УДК 539.3

ЗАСТОСУВАННЯ СПЕЦІАЛЬНИХ МЕТОДІВ ПІДСУМОВУВАННЯ ДО РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Л. М. Кривоблоцька
Кіровоградський національний технічний університет
просп. Університетський, 8, м. Кіровоград, 25006, Україна. E-mail: larisa_krivoblotsky@list.ru

Методами розв'язування задач деформівного твердого тіла є аналітичні та чисельні методи. Аналогічні задачі математичної фізики розв'язуються як у лінійній постановці, так і в нелінійній. При розв'язанні тестових нелінійних задач підтверджена ефективність і достовірність спеціального методу підсумовування, сформульована схема метода введення фіктивного параметра. На основі проведених досліджень розроблений метод розв'язування нелінійних задач, які підбирались із таким розрахунком, щоб вони відображали характерні риси основного класу задач: наявність нелінійності, нескінченної області для шуканого розв'язку, затухання його на "нескінченності" тощо.

Ключові слова: спеціальні методи, нелінійна задача, сингулярні ітерації, фіктивні параметри.

ПРИМЕНЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ В РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Л. Н. Кривоблоцкая
Кировоградский национальный технический университет
просп. Университетский, 8, г. Кировоград, 25006, Украина. E-mail: larisa_krivoblotsky@list.ru

Методами решения задач деформируемого твердого тела являются аналитические и численные методы. Аналогичные задачи математической физики решаются как в линейной постановке, так и в нелинейной. При решении тестовых нелинейных задач подтверждена эффективность и достоверность специального метода суммирования, сформулирована схема метода введения фиктивного параметра. На основе проведенных исследований разработан метод решения нелинейных задач, которые подбирались таким образом, чтобы они отражали характерные черты основного класса задач: наличие нелинейности, бесконечной области для искомого решения, затухание его на "бесконечности" и т.п.

Ключевые слова: специальные методы, нелинейная задача, сингулярные итерации, фиктивные параметры.

АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ. В багатьох задачах математичної фізики при розв'язуванні їх різними ітераційними методами (малого параметру, методом Ньютона, простих ітерацій) зустрічаються сингулярні ітерації, що необмежено зростають на "нескінченності" або в околі особливих точок. Порядок цих ітерацій невпинно збільшується зі зростанням номера наближення. У роботах [1–3] було запропоновано і математично обґрунтовано метод узагальненого підсумовування розкладів за параметром. На основі цього методу розв'язана низка задач механіки деформівного твердого тіла.

Мета роботи – застосування деяких спеціальних методів регуляризації одержаних сингулярних ітерацій.

МАТЕРІАЛ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ. Зазначені в меті роботи методи демонструються на розв'язанні нелінійних задач, для яких в наявності малий параметр і край області, який віддалено на "нескінченність". Сформулюємо метод розв'язку нелінійних задач, який умовно назвемо методом уведення фіктивного параметру.

Викладаємо формальну сторону методу. Нехай задано деяке нелінійне операторне рівняння типу

$$Lu + L_1 u + L_2 u + A(u) = q\ , \qquad (1)$$

де L, L_1, L_2 – лінійні диференціальні оператори, причому L має найвищий порядок, u – шукана функція, $A(u)$ – нелінійна частина.

Припускаємо, що до рівняння (1) мають місце граничні умови.

Тоді сутність пропонованого методу в наступному:

а) вводимо фіктивний безрозмірний параметр ε як співмножник при одному з доданків $L_1 u,\ L_2 u,\ A(u),\ q$ (але не при $L\,u$!), наприклад, при $L_1 u$; замість рівняння (1) маємо друге

$$L\,u + \varepsilon\, L_1 u + L_2 u + A(u) = q\ ; \qquad (2)$$

б) формальний розв'язок рівняння (2) знаходимо у стандартній формі

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k\ ; \qquad (3)$$

в) підставляємо (3) в рівняння (2), знаходимо відомим методом послідовність рівнянь для визначення функцій u_k ;

г) в кінцевому рахунку знаходимо формальний розв'язок типу

$$\tilde{u} = u_0 + \varepsilon\, u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \ldots \qquad (4)$$

Звідси розв'язок рівняння (1) одержимо, коли покладемо $\varepsilon = 1$.

Але ряд $\tilde{u}\big|_{\varepsilon=1} = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ може бути повільно збіжний або розбіжний. Тому до ряду (4) застосовуємо викладені в статтях [1, 2] методи підсумовування, а потім покладаємо $\varepsilon = 1$. Цілком зрозуміло, що необхідно перевіряти, чи задовольняють нові ряди граничним умовам і рівнянням рівноваги.

Розглянемо дві задачі.

Першу граничну задачу розглянемо в області $0 \le \rho \le \infty$ для диференціального рівняння

$$\left(1+2\rho\right)^2 u(\rho)u'(\rho) = -\frac{3}{4}\varepsilon \tag{5}$$

при граничній умові

$$u(\rho)\big|_{\rho=0} = 1 \tag{6}$$

і умові обмеженості розв'язку при $\rho \to \infty$ ($\varepsilon \ge 0$ – параметр).

Точний розв'язок поставленої задачі має вигляд

$$u(\rho,\varepsilon) = \sqrt{1 - \frac{3\,\varepsilon\,\rho}{2\left(1+2\rho\right)}}\ . \tag{7}$$

Бачимо, що

$$\lim_{\rho\to\infty} u(\rho,\varepsilon) = \sqrt{1-\frac{3\varepsilon}{4}}\ , \tag{8}$$

і звідси випливає, що параметр ε повинен змінюватись в таких межах $0 \le \varepsilon \le \frac{4}{3}$.

Як і раніше вважаємо, що точний розв'язок в скінченому виді неможливо знайти; застосовуємо метод розкладу по параметру ε.

Одержуємо

$$u_1(\rho,\varepsilon) = 1 - \frac{3}{4}\frac{\rho}{1+2\rho}\varepsilon - \frac{9}{32}\left(\frac{\rho}{1+2\rho}\right)^2\varepsilon^2 - \frac{27}{128}\left(\frac{\rho}{1+2\rho}\right)^3\varepsilon^3 - \ldots \tag{9}$$

Цей розклад, як відомо справедливий в околі $\varepsilon = 0$. Елементарними перетвореннями встановлюємо, що

$$u(\rho,\varepsilon) = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon\upsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2\upsilon^2 - \frac{1}{16}\varepsilon^3\upsilon^3 - \ldots, \tag{10}$$

де $\upsilon = \dfrac{3\rho}{2(1+2\rho)}$.

Бачимо, що наближений розв'язок (10) задовольняє умові (6) і умові на "нескінченності" (з певною похибкою).

Тепер необхідно звернути увагу на таку обставину. В монографії [4] автори розглядають частинний варіант функції (7), тобто для випадку $\varepsilon = 1$:

$$u(\rho,1) = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\rho}{1+2\rho}}, \tag{11}$$

для якої $\lim_{\rho\to\infty}(\rho,1) = \frac{1}{2}$.

Потім функцію (10) розкладають у ступеневий ряд

$$u(\rho,1) = \left(1+z_1\right)^{1/2}\left(1+z_2\right)^{-1/2};\ z_1 = \frac{1}{2}\rho,\ z_2 = 2\rho,$$

маємо

$$u\ (\rho,1) = 1 - \frac{3}{4}\rho + \frac{39}{32}\rho^2 - \frac{131}{64}\rho^3 + \ldots \tag{12}$$

Бачимо, що цей ряд задовольняє лише умові $u(\rho)_{\rho=0} = 1$.

Щоб перевірити ефективність Паде-перетворення певного типу, автори [4] застосовують до цього майже розбіжного ряду вказане перетворення. Дані наближених обчислень порівнюють з точними даними, які одержують на основі виразу (11).

У результаті показано ефективність Паде-перетворенння для $\rho \in \left[0,\rho^*\right]$, де ρ^* – достатньо "далеке" значення змінної ρ^*, $\rho \in [0,\infty]$.

Покладемо в (9) $\varepsilon = 1$; одержуємо ряд виду

$$u_1(\rho,1) = 1 - \frac{3}{4}\frac{\rho}{1+2\rho} - \frac{9}{32}\left(\frac{\rho}{1+2\rho}\right)^2 - \frac{27}{128}\left(\frac{\rho}{1+2\rho}\right)^3 - \ldots \tag{13}$$

Бачимо, що цей вираз задовольняє умові при $\rho = 0;$ при $\rho \to \infty$ він обмежений і вже на основі лише трьох членів встановлюємо, що $\lim_{\rho\to\infty} u_1(\rho,1) = 0{,}51$.

Отже, випадковим розміщенням параметра ε в рівнянні (5) удалося зразу надати розв'язок у формі (13), на основі якого можна вже на основі лише трьох наближень проводити обчислення $\forall\,\rho \in [0,\infty)$.

Виявилось, що вираз (12) є не що інше, як перетворений ступеневий ряд згідно з певним типом підсумовуючої функції.

Розглянемо *другу елементарну задачу*.

Необхідно знайти розв'язок $u(\rho,\varepsilon)$ в області $1 \le \rho < \infty$ нелінійного диференціального рівняння

$$\frac{du}{d\rho} = -\varepsilon\left(m\ln\rho + 1\right)\rho^{m-1}u^2, \tag{14}$$

який повинен бути на "нескінченності" обмеженим, тобто

$$\lim_{\rho\to\infty} u(\rho,\varepsilon) = 0,\ \ \forall\varepsilon \ge 0\ , \tag{15}$$

а при $\rho = 1$ задовольняти граничній умові

$$u(\rho,\varepsilon)\big|_{\rho=1} = 1,\ \forall\varepsilon \ge 0\,. \tag{16}$$

У вказаних співвідношеннях: $\varepsilon \ge 0$ – параметр, значення якого може бути як малим, так і великим; $m \in N$; усі параметри і величини безрозмірні.

Точний розв'язок цієї задачі має вигляд

$$u = u(\rho,\varepsilon) = \frac{1}{1+\varepsilon\,\rho^m\ln\rho} \tag{17}$$

Вважаємо, що точний розв'язок "неможливо знайти" і застосовуємо для розв'язування задачі метод розкладу за параметром ε. У результаті одержуємо розв'язок (у трьох–чотирьох наближеннях):

$$u(\rho,\varepsilon) \approx 1 - \varepsilon\rho^m\ln\rho + \varepsilon^2\rho^{2m}\ln^2\rho - \varepsilon^3\rho^{3m}\ln^3\rho\,. \tag{18}$$

Бачимо, що на основі цього наближення можна проводити обчислення лише при таких ε, ρ, які задовольняють нерівності $\left|\varepsilon\,\rho^m\, ln\,\rho < 1\right|$. Однак, апроксимація (18) не задовольняє умові (15).

Замість апроксимації (18) розглядаємо згідно запропонованого метода нову апроксимацію

$$\overset{*}{u}=\overset{*}{u}(\rho,\lambda,\sigma,\varepsilon)=S_4^*=1\cdot\delta_1(\rho,\lambda,\sigma)-\varepsilon\rho^m ln\rho\cdot\delta_2(\rho,\lambda,\sigma)+$$
$$+\varepsilon^2\rho^{2m}ln^2\rho\cdot\delta_3(\rho,\lambda,\sigma)-\varepsilon^3\rho^{3m}ln^3\rho\cdot\delta_4(\rho,\lambda,\sigma) \quad (19)$$

де, нагадуємо, що

$$\delta_1=\frac{\beta}{p}\left(1+\frac{\sigma}{p}+\frac{\sigma^2}{p^2}+\frac{\sigma^3}{p^3}\right);\quad \delta_2=\frac{\beta^2}{p^2}\left(1+2\frac{\sigma}{p}+3\frac{\sigma^2}{p^2}\right);\qquad (20)$$
$$\delta_3=\frac{\beta^3}{p^3}\left(1+3\frac{\sigma}{p}\right);\quad \delta_4=\frac{\beta^4}{p^4};\quad \beta=2\lambda;\quad p=2\lambda+\sigma(\rho,\ldots).$$

Задамо функцію σ, наприклад, такого виду: $\sigma=2\,a\,\rho^m\,ln\,\rho$, де $a>0-$ довільний параметр.

Бачимо, що $\overset{*}{u}\Big|_{\rho=1}=1$ і $\overset{*}{u}\to 0$ при $\rho\to\infty$ для довільних ε, a і m!

Покладемо $\sigma_0=\sigma(\rho,a)\Big|_{\rho=\rho_0}=a\,\rho_0^m\,ln\,\rho_0$, де $\rho_0\in[1,\infty)$.

Тоді замість апроксимації (4.5.6) будемо остаточно розглядати наступну:

$$\widetilde{u}(\rho,\rho_0,\lambda,\varepsilon)=\overset{*}{u}(\rho,\lambda,\varepsilon,\sigma)\Big|_{\sigma=\sigma_0}=\cdot\delta_1(4,\rho,\lambda,\sigma_0)-\varepsilon\rho^m ln\rho\cdot\delta_2(4,\rho,\lambda,\sigma_0)+$$

$$+\varepsilon^2\rho^{2m}ln^2\rho\cdot\delta_3(4,\rho,\lambda,\sigma_0)-\varepsilon^3\rho^{3m}ln^3\rho\cdot\delta_4(4,\rho,\lambda,\sigma_0). \quad (21)$$

Згідно запропонованого методу будемо вимагати, щоб

$$\varepsilon^3 f_m^3(\rho)\left[\frac{\zeta}{\zeta+f_m(\rho)}\right]^4<\mu, \qquad (22)$$

де $f_m(\rho)=\rho^m\,ln\,\rho,\ \ \zeta=\dfrac{\lambda}{a}$, $\mu-$достатньо мале, наперед задане число.

Зауважимо, що в цій нерівності $\rho\in\left[1,\rho^*\right]$, де ρ^* бажано встановлювати максимально великим з напівінтервалу $[1,\infty)$; при практичних дослідженнях доцільно ототожнювати $\rho^*=\rho_0$.

Наводимо конкретні обчислення. Покладемо $\mu=0{,}002,\ \varepsilon=1,\ m=1,\ \rho^*=\rho_0=10$; тоді з нерівності (22) встановлюємо, що достатньо покладати $\zeta=0.5$.

При вказаних вхідних значеннях параметрів обчислено значення функції (21) для $\rho\in[1,10)$.

Значення відповідних сум, що обчислені на основі формул (21), позначено, відповідно, через $S_3^*,\ S_4^*$.

На рис. 1 побудовані графіки точного і наближених розв'язків; тут вертикальна (жирна) лінія розділяє графіки для $1\le\rho\le 2$ і $1\le\rho\le 10$, на яких вибрано різні масштаби. З рис 1 бачимо, що точний і наближений розв'язки майже співпадають (в межах графічної точності).

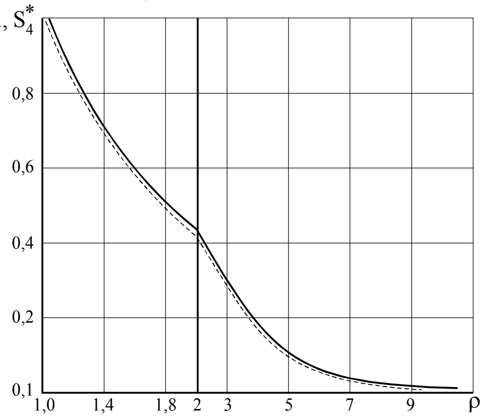

Рисунок 1 – Графічне зображення точного u і наближеного S_4^* розв'язків тестової задачі 1.

Більш того, тут представлено результат такого дослідження – вплив вибраного навмання порівняно "великого" значення $\rho_0=10$ на обчислення значень шуканого розв'язку в околі початкової точки $\rho=1$. Як бачимо, цей вплив майже незначний в практичному сенсі. Зауважимо, що при розв'язуванні задачі вибиралися і інші значення $\rho_0(\rho_0=20{,}100)$; виявилось, що результати обчислень відрізняються не істотно.

ВИСНОВКИ. Сформульовано, на основі проведених досліджень, метод розв'язування нелінійних задач. Задачі підбирались з таким розрахунком, щоб вони відображали характерні риси основного класу задач: наявність нелінійності, нескінченної області для шуканого розв'язку, затухання його на "нескінченності" тощо.

ЛІТЕРАТУРА

1. Каюк Я.Ф. Некоторые вопросы методов разложения по параметру. – Киев: Наукова думка, 1980. – С. 118, 144–151.
2. Каюк Я.Ф., Кривоблоцкая Л.Н. Метод регуляризации сингулярных итераций в нелинейных задачах изгиба пластин с отверстием // Вісник Донецького університету, Сер. А: Природничі науки. – 2002. – Вип. 1. – С. 83–90.
3. Каюк Я.Ф., Кривоблоцкая Л.Н. Сингулярные итерации в нелинейных задачах концентрации напряжений // Теорет. и прикладная механика. – 2002. – Вып. 36. – С. 98–108.
4. Бейкер Дж. (мл.), Грейвс-Моррис П. Аппроксимация Паде / Пер. с англ. – М., 1986. – 502 с.

USING SPECIAL SUMMATION METHODS FOR SOLVING NON-LINEAR PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS

L. Kryvoblotska
Kyrovohrad National Technical University
prosp. Universytetskyi, 8, Kyrovohrad, 25006, Ukraine. E-mail: larisa_krivoblotsky@list.ru

For many problems of mathematical physics, solving their various iterative methods, such as small parameter, Newton's method simple iterations, etc., there is a singular iteration that increases indefinitely at "infinity" or in the vicinity of singular points. The order of these iterations grows steadily with a number of approximation increasing. In this article, the author has proposed and mathematically justified the method of generalized summation of expansions in the parameter. Based on this method, a number of problems in deformable solid mechanics was resolved. The author has offered some special regularization methods of singular iterations and, as a result of the research conducted, formulated a solution technique for non-linear problems. The author has chosen the problems for them to have the typical features of the main problem class, such as: non-linearity, infinity interval for the problem solution, dying away at infinity, etc.

Key words: special methods, non-linear problem, singular iterations, fictitious parameters.

REFERENCES

1. Kayouk, Y. (1980), *Nekotorye voprosy metodov razlozheniya po parametru* [Some Questions of the Methods of Expansion in the Parameter] Naukova Dumka, Kyiv, Ukraine.
2. Kayouk, Y, Kryvoblotska, L. (2002), “The Method of Regularization of Singular Iterations in Non-linear Problems of Bending of Plates with a Hole”, *Transactions of Donetsk University*, *Ser. A: Natural Sciences*, no. 1, pp. 83–90.
3. Kayouk ,Y., Kryvoblotska, L. (2002), “Singular iterations in nonlinear problems of stress concentration”, *Theoretical. and Applied Mechanics*, vol. 36, pp. 98–108.
4. George, A., Baker, Jr., Peter Graves-Morris (1986), *Padé Approximants*, Addison-Wesley Publishing Co.

Стаття надійшла 28.06.2013.