

УДК 51-74

**СИНТЕЗ СИСТЕМИ РЕГУЛЮВАННЯ З НЕЛІНІЙНИМ ЕЛЕМЕНТОМ І ВИПАДКОВОЮ ДІЄЮ****О. Г. Галаган, Т. А. Набок, І. О. Галаган**

Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського

вул. Першотравнева, 20, 39600, м. Кременчук, Україна. E-mail: golegg@mail.ru; Evgenia.Nabok@yandex.ru

Розглянуто оптимізацію параметрів системи автоматичного регулювання, яка складається з нелінійного без інерційного елемента та лінійної інерційної частини. Вхідна дія системи регулювання має випадкову складову. Основу проведених досліджень складають методи теорії автоматичного керування, теорії випадкових процесів, чисельні методи. Проведено статистичну лінеаризацію нелінійного елемента системи. Оптимізація здійснюється за параметрами лінійної частини системи регулювання за умовою незмінності структури регулювання. Запропоновано алгоритм чисельного розв'язку задачі та здійснено програмну реалізацію дослідження системи регулювання. Проведені чисельні експерименти, побудовані таблиці та графіки залежності середньоквадратичної помилки системи від параметрів системи регулювання.

**Ключові слова:** система автоматичного регулювання, статистична лінеаризація, оптимізація, аналіз і синтез системи, метод Ньютона.

**СИНТЕЗ СИСТЕМИ РЕГУЛЮВАННЯ С НЕЛІНІЙНИМ ЕЛЕМЕНТОМ І СЛУЧАЙНИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ****О. Г. Галаган, Т. А. Набок, І. О. Галаган**

Кременчугский национальный университет имени Михаила Остроградского

ул. Первомайская, 20, 39600, г. Кременчуг, Украина. E-mail: golegg@mail.ru; Evgenia.Nabok@yandex.ru

Рассмотрена оптимизация параметров системы автоматического регулирования, состоящей из нелинейного безинерционного элемента и линейной инерционной части. Входное воздействие системы регулирования имеет случайную составляющую. Основу проведенных исследований составляют методы теории автоматического управления, теории случайных процессов, численные методы. Выполнена статистическая линейаризация нелинейного элемента системы. Оптимизация осуществляется по параметрам линейной части системы регулирования при условии неизменности структуры регулирования. Предложен алгоритм численного решения задачи и осуществлена программная реализация исследования системы регулирования. Проведены численные эксперименты, построены таблицы и графики зависимости среднеквадратичной ошибки системы от параметров системы регулирования.

**Ключевые слова:** система автоматического регулирования, статистическая линейаризация, оптимизация, анализ и синтез системы, метод Ньютона.

**АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ.** Формування сучасних систем автоматичного регулювання (САР) зводиться до розв'язання так званих, задач аналізу та синтезу [1]. Здебільшого вхідний сигнал САР має випадкову складову, яка може бути наслідком випадкового збурення або перешкоди. Тому для формування систем автоматичного регулювання використовують методи теорії випадкових процесів [2–5]. Якщо система є нелінійною тоді задачі аналізу та синтезу, більш за всього, не матимуть аналітичного розв'язку. У таких випадках рішення отримують чисельними методами.

Існують методи, за якими нелінійні елементи систем автоматичного регулювання вдається лінеаризувати та застосувати методи лінійної теорії [1, 4, 5].

Якщо дія на вході системи регулювання має випадкову складову то, у деяких випадках, застосовують метод статистичної лінеаризації нелінійного елемента системи [4]. Ідея метода полягає у заміні нелінійного елемента наближенням до нього лінійним таким чином, щоб процеси на виході лінійного та нелінійного елемента були статистично еквівалентні.

У роботі [6] розв'язано задачу аналізу для систем автоматичного регулювання з випадковою дією. Було розглянуто систему з від'ємним зворотним зв'язком, яка складалася з нелінійного без інерційного елемента та лінійної інерційної частини. Критерієм статистичної еквівалентності було обрано умову мінімуму середнього квадрату помилки від

заміни нелінійної характеристики на лінійну. За вхідними імовірнісними характеристиками системи та моделлю системи автоматичного регулювання знайшли імовірнісні характеристики на виході САР, що дозволило оцінити якість роботи системи регулювання.

У результаті аналізу системи може виникнути необхідність заміни параметрів системи на більш якісні, на такі, щоб зводили помилку системи до мінімуму.

Таким чином залишається актуальним питання синтезу, або оптимізації, параметрів системи із заданою структурою.

Мета роботи – знайти оптимальні значення параметрів системи регулювання з нелінійним елементом і випадковою дією за мінімумом середньоквадратичної помилки.

**МАТЕРІАЛ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ.** Система регулювання, рис. 1, містить нелінійний без інерційний елемент  $Y = F(X)$ , що має характеристику  $Y = \text{sign}X$  та лінійну інерційну частину, яка описується диференціальним рівнянням:

$$T \frac{dz}{dt} + z(t) = Ky(t), \quad (1)$$

де  $T > 0$  – постійна часу,  $K > 0$  – коефіцієнт підсилення,  $Z(t)$  – сигнал на виході системи.

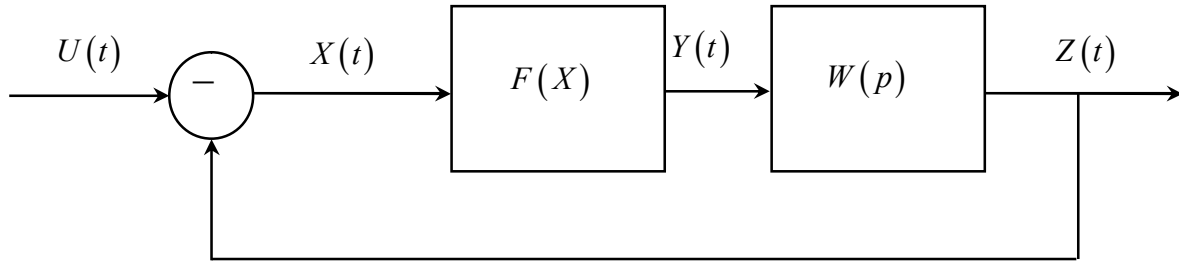


Рисунок 1 – Структурна схема нелінійної системи при випадковій дії

Передавальна функція  $W(p) = \frac{K}{Tp+1}$  визначається диференціальним рівнянням (1). На вхід системи поступає сигнал  $U(t) = m_u(t) + \dot{U}(t)$ , де  $\dot{U}(t)$  – випадкова складова сигналу  $U(t)$ , яка складається з перешкод та шумів;  $m_u(t) = M[U(t)]$  – математичне сподівання, яке є корисним сигналом. Нехай вхідний сигнал є стаціонарним процесом з математичним сподіванням  $m_u = 3$  та кореляційною функцією  $k_u(\tau) = 2e^{-2|\tau|}$ . Помилка системи, що видно зі структурної схеми (рис. 1), визначається рівністю:  $X(t) = U(t) - Z(t)$ .

Поставимо задачу: знайти оптимальні значення постійної часу  $T$  та коефіцієнту підсилення  $K$  за мінімумом середньоквадратичної помилки  $y_x(t)$ .

У роботі [6] для вищезгаданої системи автоматичного регулювання на області допустимих значень, отримана сукупність двох систем алгебраїчних рівнянь. Перша система (тривіальний випадок) складається з двох рівнянь:

$$m_x = 0;$$

$$(2T+1)y_x^3 + (T+1)4a^2Ky_x^2 + (4a^4K^2 - 4T - 2)y_x - 8a^2TK = 0, \quad (2)$$

де  $a^2 = \frac{1}{\sqrt{2p}}$ ;  $m_x$  – математичне сподівання помилки системи.

Друга система (загальний випадок) також у своєму складі має два рівняння:

$$m_x + 2a^2K \int_{-\infty}^{\frac{m_x}{y_x}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt - K - 3 = 0;$$

$$(2T+1)y_x^3 + (T+1)4a^2Ky_x^2 e^{-\frac{1}{2}\frac{m_x^2}{y_x^2}} + \left( 4a^4K^2 e^{-\frac{m_x^2}{y_x^2}} - 4T - 2 \right) y_x - 8a^2TK e^{-\frac{1}{2}\frac{m_x^2}{y_x^2}} = 0. \quad (3)$$

Системи отримано за умов (4) (області допустимих значень систем):

$$\begin{cases} m_x + 2a^2K \int_{-\infty}^{\frac{m_x}{y_x}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt - K \neq 0; \\ y_x + 2a^2Ke^{-\frac{1}{2}\frac{m_x^2}{y_x^2}} \neq 0; \\ (1+2T)y_x + 2a^2Ke^{-\frac{1}{2}\frac{m_x^2}{y_x^2}} \neq 0; \\ (1-2T)y_x + 2a^2Ke^{-\frac{1}{2}\frac{m_x^2}{y_x^2}} \neq 0. \end{cases} \quad (4)$$

де параметри системи  $T > 0, K > 0$ ; середньоквадратичне відхилення помилки  $y_x > 0$ .

Виникає необхідність скласти прикладну програму яка б дозволяла дослідити тривіальний випадок: знаходити розв'язок рівняння (2) за будь-яких значень  $T, K$  (розв'язати задачу аналізу); побудувати таблиці та графіки розв'язків, які дозволяють знаходити оптимальне значення середньоквадратичного значення помилки за змінними  $T, K$  (розв'язати задачу синтезу).

Друге рівняння системи (2) є кубічним рівнянням відносно  $\sigma_x$ . Складено програму у Mathcad, яка дозволяє розв'язувати кубічне рівняння за формулою Кардано. Рівняння має три дійсні корені, які у порядку зростання позначимо відповідно  $y_x = f0; f1; f2$ .

Результати дослідження залежності коренів  $f0; f1; f2$  від параметрів  $T, K$  можуть бути представлені у вигляді таблиць або графіків. За стовбцем таблиці будемо змінювати параметр  $K$ , за рядком – параметр  $T$ . Границі параметрів  $T, K$  і шаг можна встановлювати самостійно. За таблицею, можна обрати оптимальне значення  $\sigma_x$ , що задовольняє фізичному змісту задачі.

У тестовій задачі розглянуто розв'язання рівняння для випадку коли параметри змінюються в інтервалах  $0 \leq T \leq 9, 0 \leq K \leq 9$  з шагом  $h = 1$ .

Результати тестового дослідження середньоквадратичної помилки  $\sigma_x$  (тривіальний випадок) представлені, у вигляді таблиць та на рис. 2

Корені  $f0; f1; f2$  є функціями від  $T, K$ . На рис. 3 зроблено їх наочну інтерпретацію – корені представлені у вигляді поверхонь.

Система нелінійних рівнянь (3) не має аналітичного розв'язку. Обчислювальний пакет Mathcad,

також не розв'язує систему нелінійних рівнянь з двома невідомими та двома параметрами.

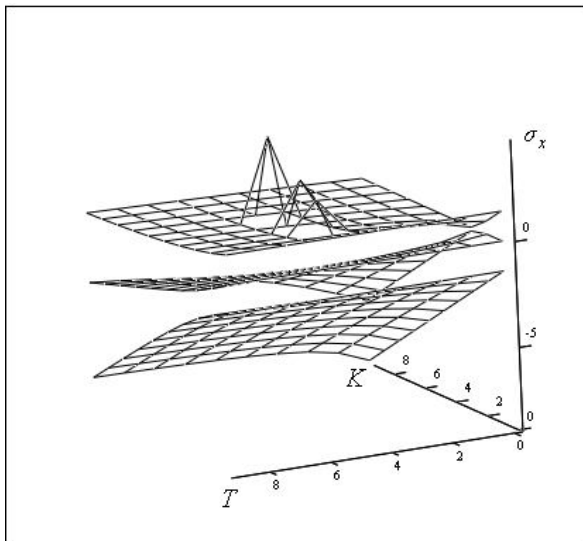
Для розв'язання системи використаємо чисельний метод Ньютона [7].

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-1.414	-1.414	-1.414	-1.414	-1.414	-1.414	-1.414	-1.414	-1.414	-1.414
1	-2.212	-2.102	-2.021	-1.959	-1.909	-1.868	-1.834	-1.806	-1.781	-1.759
2	-3.01	-2.815	-2.676	-2.571	-2.488	-2.422	-2.366	-2.319	-2.279	-2.244
3	-3.808	-3.541	-3.359	-3.227	-3.128	-3.049	-2.987	-2.935	-2.891	-2.855
f0=	4	-4.606	-4.275	-4.062	-3.915	-3.808	-3.728	-3.666	-3.616	-3.575
5	-5.404	-5.015	-4.779	-4.624	-4.517	-4.44	-4.381	-4.336	-4.3	-4.27
6	-6.202	-5.76	-5.507	-5.351	-5.247	-5.174	-5.12	-5.079	-5.047	-5.021
7	-6.999	-6.509	-6.245	-6.09	-5.991	-5.923	-5.874	-5.837	-5.808	-5.785
8	-7.797	-7.262	-6.991	-6.839	-6.745	-6.682	-6.638	-6.604	-6.578	-6.558
9	-8.595	-8.018	-7.743	-7.596	-7.508	-7.449	-7.408	-7.378	-7.355	-7.336

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	-0.159	-0.25	-0.313	-0.361	-0.399	-0.43	-0.456	-0.478	-0.497
2	-0.182	-0.493	-0.614	-0.693	-0.752	-0.798	-0.835	-0.867	-0.894	-0.918
3	-0.979	-1.06	-1.111	-1.147	-1.175	-1.197	-1.215	-1.23	-1.243	-1.254
f1=	4	-1.777	-1.72	-1.677	-1.644	-1.617	-1.596	-1.578	-1.564	-1.552
5	-2.575	-2.409	-2.27	-2.158	-2.068	-1.995	-1.935	-1.885	-1.844	-1.808
6	-3.373	-3.106	-2.872	-2.679	-2.522	-2.394	-2.289	-2.202	-2.13	-2.069
7	-4.171	-3.805	-3.476	-3.201	-2.976	-2.793	-2.643	-2.519	-2.415	-2.328
8	-4.969	-4.506	-4.079	-3.721	-3.429	-3.192	-2.997	-2.836	-2.702	-2.588
9	-5.767	-5.205	-4.68	-4.24	-3.882	-3.59	-3.352	-3.155	-2.99	-2.851

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1.414	1.414	1.414	1.414	1.414	1.414	1.414	1.414	1.414	1.414
1	0.616	0.798	0.903	0.975	1.029	1.07	1.104	1.131	1.154	1.173
2	0	0.383	0.555	0.671	0.758	0.822	0.881	0.926	0.964	0.996
3	0	0.213	0.367	0.485	0.579	0.649	0.72	0.774	0.82	0.86
f2=	4	0	0.145	0.268	0.372	0.461	0.536	0.602	0.658	0.708
5	0	0.11	0.21	0.3	0.38	0.44	0.513	0.569	0.619	0.664
6	0	0.089	0.173	0.25	0.322	0.387	0.446	0.499	0.548	0.593
7	0	0.075	0.147	0.215	0.278	0.338	0.393	0.443	0.49	0.533
8	0	0.065	0.128	0.188	0.245	0.299	0.35	0.398	0.442	0.484
9	0	0.057	0.113	0.167	0.219	0.268	0.315	0.36	0.402	0.441

Рисунок 2 – Таблиці залежності коренів  $y_x = f_0; f_1; f_2$  від параметрів  $T, K$



$\sigma_x = f_0; f_1; f_2$

Рисунок 3 – Графіки залежності коренів  $y_x = f_0; f_1; f_2$  від параметрів  $T, K$

Для системи (3) складемо функції  $F(x, y); G(x, y)$ :

$$F(x, y) = x + 2a^2 K \int_{-\infty}^{\frac{x}{y}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt - K - 3;$$

$$G(x, y) = y^3(1 + 2T) + 4y^2 a^2 K(1 + T) e^{\frac{1}{2} \frac{x^2}{y^2}} + 4y \left( a^4 K^2 e^{\frac{x^2}{y^2}} - \frac{1}{2} - T \right) - 8Ta^2 K e^{\frac{1}{2} \frac{x^2}{y^2}}. \quad (5)$$

Відомо із [7], що ітерації за методом Ньютона для СНР мають вигляд:

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} - W^{-1}(x, y) \begin{pmatrix} F(x_i, y_i) \\ G(x_i, y_i) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

де  $W^{-1}(x, y)$  – зворотна матриця для матриці Якобі. Вона визначається формулою (7):

$$W^{-1}(x, y) = \frac{1}{\det W(x, y)} \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial y} & -\frac{\partial F}{\partial y} \\ -\frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

де

$$\det W(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial x}. \quad (8)$$

Тоді, для СНР (3), ітерації за методом Ньютона зводимо до вигляду:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{1}{\det W(x_i, y_i)} \left[ F(x_i, y_i) \frac{\partial G(x_i, y_i)}{\partial y} - G(x_i, y_i) \frac{\partial F(x_i, y_i)}{\partial y} \right];$$

$$y_{i+1} = y_i - \frac{1}{\det W(x_i, y_i)} \left[ -F(x_i, y_i) \frac{\partial G(x_i, y_i)}{\partial x} + G(x_i, y_i) \frac{\partial F(x_i, y_i)}{\partial x} \right]. \quad (9)$$

Для (9) частинні похідні мають вигляд (10)–(13):

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + \frac{2a^2 K}{y} e^{\frac{1}{2} \frac{x^2}{y^2}}; \quad (10)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{2a^2 Kx}{y^2} e^{\frac{1}{2} \frac{x^2}{y^2}}; \quad (11)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 4a^2 Kx \left( -(1 + T) - \frac{2a^2 K}{y} e^{\frac{1}{2} \frac{x^2}{y^2}} + \frac{2T}{y^2} \right) e^{\frac{1}{2} \frac{x^2}{y^2}}; \quad (12)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = (3y^2 - 2)(1 + 2T) + \left( \frac{a^2 K}{y} [(1 + T) \times \right. \\ \left. \times (2y^2 + x^2) - \frac{2x^2 T}{y^2}] + a^4 K^2 \frac{y^2 + 2x^2}{y^2} \right) 4e^{-\frac{x^2}{y^2}} \quad (13)$$

Складено алгоритм розв'язання системи нелінійних рівнянь (3) за чисельним методом Ньютона. У системі Mathcad, за алгоритмом, розроблено програму, яка реалізує розв'язання СНР методом Ньютона, для будь яких значень  $T, K$ .

Програма має можливість представляти розв'язок системи (3) залежно від параметрів  $T, K$ , у вигляді таблиць. За аналогією до тривіального випадку, за стовбцем таблиць змінюється параметр  $K$ , за рядком – параметр  $T$ , а дослідник має можливість самостійно обирати інтервали та шаг зміни параметрів. За таблицями знаходять: розв'язки СНР (3) –  $m_x = f0(T, K)$ ;  $y_x = f1(T, K)$  (задача аналізу); значення параметрів  $T, K$  що оптимізують середнє

Справа на рис. 4 представлені графіки залежностей  $y_x(T) = f121; f122; f123$ , які отримали відповідно при  $K = 1; 3; 5$ . Маємо тенденцію до зростання функцій.

**ВИСНОВКИ.** Для САР, з нелінійним елементом та випадковою дією, проведено оптимізацію параметрів системи (структура системи не змінюється) за мінімумом середньоквадратичного відхилення помилки. Методами теорії автоматичного керування та теорії випадкових процесів задачі аналізу та синтезу САР зведено до системи нелінійних рівнянь з двома невідомими  $m_x, y_x$  (математичне сподівання та СКВ) та двома параметрами  $T, K$ . Програмними засобами реалізовано розв'язання кубічного рівняння за формулою Кардано та розв'язання системи нелінійних рівнянь методом Ньютона. Отримані таблиці та графіки для  $y_x$ , що дозволяють знайти оптимальні значення параметрів  $T, K$ , які мінімізують середньоквадратичну помилку САР (рис. 4).

Планується розв'язання задач аналізу та синтезу

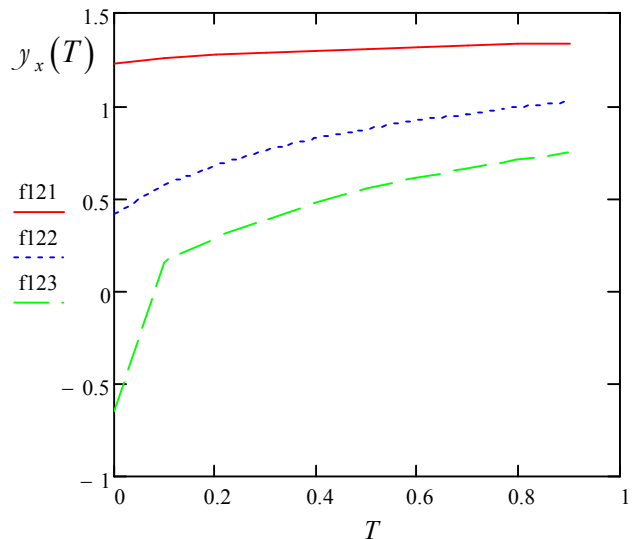
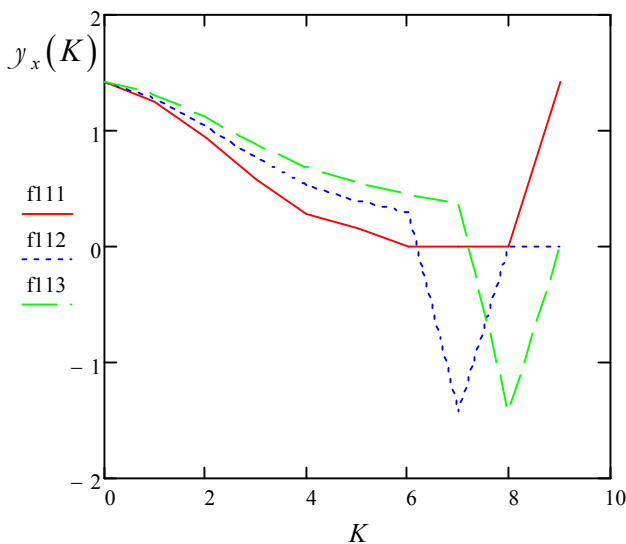


Рисунок 4 – Графіки залежності  $y_x = f1$  від параметрів  $T, K$

квадратичну помилку  $y_x$  і задовольняє фізичним умовам побудови системи (задача синтезу).

Проведено чисельний експеримент. Розглянуто розв'язання рівняння (загальний випадок) коли параметри змінюються в інтервалах  $0 \leq T \leq 9$ ,  $0 \leq K \leq 9$  з шагом  $h = 1$ . Програма дозволяє побудувати графіки розрізів для  $m_x = f0(T, K)$  та  $y_x = f1(T, K)$  за фіксованих значень параметрів  $T$  або  $K$ . На рис. 4 результати чисельного експерименту представлені у вигляді таких графіків. Зліва – залежності середньоквадратичної помилки  $y_x$  від коефіцієнту підсилення  $K$ . Графіки  $y_x(K) = f111; f112; f113$  отримали відповідно при  $T = 1; 3; 5$ . При малих значеннях коефіцієнту підсилення маємо тенденцію до спаду функції  $y_x(K)$ .

для подібних і більш складних за структурною схемою САР.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Иващенко Н.Н. Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем // Учебник для вузов. – М.: Машиностроение, 1978. – 736 с.
2. Пугачёв В.С. Теория случайных функций. – М.: Физматгиздат, 1962. – 884 с.
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и её инженерные приложения. – М.: Высш. шк., 2000. – 383 с.
4. Евсиков Ю.А., Обрезков Г.В., Разевиг В.Д. Прикладные методы анализа в радиотехнике. – М.: Высшая школа, 1985. – 343 с.

5. Дёч Р.А. Нелинейные преобразования случайных процессов. – М: Иностранная литература, 1961.

6. Галаган О.Г., Набок Т.А. Статистичний аналіз системи регулювання з нелінійним елементом // Ві-

сник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – 2011. – Вип. 4/2011 (69), част. 1. – С. 28–31.

7. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.

#### REGULATION SYSTEM SYNTHESIS WITH NONLINEAR ELEMENT AND RANDOM AFFECT

**O. Galagan, T. Nabok, I. Halahan**

Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University

vul. Pershotravneva, 20, Kremenchuk, 39600, Ukraine. E-mail: golegg@mail.ru; Evgenia.Nabok@yandex.ru

The authors have analyzed the optimization of automatic regulation parameter system that consists of nonlinear element inertial part. The inlet effect of the regulation system considered has a random component. The research undertaken by the authors mainly is based on the methods of automatic management theory, the theory of random processes, and numeral methods. Within the frame of studies statistics linearization of nonlinear system element is done. Optimization is conducted on the linear component parameters of the regulation system on condition of structure regulation constancy. The algorithm of linear task solution is proposed and program realization of the system regulation research is made. The results of numeral experiments conducted are presented, as well as tables and schemes of mean-square system error dependence on parameters of the regulation system.

**Key words:** automatic control system, statistical linearization, optimization, system analysis and synthesis, Newton's method.

#### REFERENCES

1. Ivashchenko, N.N. (1978), *Avtamatischeskoe regulirovanie* [Automatic regulation], Mashinostroenie, Moscow, Russian.

2. Pugachev, V.S. (1962) *Teoriya sluchaynykh funktsiy* [Theory of random functions], Fizmatizdat, Moscow, Russian.

3. Venttsel, E.S., Ovcharov L.A. (2000) *Teoriya sluchaynykh funktsiy i eyo inzhenernyye prilozheniya* [Theory of random processes and its engineering applications], Vysshya shkola, Moscow, Russian.

4. Evsikov, Yu.A., Obrezkov, G.V., Razevig, V.D. (1985) *Prikladnyye metody analiza v radiotekhnike* [Applied methods of analysis in radio engineering], Vysshya shkola, Moscow, Russian.

5. Dech, R.A. (1961) *Nelineynyye preobrazovaniya sluchaynykh protsessov* [Nonlinear transformations of random processes], II, Moscow, Russian.

6. Galagan, O., Nabok, T. (2011) “The statistical analysis of system of regulation with the nonlinear element”, Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University, vol. 69, iss. 4, pp. 28-31, KrNU, Kremenchuk, Ukraine.

7. Samarskii, A.A., Gulin, A.V. (1989) *Chislennyye metody* [Numerical methods], Nauka, Moscow, Russian.

Стаття надійшла 25.04.2013.

