}^{j+1}}{h_2^2}$$

на границях області

$$\frac{-u_{2,m}^{j+1} + 4u_{1,m}^{j+1} - 3u_{0,m}^{j+1}}{2h_1} = 0, \quad \text{для } n = 0,$$

для $n = N$ підставляємо значення з матриці температурного розподілу на границі внутрішнього циліндру:

$$\frac{u_{n,m}^{j+1/2} - u_{n,m}^j}{\Delta t / 2} = D \frac{u_{n+1,m}^{j+1/2} - u_{n,m}^{j+1/2}}{2h_1} +$$

$$D \frac{u_{n-1,m}^{j+1/2} - 2u_{n,m}^{j+1/2} + u_{n+1,m}^{j+1/2}}{h_1^2} +$$

$$+ D \frac{u_{n,m-1}^j - 2u_{n,m}^j + u_{n,m+1}^j}{h_2^2} - \gamma T_m^{j+1}$$

$$\frac{u_{n,m}^{j+1} - u_{n,m}^{j+1/2}}{\Delta t / 2} = \frac{D}{r_0} \frac{u_{n+1,m}^{j+1} - u_{n,m}^{j+1/2}}{2h_1} +$$

$$+ D \frac{u_{n-1,m}^{j+1/2} - 2u_{n,m}^{j+1/2} + u_{n+1,m}^{j+1/2}}{h_1^2} +$$

$$+ D \frac{u_{n,m-1}^{j+1} - 2u_{n,m}^{j+1} + u_{n,m+1}^{j+1}}{h_2^2} - \gamma T_n^{j+1}$$

на границях області

$$\frac{-u_{2,m}^{j+1} + 4u_{1,m}^{j+1} - 3u_{0,m}^{j+1}}{2h_1} = 0,$$

для $n = 0,$

$$\frac{-u_{N,m}^{j+1} + 4u_{N-1,m}^{j+1} - 3u_{N-2,m}^{j+1}}{2h_1} =$$

$$= -\chi \left(\beta C + \frac{k_T D}{T_N^{j+1}} \left(\frac{\alpha_2}{\lambda} (T_n^{j+1} - T_N^{j+1}) + \frac{\varepsilon_2 \sigma D}{\lambda} ((T_n^{j+1})^4 - (T_N^{j+1})^4) \right) \right) \text{ для}$$

$$n = N.$$

Проаналізуємо отриману схему розв'язання системи крайових задач з точки зору комп'ютерного моделювання. Вхідними параметрами є коефіцієнти, які описують матеріал і розміри виробу та прес-форми, а також кроки розбиття різницевої сітки по радіусу, по довжині виробу і по часу моделювання чисельного експерименту. Як вихідні дані необхідно отримати матриці температурних полів в прес-формі по довжині і у виробі по радіусу, і по довжині за заданий проміжок часу, а також матрицю розподілу концентрації легкоплавких домішок у виробі по радіусу і залежно від часу. Для зручного аналізу отриманого результату необхідно побудувати графіки розподілів.

Для комп'ютерного моделювання вибираємо мову UML, яка підтримується практично всіма сучасними засобами програмування, такими, наприклад, як Microsoft Visual Studio, NetBeans та інші. Оскільки задача носить виключно розрахунковий характер необхідно і достатньо побудувати комп'ютерну модель у вигляді діаграми класів реалізації [6, 7], яка відображає структуру програми. Комп'ютерна модель виконання розрахунків температурного поля і зміни концентрації домішок під час процесу високотемпературної дифузії наведена у вигляді діаграми класів на рис. 1.

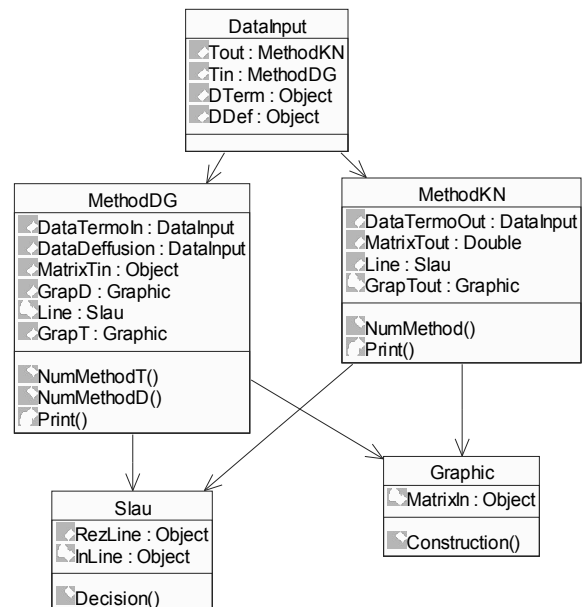


Рисунок 1 – Діаграма класів

За допомогою комп'ютерного моделювання проведено чисельні розрахунки температурного поля у прес-формі, яке відображено на рис. 2, та у спресованому виробі – на рис. 3, а також зміну концентрації домішок [8].

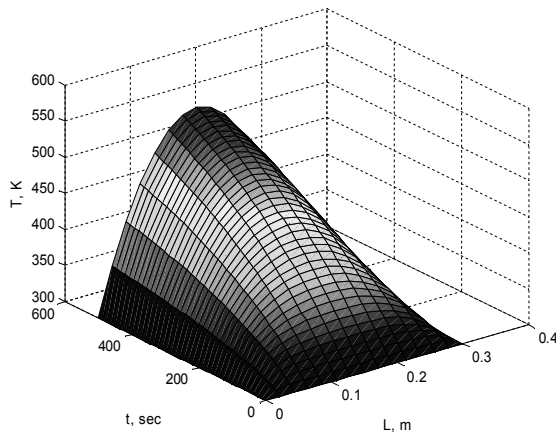


Рисунок 2 – Температурний розподіл у прес-формі

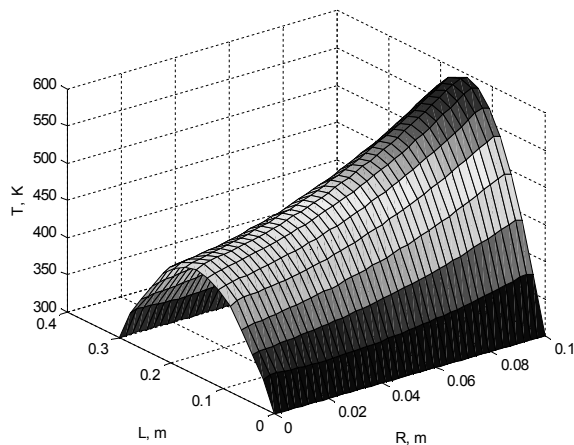


Рисунок 3 – Температурний розподіл у спресованому виробі

На рис. 4 зображено зменшення концентрації легкоплавких домішок біля поверхні виробу під час процесу спікання.

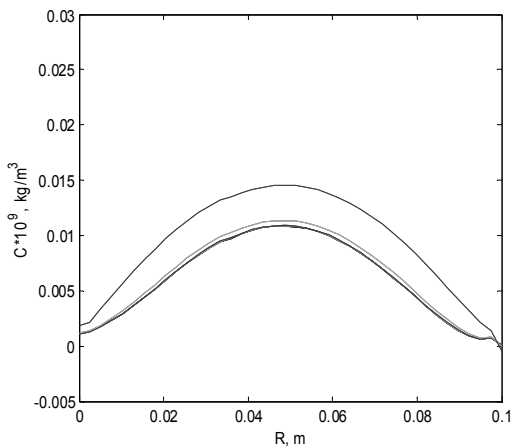


Рисунок 4 – Розподіл концентрації легкоплавких домішок

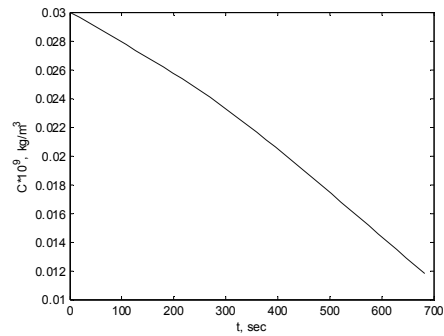


Рисунок 5 – Розподіл концентрації залежно від часу

На рис. 5 зображено зменшення концентрації домішок у внутрішньому циліндрі залежно від часу спікання.

ВИСНОВКИ. На основі проведеного аналізу розв'язку крайових задач була розроблена комп'ютерна модель процесу високотемпературної дифузії пластифікатора, яка виникає під час спікання виробів із порошкових матеріалів. Були проведені розрахунки і отримані графіки температурних розподілів і розподілів концентрації пластифікатора та легкоплавких домішок у виробі із спресованого порошку.

Розроблена комп'ютерна модель може бути використана у системі автоматизованого керування процесом спікання виробів із порошкового матеріалу, що дозволяє формувати у виробі необхідні фізико-механічні властивості.

ЛІТЕРАТУРА

1. Дослідження температурного поля двошарового циліндра з різними теплофізичними характеристиками / В.П. Ляшенко, Т.А. Григорова // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. – № 890. – Харків, 2010. – С. 47–52.
2. Математична модель високотемпературної дифузії у замкненій області / В.П. Ляшенко, Т.А. Григорова // Вісник Кременчуцького державного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук, 2010. – Вип. 5/2010 (64), част. 1. – С. 65–69.
3. Ляшенко В.П. Математичні моделі та методи розв'язку крайових задач у рухомій циліндричній області // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук: КрНУ, 2012. – Вип. 5/2012 (76), – С. 28–33.
4. Richtmyer R.D. Difference methods for initial value problems. – New York: Interscience, 1957. – 377 p.
5. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2 т. / Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.; пер. с англ. С.В. Сенина, Е.Ю. Шальмана. – М.: Мир, 1990. – 384 с.
6. Craic Larman Applying UML and Patterns/ An introduction to object-oriented analysis and design and the unified process. (3rd edition) // Craic Larman – Addison Wesley Professional. – 2004. – 628 p.

7. UML. Основы (3-е издание) / М. Фаулер, К. Скотт. – СПб: Символ-Плюс, 2006. – 188 с.

8. Алгоритмы: построение и анализ. (2 изд.) / Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.; пер. с англ. – М.: Изд. Дом «Вильямс», 2005. – 1296 с.

COMPUTER SIMULATION OF HIGH-TEMPERATURE DIFFUSION PROCESSES

T. Hryhorova

Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyyi National University

vul. Pershotravneva, 20, Kremenchuk, 39600, Ukraine. E-mail: gasta1@yandex.ru

A model of the process of high-temperature diffusion, which is represented by a system of boundary value problems for equations of heat conduction and diffusion is considered. Analysis of numerical methods for solving equations of heat conduction and diffusion is carried out. An approach of boundary value problems solution that combines several techniques and allows for computer simulation of high-temperature diffusion is proposed. The computer model of the numerical calculation is built in UML modeling language as a diagram of classes. Based on the developed model a program is created and the calculations are carried out by the author. Graphs of temperature distributions in the die mold and in the product and graphs of concentration of plasticizer and fusible impurity in the product of pressed powder during the sintering process are also obtained. The research results gained can be used in a computer-aided control system of sintering process of products made of powder materials to obtain the desired physical and mechanical properties of the product.

Key words: computer model, numerical methods, finite difference schemes.

REFERENCES

1. Lyashenko, V.P., Hryhorova, T.A. (2010), "Research the temperature field of two-layer cylinder with different thermal characteristics", *Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University*, no. 890, pp. 47–52, Kharkiv, Ukraine.

2. Lyashenko, V.P., Hryhorova, T.A. (2010), "Mathematical model of high-temperature diffusion in a closed region", *Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyyi National University*, vol. 64, iss. 5, part 1, pp. 65–69, KrNU, Kremenchuk, Ukraine.

3. Lyashenko V.P. (2012), "Mathematical models and methods for solving boundary value problems in moving cylindrical region", *Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyyi National University*, vol. 76, iss. 5, pp. 28–33, KrNU, Kremenchuk, Ukraine.

4. Richtmyer, R.D. (1957), *Difference methods for initial value problems*, Interscience, New York.

5. Andersen, D. A., Tannehil, J.C., Pletcher, R.H. (1990), *Vychislitel'naya hidromekhanika i teploobmen* [Computational fluid mechanics and heat transfer], in 2 vol., Mir, Moscow, Russia.

6. Craic Larman Applying UML and Patterns/ An introduction to object-oriented analysis and design and the unified process. (3rd edition) / Craic Larman – Addison Wesley Professional. – 2004. – 628 p.

7. Fowler, M., Skott, K. (2006), *UML Distilled* (3rd edition), Symbol-Plus, Saint-Petersburg, Russia.

8. Cormen Thomas H. Leiserson Charles E., Rivest, Ronald L., Stein Clifford (2005). *Introduction to Algorithms* (2nd edition), Publishing house «Viliams», Moscow, Russia.

Стаття надійшла 12.02.2013.