

УДК 681.586.72

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ГРАВИМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ЛОКАЛИЗАЦИИ ПУСТОТ

П. С. Смолянский, Т. П. Козикова

ГВУЗ «Криворожский национальный университет»

ул. Лермонтова, 13/48, г. Кривой Рог, 50002, Украина. E-mail: tayadubinina2008@yandex.ru

Гравиразведка, или гравиметрия является одним из старейших методов геофизики, предназначенных для обнаружения аномалий геологического строения, поиска полезных ископаемых, интерпретации геологических данных. Математические методы гравиразведки относятся к теории обратных некорректных задач, методы решения которых бурно развиваются в настоящее время. Предложен метод упрощения процесса решения многомерных интегральных уравнений гравиразведки путем разделения скалярных источников поля на поверхностные и объемные. Получены оценки погрешности вычисления коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений при переходе к кусочно-постоянной аппроксимации функции плотности поверхностных источников. Предложены два эффективных алгоритма расчета коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных значений плотности среды. Проведены численные эксперименты для оценки реальной степени эффективности предложенных алгоритмов. Выявлен устойчивый максимум относительной производительности в зависимости от величины дискретизации трехмерной области. Определен наиболее эффективный объем блока при вычислении коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений.

Ключевые слова: гравиразведка, дискретизация, локализация пустот, кусочно-постоянная аппроксимация.

ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ ВИРІШЕННЯ ГРАВИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ ЛОКАЛІЗАЦІЇ ПУСТОТ

П. С. Смолянський, Т. П. Козикова

ДВНЗ «Криворізький національний університет»

вул. Лермонтова, 13/48, г. Кривий Ріг, 50002, Україна. E-mail: tayadubinina2008@yandex.ru

Гравірознавдя, або гравіметрія є одним із найстаріших методів геофізики, призначених для виявлення аномалій геологічної будови, пошуку корисних копалин, інтерпретації геологічних даних. Математичні методи гравірознавдя належать до теорії зворотних некоректних задач, методи розв'язання яких бурхливо розвиваються на даний час. Запропоновано метод спрощення процесу рішення багатовимірних інтегральних рівнянь гравірознавдя шляхом поділу скалярних джерел поля на поверхневі та об'ємні. Отримано оцінки похибки обчислення коефіцієнтів системи лінійних алгебраїчних рівнянь при переході до кусково-постійної апроксимації функції щільності поверхневих джерел. Запропоновано два ефективних алгоритми розрахунку коефіцієнтів системи лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих значень щільності середовища. Проведено чисельні експерименти для оцінки реального ступеня ефективності запропонованих алгоритмів. Виявлено стійкий максимум відносної продуктивності залежно від величини дискретизації тривимірної області. Визначено найбільш ефективний обсяг блоку при обчисленні коефіцієнтів системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Ключові слова: гравірознавдя, дискретизація, локалізація пустот, кусково-постійна апроксимація.

АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ. Гравиразведка, или гравиметрия является одним из старейших методов геофизики, предназначенных для обнаружения аномалий геологического строения, поиска полезных ископаемых, интерпретации геологических данных. Математические методы гравиразведки относятся к теории обратных некорректных задач, методы решения которых бурно развиваются в настоящее время [1, 2]. Обратными задачами называют задачи восстановления структуры объектов по косвенным данным. Такие задачи возникают в тех случаях, когда внутреннее строение физического объекта недоступно прямому исследованию, в то время как косвенная информация о структуре объекта может быть получена, например, в виде измеренных физических полей, собственных или представляющих собой отклик объекта на заданное внешнее воздействие. Для задач гравиметрии особенностями строения объекта являются аномалии плотности в виде рудного тела либо пустот.

В научных исследованиях задача определения геометрии рудного тела и его состава широко из-

вестна [3], задача же локализации пустот является относительно новой. Ее актуальность вызвана как техногенными факторами – шахтными и карьерными выработками, так и причинами естественного происхождения.

Следует заметить, что задача обнаружения пустот имеет целый ряд существенных особенностей, которые позволяют отнести ее решение к отдельному классу задач гравиметрии:

- модуль градиента плотности для пустот гораздо выше, чем в случае определения рудного тела;
- наиболее важные задачи определения пустот являются эволюционными, пустоты не имеют четкой локализации в пространстве, иногда пустота "мигрирует" к поверхности с катастрофическим ее обрушением;
- пустоты имеют существенно меньший объем, чем рудное тело;

Эти особенности иногда затрудняют, а иногда и облегчают решение, во всяком случае, требуют разработки специфических методов решения такого класса задач.

Следует заметить, что не всякая задача определения пустот имеет однозначное решение. Рассмотрим вариацию известного примера [3]. Пусть задана область V , заполненная средой с постоянной плотностью единица, за исключением шаровой области, имеющей плотность два. Допустим, что из этого шара извлечено вещество, таким образом, чтобы пустая шаровая полость размещалась в центре шара, причем объем полости равен половине объема шара плотности два. Рассмотрим вектор силы тяжести от масс расположенных в области V , для точек наблюдения, которые лежат вне области среды V .

Тогда вектор силы тяжести во всех точках среды T будет иметь одинаковое значение как для среды постоянной плотности один, заполняющую область V , так и для описанной выше составной среды переменной плотности. Это вытекает из классического результата И. Ньютона.

Анализ предыдущих исследований. Для решения задач определения пустот используются различные методы. В работе исследованы методы решения этой задачи с помощью методов гравиразведки.

В общем виде решение задачи гравиразведки [3] приводит к многомерным интегральным уравнениям относительно неизвестной плотности $\rho(x, y, z)$ пространственно распределенных источников гравитационных аномалий. Функцию плотности будем называть в дальнейшем средой. Требуется в этих условиях определить неизвестное распределение плотности ρ во всей трехмерной области D . Для этого следует решить трехмерное интегральное уравнение первого рода:

$$G \cdot \int_D (z - z_0) \cdot \rho(x, y, z) / R^3 \cdot dV = F_z(x_0, y_0, z_0). \quad (1)$$

Здесь G – гравитационная постоянная, $\rho(x, y, z)$ – объемная плотность среды;

$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ – расстояние между текущей точкой $M(x, y, z)$ и точкой наблюдения $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_0 \in T$, D – исследуемая область, в которой локализованы источники гравитационных аномалий. Через F_z обозначена вертикальная проекция силы тяжести в точке наблюдения $M_0(x_0, y_0, z_0)$ от всей области D . Будем считать известными значения F_z в каждой точке области T (области измерений) за счет построения достаточно точных интерполяционных приближений сглаженных реальных измерений. Существенно то, что множество точек наблюдения T лежит вне области интегрирования D , и в частности, интеграл (1) является собственным. Такая задача в гравиразведке называется внешней [3].

В некоторых специальных случаях удобно рассматривать двухмерное гравитационное поле, не зависящее от одной из координат, например, поле, создаваемое длинным цилиндром с плотностью

масс, не меняющейся в направлении образующей цилиндра. Такие носители масс являются удобными физическими абстракциями, приближенно описывающими поле реальных трехмерных гравитационных аномалий. В этом случае решение обратной задачи гравиметрии можно получить, решив двухмерное интегральное уравнение первого рода:

$$2G \cdot \iint_S \rho(x, z) \cdot (z - z_0) / R^2 \cdot dS = F_z(x_0, z_0). \quad (2)$$

Здесь $\rho(x, z)$ – известная плотность среды, $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2}$ – расстояние между текущей точкой $M(x, z)$ и точкой наблюдения $M_0(x_0, z_0)$, S – плоская область локализации источников гравитационных аномалий. Решение уравнения (2) проще (1), но это уравнение принципиально не может отразить всех особенностей задачи локализации пустот. Поэтому в дальнейшем мы будем изучать только уравнение (1).

Цель работы – оценка и исследование методов решения гравиметрической задачи локализации пустот.

МАТЕРИАЛ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ. *Постановка задачи.* В работе [4] был предложен способ решения некоторых типов обратной задачи гравиразведки для среды, состоящей из двух компонентов, на основе адаптивного параллельного алгоритма. Однако там среда могла иметь только два возможных значения плотности. Было показано, что в качестве таких плотностей можно взять 0 для пустот и 1 для всей остальной среды. Но законность такого предположения в [4] не была детально исследована. Данная работа посвящена более детальному изучению некоторых аспектов рассмотренных и новых задач.

Сразу следует заметить, что внешняя задача определения конфигурации пустот для бинарной среды и ограниченной области D всегда имеет единственное решение, что очень существенно. Это можно показать таким образом. Считаем, что среда бинарна, т.е. плотности среды могут принимать только два известных значения: ρ_1 и ρ_2 . Но определяющее значение для задачи гравиразведки в этом случае имеет только величина $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2$, т.к. бинарная среда легко приводится к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно новых неизвестных ρ'_1 и ρ'_2 ,

$$\text{где } \rho'_1 = \Delta\rho = \rho_1 - \rho_2 \text{ и } \rho'_2 = 0.$$

Для этого достаточно из правой части (1) вычесть

$$G \cdot \int_D (z - z_0) \cdot \rho_2 / R^3 \cdot dV = F_z(x_0, y_0, z_0).$$

Далее, разделим результат на $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2$. Теперь бинарная среда свелась к среде, где одной из возможных плотностей блоков будет нулевая, а другая имеет единичную плотность, эта задача эквивалентна предыдущей.

Докажем, что если решение уравнения (1) для ограниченной области D и описанной выше бинарной среды существует, то оно и единственно. Допустим, что имеется два различных решения – $\rho'(x, y, z)$ и $\rho''(x, y, z)$, гравитации от которых имеют одинаковое значение во всех точках наблюдения $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_0 \in T$. Найдем разность этих решений:

$$\rho(x, y, z) = \rho''(x, y, z) - \rho'(x, y, z).$$

Тогда гравитация от непустого множества D_i во всех точках равна нулю, так как решения $\rho'(x, y, z)$ и $\rho''(x, y, z)$ не совпадают на некотором множестве D_N . Выберем среди всех точек наблюдения $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_0 \in T$ точку M'_0 , имеющую максимальную координату z , если же таких точек несколько, то возьмем любую из них. Теперь рассмотрим интеграл (1) для этой точки наблюдения:

$$G \cdot \int_{D_N} (z - z_0) \cdot \rho(x, y, z) / R^3 \cdot dV = 0.$$

Заметим, что $G > 0$, $\rho(x, y, z) = 1$ и $z - z_0 \leq 0$, причем очевидно, что не для всех точек z выполняется равенство $z - z_0 = 0$. Следовательно, из теорем анализа [5] вытекает, что обязательно должно быть

$$G \cdot \int_{D_N} (z - z_0) \cdot \rho(x, y, z) / R^3 \cdot dV < 0.$$

Что касается вопроса существования решения уравнения (1) для ограниченной области D и бинарной среды при произвольной правой части, то очевидно, что решение не всегда существует, что является типичным для уравнений первого рода [1, 2]. Например, не существует решения уравнения интегрального (1), где правая часть равна нулю в точке M'_0 из предыдущего доказательства. Нахождение достаточных условий, которым должна удовлетворять правая часть интегрального уравнения (1) (даже в случае бинарной среды и ограниченной области D), чтобы существовало решение, в данной статье рассматриваться не будет.

Влияние общих свойств среды (объемной функции плотности) и их учет оказывается решающим при разработке эффективных и устойчивых методов решения интегральных уравнений первого рода (1) и (2) [4, 6]. Заметим, что не всякая функции среды реализуемая, т.е. не все плотности могут быть реализованы и реально существуют в природе. Еще более узкий класс сред и их свойств актуален для исследования в заданных условиях конкретного железорудного бассейна, месторождения, карьера. Как уже говорилось, не для всякой реальной среды существует единственное решение. Наконец, при адаптации разрабатываемых методов следует привязываться к условиям конкретной среды, что позволяет полностью использовать ее особенности. Но если разрабатывать достаточно универсальные методы решения геофизических задач, то следует

изучить вопросы решения уравнений (1) и (2) в достаточно общей постановке. Этим вопросам и посвящена статья.

Изложение материала и результатов. Будем рассматривать трехмерный случай, как наиболее общий. Рассмотрим пока несколько более общее интегральное уравнение, чем (1). Теоретически удобно считать, что в точках наблюдения известны все три составляющие силы тяжести, хотя на практике всегда будем использовать только F_z . Дискретизируем область D на совокупность конечных, односвязных, замкнутых объемов (элементов)

$$D = \bigcup_{i=1}^n D_i.$$

Объемы D_i могут пересекаться либо по общей стороне, либо иметь только общие ребра, либо вершины, либо не иметь общих точек вообще. Таким образом, объем (мера) пересечения этих элементов всегда равен нулю: $m(D_i \cap D_j) = 0, i \neq j$. Обозначим $D_i \cap D_j = S_{ij}$, где S_{ij} – общая сторона этих объемов, если она есть.

По каждому из объемов D_i массы могут быть распределены с постоянной либо переменной плотностью, эти объемы будем выбирать таким образом, чтобы внутри каждого из них среда была относительно однородной и непрерывной. Будем в дальнейшем различать три типа среды: пустоты, руду и породу. Различие между плотностями руды и породы здесь не столь существенно, эти категории выделяем для возможного количественного использования информации о геометрии и составе рудного тела. Относительная однородность в данном контексте означает, что пустоты, порода или руда не могут принадлежать одному объему одновременно, градиент от функции плотности внутри элемента постоянен либо меняется незначительно. Для физически реализуемых сред условие относительно однородной и непрерывной среды в рамках одного объема может выполнено даже при относительно равномерной и крупной дискретизации.

Следовательно, $D = D_R \cup D_{PR} \cup D_P$, где D_R – объединение элементов, которые составляют область руды, D_{PR} – породы, D_P – область пустот.

Запишем интегральный оператор уравнения (1) в виде

$$P(\rho, D, T) = \sum_{i=1}^N \iiint_{D_i} \rho(x, y, z) \cdot \bar{R} / R^3 \cdot dV, \quad (3)$$

где $\rho(x, y, z)$ – функция плотности, N – общее число объемов.

Из векторного анализа [7] известно $\nabla(f \cdot g) = \nabla f \cdot g + f \cdot \nabla g$, (4) где $f = f(x, y, z)$, $g = g(x, y, z)$ – скалярные функции от трех переменных, через ∇ обозначен градиент функции. В трехмерном случае

$$\nabla(1/R) = \bar{R} / R^3, \quad (5)$$

здесь

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} -$$

расстояние между текущей точкой $M(x, y, z)$ и точкой наблюдения $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Заметим, что из (5) вытекает, что

$$P(\rho, D, T) = \sum_{i=1}^N \iiint_{D_i} \rho \cdot \nabla(1/R) dV. \quad (6)$$

Из анализа известна теорема о градиенте [7]:

$$\iiint_D \nabla(U) \cdot dV = \iint_S \bar{n} \cdot U \cdot dS. \quad (7)$$

Пусть $f = \rho$ – плотность среды, а $g = 1/R$, тогда можно записать, используя (4):

$$\sum_{i=1}^N \iiint_{D_i} \nabla(\rho/R) \cdot dV = \bar{I}_1 + \bar{I}_2, \quad (8)$$

где

$$\bar{I}_1 = \sum_{i=1}^N \iiint_{D_i} \rho \cdot \nabla(1/R) \cdot dV, \quad \bar{I}_2 = \sum_{i=1}^N \iiint_{D_i} \nabla \rho / R \cdot dV.$$

Однако в (8)

$$\sum_{i=1}^N \iiint_{D_i} \nabla(\rho/R) \cdot dV = \sum_{i=1}^N \iint_{S_i} \bar{n}_i \cdot \rho / R \cdot dS, \quad (9)$$

здесь S_i – поверхность, ограничивающая объем D_i , а \bar{n}_i – внешняя нормаль к поверхности S_i . Нормаль \bar{n}_i в (9) является векторной функцией точки поверхности. Следовательно,

$$P(\rho, D, T) = \sum_{i=1}^N \bar{n}_i \cdot \rho / R dS - \sum_{i=1}^N \iiint_{D_i} \nabla \rho / R dV$$

или

$$P(\rho, D, T) = \sum_{i=1}^N \bar{n}_i \rho / R dS - \sum_{i=1}^N \iiint_{D_i} \nabla \rho / R dV, \\ P(\rho, D, T) = \bar{I}_1 - \bar{I}_2. \quad (10)$$

Это основная формула, на основании которой упрощается анализ интегрального оператора (3) и его свойств в зависимости от функции плотности $\rho(x, y, z)$, области D , ее дискретизации D_i , величины и расположения области наблюдения T относительно D . Преобразование (10) расщепляет источники силы тяжести на поверхностные \bar{I}_1 и объемные \bar{I}_2 .

Интеграл \bar{I}_1 зависит от источников поля тяжести, распределенных только на поверхности элементов дискретизации, он играет первостепенную роль при определении величины и локализации пустот. Если два элемента D_1 и D_2 имеют общую поверхность S_{12} , то есть $D_1 \cap D_2 = S_{12}$, то на ней функция плотности в точке $M(x, y, z)$ будет равна

$\bar{n}_1 \cdot (\rho_1 - \rho_2) = \bar{n}_2 \cdot (\rho_2 - \rho_1)$, где \bar{n}_1, \bar{n}_2 – внешние нормали к поверхности S_{12} для элементов D_1 и D_2 соответственно. Через ρ_1, ρ_2 обозначены пределы функции плотности в точке $M(x, y, z)$ со стороны для элементов D_1 и D_2 . Будем называть скачком нормальной плотности величину

$$\bar{n}_1 \cdot (\rho_1 - \rho_2) = \bar{n}_2 \cdot (\rho_2 - \rho_1). \quad (11)$$

Если же функция $\rho(x, y, z)$ непрерывна на множестве из двух объемов $V_{12} = D_1 \cup D_2$, и они имеют общую поверхность $S_{12} = D_1 \cap D_2$, то на S_{12} скачок плотности будет равен нулю, суммарный интеграл по S_{12} для \bar{I}_1 также будет равен нулю. Таким образом, интеграл \bar{I}_1 в формуле (10) будет отличен от нуля только для тех поверхностей, где $\rho_1 \neq \rho_2$, либо для тех поверхностей, которые не являются общими для каких-то объемов. Такая ситуация возникает для следующих поверхностей:

- 1) на поверхности Земли (верхней стороне D);
- 2) на нижней стороне D ;
- 3) на боковых сторонах D ;
- 4) на поверхностях элементов, где функция плотности терпит разрыв между соседними элементами по геологическим причинам;
- 5) на поверхности пустот.

В случаях 1–3 легко учесть – на поверхности Земли плотность среды известна, влиянием боковых сторон D , а тем более нижней стороны D , на поле силы тяжести в области наблюдения T (на поверхности Земли) можно пренебречь, считая эти области весьма удаленными от T . Что же касается возможных естественных разрывов функции плотности, обусловленных геологическими причинами, то если есть большие скачки нормальной плотности (11) на границе некоторых соседних объемов и они имеют существенную долю среди всех D_i , то они сыграют роль естественных “помех”. В таком случае преобразование (10) нецелесообразно, т.к. будет трудно различать скачки естественные нормальной плотности и такие же скачки, обусловленные наличием полостей. В этом случае следует непосредственно решать дискретизированное уравнение (1).

Теоретическим примером такой среды может быть грунт (среда с низкой постоянной плотностью), содержащий одинаковые железные шары (среда с высокой постоянной плотностью), которые располагаются регулярно в пространстве, например, в узлах прямоугольной решетки, при условии, что суммарный объем таких шаров в общем объеме D значителен (10–20 % и более).

Если же функция плотности непрерывна на D , то преобразование (10) целесообразно, т.к. в этом случае естественные “помехи” отсутствуют. Для таких сред только поверхностная плотность на по-

верхности пустот оказывает влияние на величину интеграла \bar{I}_1 .

Теперь изучим влияние дискретизации на уравнение (10), точнее на \bar{I}_1 . Будем считать область D и объемы D_i – прямоугольными параллелепипедами со сторонами параллельными осям координат. В этом случае вектор нормали \bar{n}_i – постоянные вектора, и их можно вынести из под знака поверхностного интеграла в (10). В гравirazведке рассматривается и измеряется только вертикальная составляющая силы тяжести – F_z .

Поэтому будем рассматривать только z – составляющую суммы интеграла $\bar{I}_1 : I_{1z} = \sum_{i=1}^N I_{zi}$.

Очевидно

$$I_{zi} = I_{z2i} - I_{z1i}, \quad (12)$$

где $I_{z2i} = \iint_{S_{2i}} \rho(x, y, z_{2i}) / R \cdot dS$

и $I_{z1i} = \iint_{S_{1i}} \rho(x, y, z_{1i}) / R \cdot dS$.

Здесь S_{2i}, S_{1i} – верхнее и нижнее основание D_i , которые параллельны плоскости Оху, z_{i2}, z_{i1} – постоянные координаты граней S_{2i}, S_{1i} . Знак минус появился в (12) потому, что внешняя нормаль к S_{1i} и ось oZ направлены в противоположную сторону.

Определим погрешность P_i вычисления интеграла (12) при предположении, что на верхнем и нижнем основании S_{2i}, S_{1i} объема D_i функцию плотности заменяем постоянными, равными ρ_{i2}, ρ_{i1} :

$$P_i = \iint_{S_{2i}} (\rho - \rho_{i2}) / R \cdot dS - \iint_{S_{1i}} (\rho - \rho_{i1}) / R \cdot dS = P_{i2} - P_{i1}$$

Далее, $|P_i| \leq |P_{i1}| + |P_{i2}|$ и $|P_{i1}| \leq |\rho(x, y, z_{i1} - \rho_{i1}) \cdot S_i / R_{i1}|$, аналогично $|P_{i2}| \leq |\rho(x, y, z_{i2} - \rho_{i2}) \cdot S_i / R_{i2}|$. Здесь R_{i1}, R_{i2} – минимальные расстояния от вершин оснований S_{2i}, S_{1i} до точки наблюдения $M_0(x_0, y_0, z_0)$, S_i – площадь оснований верхнего и нижнего основания прямоугольного параллелепипеда D_i . Обозначим

$$\varepsilon_{i1} = |\rho(x, y, z_{i1} - \rho_{i1})|, \varepsilon_{i2} = |\rho(x, y, z_{i2} - \rho_{i2})|.$$

Окончательно, для погрешности вычисления коэффициентов СЛАУ при определении плотностей дискретизированного интегрального уравнения будет справедлива оценка:

$$|P_i| \leq S_i \cdot (\varepsilon_{i1} / R_{i1} + \varepsilon_{i2} / R_{i2}).$$

Если $\varepsilon_{i1} = \varepsilon_{i2} = \varepsilon$ для любого i , то:

$$|P_i| \leq \varepsilon \cdot S_i \cdot (1/R_{i1} + 1/R_{i2}) = \varepsilon \cdot C_i. \quad (13)$$

Здесь константа C_i зависит от точки наблюдения и параметров дискретизации, величина ε – от геологической информации.

Из формулы (13) следует вывод, что для минимизации погрешности следует производить неравномерную дискретизацию по "слоям": вблизи области наблюдения дискретизацию среды нужно производить как можно мельче, далее крупнее.

Кроме того, формула (13) показывает, что даже в случае непрерывной функции плотности, для которой интеграл \bar{I}_1 по (10) вычисляется абсолютно точно, дискретизация вносит погрешности, величина которых зависит от параметров дискретизации и величины возможной вариации функции плотности.

Теперь рассмотрим интеграл

$$\bar{I}_2 = \sum_{i=1}^N \iiint_D \nabla \rho / R \cdot dV.$$

Интеграл \bar{I}_2 носит вспомогательный характер, но может быть с успехом использован при теоретическом моделировании различных сред, для проверки эффективности различных методов решения задачи гравirazведки и учета влияния помех в виде переменных параметров среды. В этом его основное значение. Этот интеграл может быть тождественно равен нулю для широкого класса сред, например, для сред с кусочно-постоянной функцией плотности. В частности для случая среды с пустотелым шаром, рассмотренным в начале статьи, этот интеграл равен нулю.

Как правило, на практике колебания градиента среды очень невелики и носят случайный характер, потому их влияния взаимно компенсируются и \bar{I}_2 близок к нулю. Кроме того, не следует забывать, реально нас интересует только компонента I_{2z} , которая может быть существенно меньше чем $|\bar{I}_2|$.

Геологическая информация о величине $\nabla \rho$ практически всегда отсутствует, кроме редкого на практике случая достаточно точно известного расположения и строения рудного тела. В этом случае следует вычислить \bar{I}_2 аналитически или по кубатурным формулам. Затем следует перенести известное значение \bar{I}_2 в правую часть дискретизированного интегрального уравнения (1).

Алгоритм расчета коэффициентов СЛАУ. Представление (10) дает существенные вычислительные выгоды для ряда реальных сред. Для вычисления I_{zi} в случае, если объемы D_i – прямоугольные параллелепипеды со сторонами параллельными осям координат, нужно взять поверхностный интеграл вида

$$I = \iint_S dS / R, \quad (14)$$

только по двум граням из шести. Здесь S – прямоугольник со сторонами, которые параллельны осям Oх, Oу, плоскость S перпендикулярна оси Oz, $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ – расстояние между текущей точкой $M(x, y, z)$ и точкой наблюдения $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_0 \in T$.

Интеграл (14) может быть вычислен в конечном виде в элементарных функциях для прямоугольной области S. По верхнему основанию объема D_i он равен:

$$I_{z2i} = V_{22} - V_{21}, \quad (15)$$

где $V_{22} = F(x'_2, y'_2, z'_2) - F(x'_2, y'_1, z'_2)$,

$$V_{21} = F(x'_1, y'_2, z'_2) - F(x'_1, y'_1, z'_2).$$

Здесь $x'_2 = x_2 - x_0, x'_1 = x_1 - x_0$,

$$y'_2 = y_2 - y_0, y'_1 = y_1 - y_0,$$

$$z'_2 = z_2 - z_0, z'_1 = z_1 - z_0.$$

Аналогично интеграл (14) по нижнему основанию объема D_i равен:

$$I_{z1i} = V_{12} - V_{11},$$

где $V_{12} = F(x'_2, y'_2, z'_1) - F(x'_2, y'_1, z'_1)$,

$$V_{11} = F(x'_1, y'_2, z'_1) - F(x'_1, y'_1, z'_1).$$

Здесь обозначено:

$$F(u, v, w) = u \cdot L(v + R) + v \cdot \text{Ln}(u + R) - w \cdot \text{Arctg}(uv / (w \cdot R)), \quad (16),$$

где $R = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$.

Формула (15) является многомерным аналогом формулы Ньютона-Лейбница. Она получена путем последовательного нахождения неопределенных интегралов по переменной x и затем y и в результате получена "первообразная" (16).

Следует отметить, что в формуле (16) есть еще слагаемые, но они взаимно уничтожаются при вычислении (15). Формула (15) является линейная комбинация значений формулы (16) в вершинах объемов D_i .

Отсюда вытекает первый способ оптимизации расчета коэффициентов матрицы СЛАУ для решения дискретизированного уравнения (1), которые представляют собой интегралы

$$I_z^{JK} = \iint_{S_2} dS / R - \iint_{S_1} dS / R, \text{ где поверхности } S_2 \text{ и } S_1$$

ограничивают объем D_{JK} сверху и снизу. Здесь $I = 1, Nx, J = 1, Ny, K = 1, Nz$. Следует вычислить функцию (16) в узлах прямоугольной трехмерной сетки, которую образует $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$. Из

полученных значений формируем интеграл (14) для каждой области D_i . Пусть область D разбита на $N = N_x \cdot N_y \cdot N_z$ объемов, где N_x, N_y и N_z – число делений области D по осям Oх, Oу и Oz соответственно. Тогда требуется вычислить функцию

(16) в $M = (N_x + 1) \cdot (N_y + 1) \cdot (N_z + 1)$ точках.

Будем называть этот способ алгоритмом 1.

Стандартный метод расчета коэффициентов матрицы СЛАУ для решения дискретизированного уравнения (1) сводится к вычислению функции (16) в $8 \cdot N_x \cdot N_y \cdot N_z$ точках. Этот алгоритм будем называть стандартным алгоритмом. Поэтому предложенный алгоритм 1 расчета коэффициентов СЛАУ является более эффективным, а именно теоретически он будет быстрее стандартного в $KU = 8 \cdot N_x \cdot N_y \cdot N_z / [(N_x + 1) \cdot (N_y + 1) \cdot (N_z + 1)]$ раз, здесь KU – теоретический коэффициент ускорения.

Можно предложить и второй вариант эффективного алгоритма на основании (14). Будем вычислять коэффициенты СЛАУ "послойно". Для этого зафиксируем слой $K=1$, и вычислим значения функции (16) во всех $(Nx+1) \cdot (Ny+1)$ точках верхнего и нижнего "слоя". После этого сформируем коэффициенты СЛАУ, которые относятся к "слою" K. Затем достаточно вычислить значения функции (16) во всех $(Nx+1) \cdot (Ny+1)$ точках верхнего "слоя", а значения нижнего "слоя" уже вычислены на предыдущем шаге, это старые значения верхнего "слоя". Число операций и в первом и во втором случае оптимизации примерно равны, но второй алгоритм требует значительно меньше динамической памяти, чем первый. Будем называть этот способ алгоритмом 2.

Следует заметить, что значение функции (16) в алгоритмах 1 и 2 вычисляется в каждой вершине трехмерной сетки, которую образует $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$,

только один раз, в стандартном алгоритме эта функция будет вычисляться восемь раз в каждом внутреннем узле трехмерной прямоугольной сетки.

Для выяснения реальной степени эффективности алгоритмов 1 и 2 и сравнения их со стандартным алгоритмом были проведены численные эксперименты с различными параметрами дискретизации N_x, N_y, N_z . Для удобства полагалось $N=N_x=N_y=N_z$. Эта величина указана в левой колонке таблицы. Во второй колонке приведен

$$KU = 8 \cdot N_x \cdot N_y \cdot N_z / [(N_x + 1) \cdot (N_y + 1) \cdot (N_z + 1)]$$

– теоретический коэффициент ускорения предложенных алгоритмов 1 и 2 по сравнению со стандартным по количеству операций. В следующих двух колонках приведены реальные коэффициенты ускорения алгоритмов 1 и 2 относительно стандартного. Они вычислялись путем сравнения времени выполнения стандартного алгоритма и алгоритмов 1 и 2: $KUS_i = T_s / T_i, i = 1, 2$. Наконец, в правой колонке указан коэффициент ускорения первого алгоритма относительно второго: $KU_{12} = T_1 / T_2$. Для повышения точности эксперимента процесс расчета каждого алгоритма повторялся заданное число раз (50–1000), при этом учитывалось общее время расчета. При каждом значении N численные эксперименты производились 3–5 раз, результат усреднялся.

Таблиця 1 – Коэффициенты ускорения алгоритмов 1 и 2 относительно стандартного алгоритма

N	Теор. KU	KUS ₁	KUS ₂	KU ₁₂
30	7.2505	4.48148	4.653846	0.96296296
40	7.4288	4.4705882	4.691358	0.95294118
50	7.5386	4.6144578	4.670731	0.98795181
60	7.6130	4.4700461	4.685990	0.95391705
70	7.6667	5.2650602	5.355392	0.98313253
80	7.7073	5.8106796	6.401069	0.90776699
90	7.7242	4.7447405	5.369841	0.88359046
100	7.7526	4.2180775	4.827586	0.87374462
110	7.7857	4.0909091	4.814815	0.84965035
120	7.8033	3.7555556	4.828571	0.77777778
130	7.8182	3.5740741	4.873737	0.73333333
140	7.8310	3.468391	4.808765	0.72126437
150	7.8421	3.3866667	4.807571	0.70444444
160	7.8519	3.3304348	4.910256	0.67826087
170	7.8605	3.188811	4.903226	0.65034965
180	7.8681	3.2	4.814159	0.66470588
190	7.8750	3.1683168	4.848485	0.65346535
200	7.8812	3.1921543	4.81545	0.66289894

Результаты численных экспериментов показывают максимальное ускорение первого и второго алгоритмов при N=80 (рис. 1).

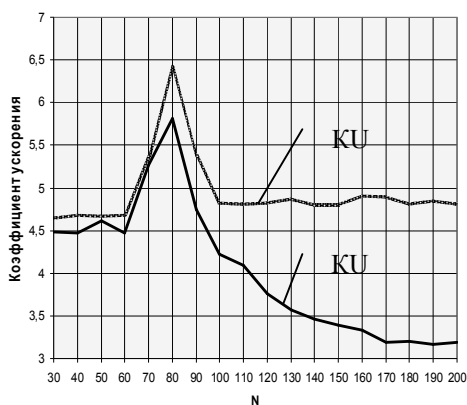


Рисунок 1 – Зависимость коэффициентов ускорения алгоритмов 1 и 2 от параметра дискретизации N

При росте уровня дискретизации происходит уменьшение степени производительности относительно стандартного алгоритма, причем производительность первого алгоритма падает быстрее. Это связано, прежде всего, с использованием больших объемов динамической памяти. Второй алгоритм использует динамическую память экономнее и показатели у него лучше, реальный коэффициент ускорения почти равен 5. Можно рекомендовать вычислять коэффициенты СЛАУ по-блочно, наиболее оптимальный объем блока определяется параметрами дискретизации N=80. На рис. 2 приведено отношение средних времен расчета коэффициентов СЛАУ при различных N. При возрастании N видна устойчивая тенденция улучшения временных

показателей второго алгоритма относительно первого. Как уже было сказано выше, это связано с ростом нагрузки на динамическую память.

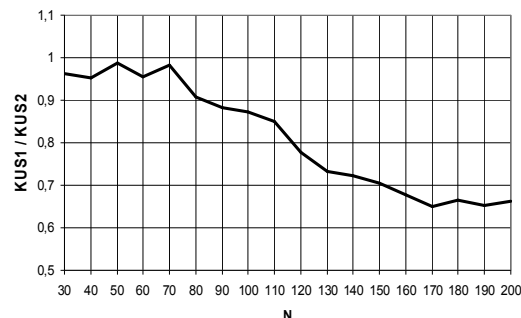


Рисунок 2 – Отношение коэффициентов ускорения алгоритмов 1 и 2 в зависимости от N

ВЫВОДЫ И ДАЛЬНЕЙШЕЕ НАПРАВЛЕНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ.

- 1) Предложен метод упрощения процесса решения многомерных интегральных уравнений гравirazведки путем разделения скалярных источников поля на поверхностные и объемные.
- 2) Получены оценки погрешности вычисления коэффициентов СЛАУ при переходе к кусочно-постоянной аппроксимации функции плотности поверхностных источников.
- 3) Предложены два эффективных алгоритма расчета коэффициентов СЛАУ для определения неизвестных значений плотности среды.
- 4) Проведены численные эксперименты для оценки реальной степени эффективности предложенных алгоритмов 1 и 2. Выявлен устойчивый максимум относительной производительности в зависимости от величины дискретизации трехмерной области D. Определен наиболее эффективный объем блока при вычислении коэффициентов СЛАУ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Самарский А.А. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
2. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. – К.: Наукова думка, 1986. – 544 с.
3. Гравirazведка. Справочник геофизика / Под ред. Е.А. Мудрецовоу. – М.: Недра, 1990. – 608 с.
4. Козикова Т.П., Смолянский П.С. Адаптивный способ решения обратной задачи гравirazведки для двухкомпонентной среды // Математическое моделирование. – 2013. – № 1(28).
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. – М.: Физматлит, 2003. – 864 с.
6. Старостенко В.И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. – К.: Наукова думка, 1978. – 228 с.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы. – М.: Наука, 1974. – 832 с.

INVESTIGATION OF MATHEMATICAL METHODS SOLVING THE GRAVITY PROBLEM
OF CAVITY LOCALIZATION**P. Smolyanskiy, T. Kozikova**

Krivyi Rig National University

vul. Lermontova 13/48, Krivoy Rog, 50002, Ukraine. E-mail: tayadubinina2008@yandex.ru

The authors have proposed a method for simplifying the process of solving of multidimensional integral equations of gravity prospecting by dividing the scalar field sources into the surface and volume one. It was found the calculation error of the coefficients of linear algebraic equation in the transition to a piecewise constant approximation of the density of surface sources. The authors have proposed two efficient algorithms calculating the coefficients of linear algebraic equation to determine the unknown values of the density of the medium. The numerical experiments to assess the real degree of effectiveness of the proposed algorithms were performed. It was revealed a stable maximum relative performance depending on the sampling of three-dimensional field. The most efficient block volume of the calculation of the coefficients of linear algebraic equation were also determined.

Key words: gravity prospecting, localization cavities, piecewise constant approximation.

REFERENCES

1. Tikhonov, A.N., Samara, A.A. (1986), *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for solving ill-posed problems], Nauka, Moscow, Russia.

2. Verlan, A.F., Sizikov, V.S. (1986), *Integralnye uravneniya: metody, algoritmy, programmy* [Integral equation methods, algorithms and programs], Naukova Dumka, Kyiv, Ukraine.

3. Gravirazvedka. Spravochnik geofizika [Gravity prospecting. Reference book for geophysical scientists], (1990), ed. by Mudretsova, E.A., Nedra, Moscow, Russia.

4. Fikhtengol'ts, G.M. (2003), *Kurs differentsialnogo I integralnogo vytschislenii* [Differential and Integral calculations], Vol. 2, Fizmatlit, Moscow, Russia.

5. Starostenko, V.I. (1978), *Ustoichivye chislennyye metody v zadachakh gravimetrii* [Stable numerical methods in gravity] Naukova Dumka, Kyiv, Ukraine.

6. Korn, G., Korn, T. (1974), *Spravochnik po matematike dlia nauchnykh rabotnikov i inzhenerov. Opredeleniya, teoremy, formuly* [Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. Definitions, theorems, formulas], Nauka, Moscow, Russia.

Стаття надійшла 15.05.2013.