УДК 351.861

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ВНЕШНЕМ СЛУЧАЙНОМ КИНЕМАТИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

И. В. Мищенко, С. А. Вамболь

Национальный университет гражданской защиты Украины

ул. Чернышевская, 94, г. Харьков, 61023, Украина. E-mail: ivmishch@mail.ru

Рассмотрена задача определения показателей надежности элементов конструкций при внешнем случайном кинематическом воздействии, приводящем к разрушению вследствие накопления усталостных повреждений. Считается, что в результате решения задачи статистической динамики с использованием классических гипотез прочности получены вероятностные характеристики параметров напряженно-деформированного состояния в точках конструкции. Показана возможность решения задачи надежности – определения основных показателей надежности для кумулятивных моделей накопления повреждений, а именно, вероятности безотказной работы, плотности вероятности отказов, среднего времени и дисперсии времени до разрушения для рассматриваемого случая с использованием кинетических уравнений повреждений и математического аппарата теории марковских процессов. Решение уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова для различных моделей накопления повреждений (линейной, автомодельной, нелинейной) получено на основе метода характеристических функций.

Ключевые слова: надежность, марковские процессы, случайное воздействие, накопление повреждений, усталость.

ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧІ НАДІЙНОСТІ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ПРИ ЗОВНІШНЬОМУ ВИПАДКОВОМУ КІНЕМАТИЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

І. В. Міщенко, С. О. Вамболь

Національний університет цивільного захисту України

вул. Чернишевська, 94, м. Харків, 61023, Україна. E-mail: ivmishch@mail.ru

Розглянута задача визначення показників надійності елементів конструкцій при зовнішньому випадковому кінематичному навантаженні, що призводить до руйнування внаслідок накопичення пошкоджень від втомленості. Вважається, що в результаті розв’язання задачі статистичної динаміки з використанням класичних гіпотез міцності отримані імовірнісні характеристики параметрів напружено-деформованого стану в точках конструкції. Показано можливість вирішення задачі надійності – визначення основних показників надійності для кумулятивних моделей накопичення пошкоджень, а саме, імовірності безвідмовної роботи, щільності ймовірності відмов, середнього часу та дисперсії часу до руйнування для випадку, що розглядається, з використанням кінетичних рівнянь пошкоджень і математичного апарату марковських процесів. Рішення рівняння Фоккера-Планка-Колмогорова для різних моделей накопичення пошкоджень (лінійної, автомодельної, нелінійної) отримано на основі методу характеристичних функцій.

Ключові слова: надійність, марковські процеси, випадкове навантаження, накопичення пошкоджень, втомленість.

АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ. Большое количество конструкций в авиационном, транспортном, энергетическом машиностроении работают в условиях случайного циклического нагружения, что приводит к разрушению вследствие накопления усталостных повреждений. Постепенные отказы, возникающие в элементах конструкций, обусловлены необратимыми явлениями, которые неизбежно возникают при их эксплуатации в результате усталости, износа, накопления пластических деформаций, коррозии, эрозии и т.д. В настоящее время для элементов конструкций при циклическом нагружении и различных физических моделях постепенных отказов имеется хорошо разработанный феноменологический кинетический подход для описания разнообразных механизмов накопления повреждений с учетом свойств материала и характера напряженного состояния. Данный подход базируется на использовании кинетических уравнений повреждений, являющихся, как правило, кумулятивными и получающихся в результате экспериментальных исследований при простом гармоническом нагружении с использованием той или иной гипотезы накопления повреждений. Математическая структура кинетических уравнений повреждений позволяет рассматривать меры повреждений как компоненту одномерного или двумерного марковского процесса. Такой подход дает возможность определить вероятностные характеристики меры повреждений, а по ним получать основные показатели надежности.

Цель работы – решение задачи надежности элементов конструкций при внешнем случайном кинематическом воздействии.

МАТЕРИАЛ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ. Задача определения показателей надежности включает два этапа. На первом из них с использованием корреляционной теории решается задача статистической динамики в предположении, что внешнее кинематическое воздействие представляет стационарный нормальный случайный процесс с известными спектральной плотностью и распределением ускорений. Используя соотношения теории упругости и метода конечных элементов, получаем вероятностные характеристики напряжений в отдельных элементах конструкции. Определив наиболее опасные из них, переходим ко второму этапу, который состоит в прогнозировании надежности этих элементов. Как правило, для данного класса конструкций параметры напряженно-деформированного состояния представляются в виде суперпозиции квазигармонических случайных процессов, более того, одна из форм колебаний является доминирующей, что позволяет для решения задачи надежности сразу использовать узкополосный случайный процесс [1]

$$y(t)=\lambda(t)cos[\omega t+\varphi(t)]. \qquad (1)$$

Здесь используются вероятностные характеристики: одномерная плотность вероятности $f(\lambda)$ огибающей $\lambda(t)$ (амплитуды напряжений), несущая частота ω, корреляционная функция $K_y(\tau)$. При широкополосном случайном воздействии происходит приведение по одному из существующих методов исходного процесса к эквивалентному по повреждающему действию узкополосному. В настоящее время в инженерной практике применяется более десяти схематизаций процесса [3], основанных на рассмотрении его максимумов. К основным можно отнести метод превышений (выбросов), метод размахов (с учетом или без учета среднего значения напряжений), метод укрупненных размахов, метод максимумов, метод полных циклов. Самую нижнюю оценку долговечности дает метод максимумов, а самые завышенные результаты при расчете усталостной долговечности дает метод размахов. Для гауссовских процессов, заданных корреляционной функцией или спектральной плотностью, метод схематизации удобно назначать по величине отношения среднего числа экстремумов к среднему числу нулей. Если это отношение мало отличается от единицы, то за метод схематизации следует принимать (как наиболее простой) метод максимумов. Если это отношение значительно больше единицы, то за методы схематизации следует принимать такие методы, которые дают результаты, наиболее близкие к экспериментальным. К таким методам в первую очередь относится метод полных циклов, которому и было отдано предпочтение при проведении исследований. В этом случае аналитические выражения для одномерной плотности вероятности амплитуд $f(\lambda)$ имеют вид

$$f(\lambda)=\begin{cases}\chi^2\lambda\, exp\left(-0{,}5\chi^2\mu\lambda^2\right), & 0<\lambda<\lambda_\chi\\ \lambda c\, exp\left(-0{,}5\lambda^2\right)/\chi, & \lambda\ge\lambda_\chi\end{cases}, \qquad (2)$$

где $\mu=\sqrt{(a+3b)/(ab)}$, a, b, c, λ_χ – const, протабулированные для различных коэффициентов широкополосности χ. С учетом структуры случайного широкополосного процесса, представляющего суперпозицию некоррелированных случайных процессов, определяют дисперсию процесса и его производной, эффективную частоту, коэффициент широкополосности, корреляционную функцию, время корреляции. Плотность вероятности $f(\lambda)$ аппроксимируется системой стационарных плотностей вероятности Пирсона $P(\lambda)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$\frac{dP(\lambda)}{d\lambda}=\frac{\lambda-a}{b_0+b_1\lambda+b_2\lambda^2}P(\lambda), \qquad (3)$$

решение которого можно записать в виде

$$P(\lambda)=C\, exp\left(\int\frac{\lambda-a}{b_0+b_1\lambda+b_2\lambda^2}d\lambda\right). \qquad (4)$$

Коэффициенты a и b_i в уравнении полностью задают систему распределений Пирсона. От характера корней λ_1 и λ_2 ($\lambda_1<\lambda_2$) характеристического уравнения $b_0+b_1\lambda+b_2\lambda^2=0$ зависит интервал на оси $\lambda\ge 0$, на котором задано распределение $P_S(\lambda)$, и вне которого оно принимает нулевые значения. Проведенные исследования показали, что при схематизации процесса по методу полных циклов корни уравнения λ_i являются вещественными и различными по знаку. По классификации Пирсона это отвечает 1-му типу распределения или β-распределению [6] (здесь $\Gamma(\cdot)$ - гамма-функция)

$$P_s(\lambda)=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(q)\Gamma(p-q+1)}\lambda^{q-1}(1-\lambda)^{p-q}=F(p,q)W(\lambda)$$
$$0\le\lambda\le 1;\ p,q>0, \qquad (5)$$

что сводит задачу аппроксимации одномерной плотности вероятности параметров напряженно-деформированного состояния к определению значений параметров p и q. Задача аппроксимации β-распределения решается различными способами и по степени совпадения моментов исходной плотности и β-распределения можно судить об оптимальности того или иного способа. Первый из них является традиционным, при этом достигается совпадение первых двух моментов обоих распределений. Второй учитывает тот факт, что при вычислении среднего ресурса используется момент более высокого порядка, что требует совпадения первого и указанного моментов распределения. Третий заключается в аппроксимации исходной плотности β-распределением по методу наименьших квадратов. Данная методика представлена применительно к схематизированным процессам, когда одномерная плотность амплитуд имеет аналитическое выражение. Однако не существует принципиальных затруднений при использовании предложенной методики для любых полученных тем или иным способом одномерных плотностей, что позволяет говорить о ее универсальности при решении задач надежности.

Как уже было отмечено, явления, связанные с накоплением повреждений, можно описать в рамках единой полуэмпирической теории, связывающей скорость накопления повреждений с различными факторами, характеризующими условия нагружения, состояние окружающей среды, способность материала конструкции сопротивляться различным типам воздействий. При постепенных отказах в качестве компонент вектора параметров работоспособности $z(t)$ удобно взять меры повреждений в заданных точках конструкции, соответствующие различным моделям постепенных отказов. Причем, каждая мера повреждений $z(t)$, как правило, нормируется $0 \le z(t) \le 1$. В начальный момент времени $z(0)=0$, а в момент разрушения $t=t_*$ $z(t_*)=1$. Существующие основные стадии разрушения – стадия рассеянных повреждений и стадия развития макроскопических трещин - описываются различными уравнениями повреждений, записываемыми соответственно в общем виде [2]:

$$dz(t)/dt = F[z(t),\lambda(t),R(t),C(t)], \qquad (6)$$

где $z(t)$ – мера повреждений; $F[\cdot]$ – детерминированная неотрицательная для кумулятивных моделей отказов скалярная линейная или нелинейная функция; $\lambda(t)$ – амплитудное значение параметра напряженно-деформированного состояния при простом гармоническом нагружении; $R(t)$ – вектор характеристик конструкционной прочности; $C(t)$ – вектор параметров, характеризующих влияние внешней среды, и

$$dl/dt = F[\Delta K, \mathrm{B}], \qquad (7)$$

где $\Delta K = K_{max} - K_{min}$ – размах коэффициента интенсивности напряжений, B – вектор констант, характеризующих усталостное разрушение конструкции. Кинетические уравнения (6) можно классифицировать в зависимости от заложенной в них модели: линейной, нелинейной, автомодельной и т.д. По аналогии с уравнениями (6) строятся кинетические уравнения повреждений деформационного типа, используемые при расчете циклической несущей способности конструкций на деформационных критериях сопротивления малоцикловому разрушению.

Линейное уравнение для много- и малоцикловой усталости, основанное на правиле Пальмгрена-Майнера, можно представить в виде

$$dz/dt = F[\lambda] = C(\lambda)\lambda^{r(\lambda)}, \qquad (8)$$

где λ – амплитуда деформаций или напряжений, C и r – кусочно-постоянные функции.

Несмотря на огромную популярность уравнений типа (8), они имеют и ряд недостатков, связанных с большими погрешностями решения задач надежности для определенных режимов нагружения. Одним из путей преодоления этого недостатка является использование корректированной линейной гипотезы суммирования усталостных повреждений, а также автомодельной гипотезы накопления повреждений типа [2, 4]

$$dz/dt = F_1[\lambda]\cdot F_2[z]. \qquad (9)$$

По существу данная модель приводит к нелинейному закону суммирования повреждений, для которого в общем случае в правой части уравнений (6) не удается разделить переменные λ и z [2, 4]

$$dz/dt = F[\lambda, z]. \qquad (10)$$

В основе уравнений типа (10) лежат различные нелинейные модели накопления повреждений: Кортена-Долана, Фрейденталя, Серенсена-Козлова, Болотина, Райхера. Несмотря на существование различных нелинейных моделей, большинство из них можно описать уравнениями Болотина. Для случая циклического деформирования кинетические уравнения деформационного типа можно строить по аналогии с силовыми уравнениями [4]

$$dz/dt = F[\varepsilon, z]. \qquad (11)$$

В простейшем случае, как и для уравнения (8),

$$dz/dt = F[\varepsilon] = C(\varepsilon)\varepsilon^{r(\varepsilon)}, \qquad (12)$$

где C и r – кусочно-постоянные функции амплитуды деформаций ε.

Для класса постепенных отказов, происходящих в элементах конструкций вследствие нарушения усталостной прочности, процесс накопления повреждений от начальной повреждаемости z_0 до 1 находится в интервале 10^2–10^7 циклов, охватывая области мало- и многоцикловой усталости. Такой значительный временной диапазон является следствием малой скорости изменения $z(t)$ в единицу времени. Напротив, скорость изменения амплитуды $\lambda(t)$ эквивалентного узкополосного процесса $y(t)$ определяется скоростью изменения этого процесса и лежит в диапазоне десятков-сотен циклов. В этом случае процесс $z(t)$, скорость которого описывается уравнением (6), можно считать приближенно одномерным марковским для временных интервалов t порядка Δt $(t \ge \Delta t)$, если величина Δt удовлетворяет неравенствам [5]

$$\tau_c >> \Delta t >> \tau_\kappa, \qquad (13)$$

где τ_c – постоянная времени системы, значительно превосходящая 10^7 циклов, $\tau_к$ – время корреляции $\lambda(t)$, имеющее порядок десятков циклов. Вследствие этого, выполнение левой части неравенства (13) не вызывает сомнений, в то время как выполнение правой части требует проверки в каждом конкретном случае. Приведенные доводы о возможности рассмотрения процесса накопления повреждений как марковского носят качественный характер, строгое доказательство для различных моделей накопления повреждений вызывает значительные трудности.

Рассмотрение процесса накопления повреждений как одномерного марковского при условии выполнения (13) позволяет для получения плотности вероятности $f(z,t)$ использовать уравнение Фоккера-Планка Колмогорова [5]

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\left[\mathrm{A}(z) f(z,t)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\mathrm{B}(z) f(z,t)\right]. \quad (14)$$

Граничные и начальные условия для уравнения (14) формулируются исходя из физического смысла $z(t)$ и общих свойств плотности вероятности

$$\lim_{z\to 0,\infty} f(z,t) = 0, \quad \lim_{t\to 0} f(z,t) = \delta(z - z_0), \quad (15)$$

(z_0 – начальная повреждаемость, $\delta(\cdot)$ – дельта-функция). Коэффициенты $\mathrm{A}(z)$ и $\mathrm{B}(z)$ уравнения (14) определяются в соответствии со стохастическим дифференциальным уравнением (6) при условии временной симметрии функции $F[\cdot]$ и стационарности процесса $y(t)$ [5]. Для подавляющего большинства кинетических уравнений типа (6) аналитическое решение уравнения (14) с соответствующими граничными и начальными условиями (15) получить невозможно. В этом случае предлагается использовать метод конечных разностей, достаточно просто реализуемый численно. Для линейной модели накопления повреждений при использовании асимптотического приближения решением уравнения (14), в котором коэффициенты $\mathrm{A}(z) = \mathrm{A}$ и $\mathrm{B}(z) = \mathrm{B}$ константы, является нормальный закон $f(z,t)$

$$f(z,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z^2}} exp\left(-\frac{(z - m_z)^2}{2\sigma_z^2}\right), \quad (16)$$

Математическое ожидание и дисперсия повреждаемости определяется из соотношений

$$m_z = \mathrm{A}t, \; \sigma_z^2 = \mathrm{B}t. \quad (17)$$

Для модели, использующей гипотезу автомодельности процесса накопления повреждений (с точностью до обозначений в рамках последней модели можно рассматривать уравнение Пэриса, описывающее стадию распространения трещины), при использовании уравнения (9) вводится понятие псевдоповреждаемости

$$\Psi(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{dz(t)}{F_2[z]}, \quad (18)$$

что приводит, фактически, к линейному уравнению (8) относительно введенной переменной

$$d\Psi(z)/dt = F_1[\lambda]. \quad (19)$$

Для случая $F_2[z] = z$ решением уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова для псевдоповрежаемости будет нормальный закон $f[\Psi(z),t]$, а, соответственно, для поврежаемости $z(t)$ лог-нормальный закон $f(z,t)$.

К классу нелинейных можно отнести практически все уравнения, описывающие распространение усталостной трещины. Предложенный подход позволяет получать с достаточной для инженерных расчетов точностью плотности вероятности меры повреждения и длины трещины с использованием широкого класса кинетических уравнений при случайном внешнем воздействии.

Рассматривая повреждаемость как компоненту двумерного марковского процесса, можно соответственно записать кинетические уравнения для меры повреждений $z(t)$ и уравнения фильтра для определяющего эти уравнения параметра $\lambda(t)$

$$\begin{cases} dz(t)/dt = F[z(t),\lambda(t),R(t)] \\ d\lambda(t)/dt = \Phi_1(\lambda) + \Phi_2(\lambda)n(t) \end{cases}. \quad (20)$$

Для стационарного случайного процесса $\lambda(t)$ известны вероятностные характеристики: математическое ожидание, корреляционная функция $K_\lambda(\tau)$ и одномерная плотность вероятности $f(\lambda)$, по которым и строится уравнение фильтра [5] (второе уравнение в выражении (20)). В качестве внешнего воздействия присутствует нормальный белый шум $n(t)$, $\Phi_1(\lambda)$, $\Phi_2(\lambda)$ – детерминированные функции, удовлетворяющие условию Липшица. Уравнение фильтра является стохастическим дифференциальным уравнением первого порядка, описывающее одномерный марковский процесс $\lambda(t)$. Можно утверждать [5], что $[z(t),\lambda(t)]$ будет представлять двумерный марковский процесс, одномерная плотность вероятности которого $f(z,\lambda,t)$ удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[A_1(\lambda)f\right]-\frac{\partial}{\partial z}\left[A_2(\lambda,z)f\right]+\\ &+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\left[B(\lambda)f\right]\end{aligned} \qquad (21)$$

с граничными

$$lim\, f(z,\lambda,t)=0, \quad (z,\lambda)\to 0,\infty \qquad (22)$$

и начальными условиями

$$lim\, f(z,\lambda,t)=f(z)f(\lambda), \quad t\to 0, \qquad (23)$$

которые формулируются исходя из физической сущности задачи. В (23) предполагается, что $\lambda(t)$ и $z(t)$ в начальный момент времени стохастически независимы. В соответствии с общей теорией марковских процессов существует взаимнооднозначное соответствие между коэффициентами уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова (21) и коэффициентами стохастических дифференциальных уравнений (20)

$$\begin{gathered}A_1(\lambda)=\Phi_1(\lambda)+\frac{N_o}{4}\Phi_2(\lambda)\cdot d\Phi_2(\lambda)/d\lambda\\ A_2(\lambda,z)=F[\lambda,z,y_m,R]\\ B(\lambda)=\frac{N_o}{2}\Phi^2(\lambda)\end{gathered} \quad . \qquad (24)$$

Таким образом, из решения уравнений (14) или (21) можно определить одномерную плотность вероятности меры повреждений $f(z,t)$, по которой определяются все основные показатели надежности для кумулятивных моделей накопления повреждений: вероятность безотказной работы $P(t)$ и плотность вероятности отказов $q(t)$

$$\begin{gathered}P(t)=\int_0^1 f(z,t)dz;\\ q(t)=-dP(t)/dt=-\int_0^1 df(z,t)/dtdz\end{gathered}, \qquad (25)$$

а, используя полученные соотношения, среднее время m_T и дисперсию σ_T^2 времени до разрушения

$$m_T=\int_0^\infty tq(t)dt; \quad \sigma_T^2=\int_0^\infty t^2q(t)dt-m_T^2. \qquad (26)$$

Численное решение на основе метода характеристических функций уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова разработано для различных моделей накопления повреждений

Для численного решения уравнения Фоккера-Планка Колмогорова (21) для линейной модели накопления повреждений вводится функция $\theta(\lambda,\omega,t)$, представляющая характеристическую функцию по переменной z и плотность вероятности по переменной λ

$$\theta(\lambda,\omega,t)=\int_0^\infty f(\lambda,z,t)e^{i\omega z}dz. \qquad (27)$$

Исходя из свойств плотности вероятности и соотношения (27), одномерная характеристическая функция переменной z будет равна

$$\theta(\omega,t)=\int_0^\infty\theta(\lambda,\omega,t)d\lambda=\int_0^\infty\int_0^\infty f(\lambda,z,t)e^{i\omega z}dzd\lambda. \qquad (28)$$

В соответствии с формулой (27) из уравнения (21) с тремя независимыми переменными получим уравнение для $\theta(\lambda,\omega,t)$ с двумя независимыми переменными λ и t путем его умножения на $e^{i\omega z}$ и интегрирования по переменной z в пределах $[0,\infty]$. Предполагая, что операции интегрирования и дифференцирования можно менять местами, и коэффициент A_2 зависит только от λ, получим

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[A_1(\lambda)\theta\right]+i\omega A_2(\lambda)\theta+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\left[B(\lambda)\theta\right] \qquad (29)$$

В уравнении (29) учтены граничные условия (22) по переменной z. В соответствии с условиями (22) и (23), а также выражением (27), можно сформулировать соответственно граничные и начальные условия для функции $\theta(\lambda,\omega,t)$

$$lim\,\theta(\lambda,\omega,t)=0, \quad \lambda\to 0,\infty; \qquad (30)$$

$$lim\,\theta(\lambda,\omega,t)=P_s(\lambda)\theta(\omega,t), \quad t\to 0. \qquad (31)$$

В уравнение (29) ω входит как параметр. Рассматривая $\theta(\lambda,\omega,t)$ как плотность вероятности по переменной $\lambda\ge 0$, ее можно разложить в одномерный ряд по ортогональным полиномам $J_n(\lambda)$ с весовой функцией $P_s(\lambda)$ и неизвестными коэффициентами $C_n(\omega,t)$, зависящими от ω и t

$$\theta(\lambda,\omega,t)=P_s(\lambda)\sum_{n=0}^\infty C_n(\omega,t)J_n(\lambda). \qquad (32)$$

Исходя из условия ортогональности полиномов $J_n(\lambda)$

$$\int_0^\infty W(\lambda) J_n(\lambda) J_m(\lambda) d\lambda = \begin{cases} h_n, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}, \quad (33)$$

можно найти коэффициенты ряда (32)

$$C_n(\omega, t) = \left(F(p,q) h_n\right)^{-1} \int_0^\infty \theta(\lambda, \omega, t) J_n(\lambda) d\lambda . \quad (34)$$

С учетом $J_0(\lambda) = 1$, $h_0 = F^{-1}(p,q)$ и соотношений (28) и (34) следует, что $C_0(\omega, t)$ представляет характеристическую функцию z

$$C_0(\omega, t) = \int_0^\infty \theta(\lambda, \omega, t) d\lambda = \theta(\omega, t). \quad (35)$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов $C_n(\omega, t)$ в соответствии с (34) умножим уравнение (29) на $\left(F(p,q) h_n\right)^{-1} J_n(\lambda)$ и проинтегрируем по переменной λ в пределах [0,∞]. С учетом граничных условий (23) после подстановки разложения (32) получим замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) в комплексной форме относительно неизвестных коэффициентов $C_n(\omega, t)$

$$\frac{dC_n(\omega, t)}{dt} = \sum_{k=0}^{N} C_k(\omega, t) u_{nk}, \quad \left(n = \overline{0, N}\right), \quad (36)$$

Используя обозначения для комплексных коэффициентов $C_n = C_n^{д} + iC_n^{м}$, получим СОДУ для действительной и мнимой частей

$$\begin{aligned} \frac{dC_n^{д}}{dt} &= \sum_{k=0}^{N} C_k^{д} u_{nk}^{д} - \sum_{k=0}^{N} C_k^{м} u_{nk}^{м} \\ \frac{dC_n^{м}}{dt} &= \sum_{k=0}^{N} C_k^{д} u_{nk}^{м} + \sum_{k=0}^{N} C_k^{м} u_{nk}^{д} \end{aligned} \quad \left(n = \overline{0, N}\right). \quad (37)$$

Система (37) представляется в матричном виде $d\mathbf{C}/dt = -\mathbf{UC}$ с начальным условием $\mathbf{C}(t_0)$. Решение СОДУ в этом случае можно представить в виде

$$\mathbf{C} = exp\{-\mathbf{U}(t - t_0)\mathbf{C}(t_0)\}. \quad (38)$$

Таким образом, интегрирование данной системы сводится к вычислению матрицы $exp(-\mathbf{U}t)$. В частном случае матрица $\mathbf{U}$ при помощи невырожденного линейного преобразования приводится к диагональному виду, т.е. выполняется условие

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{UT} = \mathbf{U}', \quad (39)$$

где $\mathbf{U}'$ – блочно-диагональная матрица, состоящая из блоков (2x2), на диагонали которых расположены действительные части, а вне диагонали – сопряженные мнимые части собственных значений матрицы $\mathbf{U}$; $\mathbf{T}^{-1}$ и $\mathbf{T}$ – соответственно левая и правая система собственных векторов матрицы $\mathbf{U}$. Здесь реализуется алгоритм решения проблемы собственных значений по методу Якоби с понижением нормы для действительных матриц.

Начальные условия для $C_n(\omega, t)$ можно получить из выражения (34) с учетом начальных условий (31) для $\theta(\lambda, \omega, t)$.

Для численного расчета основных показателей надежности (25), (26) определяется одномерная центрированная плотность меры повреждений $f_{Ц}(z,t)$ как обратное преобразование Фурье от характеристической функции

$$f_{Ц}(z,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C_{0Ц}(\omega, t) e^{-i\omega z} d\omega . \quad (40)$$

Представим характеристическую функцию $C_{0Ц}(\omega, t)$ в виде разложения в ряд с помощью интерполяционной формулы [6]

$$C_{0Ц}(\omega, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{0Ц}\left[\frac{2\pi n}{\Delta}, t\right] \frac{sin\left[\left(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta}\right)\frac{\Delta}{2}\right]}{\left(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta}\right)\frac{\Delta}{2}} . \quad (41)$$

Тогда с учетом (40) выражение для $f_{Ц}(z,t)$ можно представить в виде

$$f_{Ц}(z,t) = \frac{1}{\Delta}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} & C_{0Ц}^{д}\left[\frac{2\pi n}{\Delta}, t\right] cos\frac{2\pi n z}{\Delta} + \\ & + C_{0Ц}^{м}\left[\frac{2\pi n}{\Delta}, t\right] sin\frac{2\pi n z}{\Delta} \end{aligned} \right\}\right] \quad (42)$$

где Δ – интервал, на котором плотность вероятности $f_{Ц}(z,t)$ отлична от нуля. Таким образом, определение плотности вероятности $f_{Ц}(z,t)$ свелось к определению действительной и мнимой частей характеристической функции в дискретном ряде точек. Количество членов ряда (42) определяется количеством точек, в которых характеристическая функция отлична от нуля и правильным выбором интервала Δ. Используя соотношения (25), (42), определим основные показатели надежности. При использовании асимптотического подхода, основанного на выполнении центральной предельной теоремы, для решения задачи надежности плотность вероятности меры повреждения является нормальным законом.

Предложенная методика может быть использована для модели, использующей гипотезу автомодельности, и нелинейной модели накопления повреждений, однако в этом случае коэффициент A_2 в уравнении (21) зависит от λ и z, что существенно усложняет структуру СОДУ

ВЫВОДЫ. Представлена методика решения задачи надежности элементов машиностроительных конструкций при случайном воздействии на основе одномерных и двумерных марковских моделей. Предложенная методика позволяет получать плотности вероятности меры повреждения, по которым рассчитываются все основные показатели надежности. Применение указанного подхода позволяет использовать линейные и нелинейные модели накопления повреждений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. – М.: Наука, 1979. – 335 с.
2. Болотин В.В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций. – М.: Машиностроение, 1984. – 312 с.
3. Гусев, А.С. Расчет конструкций при случайных воздействиях / А.С. Гусев, В.А. Светлицкий – М.: Машиностроение, 1984.-240 с.
4. Павлов П.А. Основы инженерных расчетов элементов машин на усталость и длительную прочность. – Л.: Машиностроение, Ленингр. отд., 1988. – 252 с.
5. Марковские процессы / В.И. Тихонов, М.А. Миронов. – М.: Советское радио, 1977. – 488 с.
6. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.
7. Ghonem, H., Zeng, M. (1991) “Prediction of fatigue crack growth under single overload application in Ti-6Al-4V”, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, vol. 14, no. 8, pp. 805–814.
8. Ming-Hwa, R. Jen. (1988) “Modelling of cumulative fatigue damage in titanium 6Al-4V alloy”, *Modeling, Simulation & Control, B, AMSE Press*, vol. 14, no. 3, pp.11–19.
9. Tunna, J.M. (1986) “Fatigue life prediction for gaussian random loads at the design stage”, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, vol. 9, no. 3, pp. 169–184.

RELIABILITY PREDICTION PROBLEM SOLUTION FOR STRUCTURAL ELEMENTS SUBJECTED TO RANDOM EXTERNAL KINEMATIC INPUT

I. Mishchenko, S. Vambol
National University of Civil Defence of Ukraine
vul. Chernysevska, 94, Kharkov, 61023, Ukraine. E-mail: ivmishch@mail.ru

The authors have investigated the reliability prediction problem for structural elements subjected to random external kinematic input. It is found that cyclic random loads may lead to fracture due to fatigue damage accumulation. The reliability characteristic definition problem due to fatigue failures is solved. The stress-strain probabilistic characteristics are assumed to be obtained due to the stochastic dynamics problem solution using the correlation theory relations and classical strengthening hypothesis. It is solved the reliability prediction problem to determine the main reliability characteristics, such as failure-free operation probability, failure probability density, mean time to fracture and time dispersion to fracture of the cumulative models of damage summation. For various engineering structures the failures typically occur due to low and high cycle fatigue. To solve the problem it was developed the approaches on the basis of phenomenological model limits by means of kinetic equations for the fatigue damage measure and Markov processes theory mathematical means. The Fokker-Planck-Kolmogorov equation solution is obtained for various failure accumulation models (the linear, auto-model hypothesis, non-linear ones) using the characteristic functions method.

Key words: reliability, Markov processes, random input, damage accumulation, fatigue.

REFERENCES

1. Bolotin, V.V. (1979), *Sluchaynyie kolebaniya uprugikh system* [Random vibrations of Elastic Structures], Nauka, Moscow, Russia.
2. Bolotin, V.V. (1984), *Prognozirovanie resursa mashin i konstrukciy* [Machines and Structures Resource Prediction], Mashinostrijenie, Moscow, Russia.
3. Gusev, A.S. and Svetlitskiy V.A. (1984), *Raschet konstrukciy pri sluchaynykh vozdeistviyakh* [Structures Under Random Input Calculation], Mashinostrijenie, Moscow, Russia.
4. Pavlov, P.A. (1988), *Osnovy inzhenernykh raschetov elementov mashin na ustalost i dlitelnuyu prochnost* [Machines Elements Engineering Calculations on Fatigue Fundamentals], Mashinostrijenie, Leningrad otd., Leningrad, Russia.
5. Tikhonov, V.I. and Mironov, M.A. (1977), *Markovskiye processy* [Markov processes], Sovetskoje Radio, Moscow, Russia.
6. Tikhonov, V.I. (1982), *Statisticheskaya radiotekhnika* [Statistical radiotechnics], Radio i Svyaz, Moscow, Russia.
7. Ghonem, H., Zeng, M. (1991), “Prediction of fatigue crack growth under single overload application in Ti-6Al-4V”, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, vol. 14, no. 8, pp. 805–814.
8. Ming-Hwa, R. Jen. (1988), “Modelling of cumulative fatigue damage in titanium 6Al-4V alloy”, *Modeling, Simulation & Control, B, AMSE Press*, vol. 14, no. 3, pp.11–19.
9. Tunna, J.M. (1986), “Fatigue life prediction for gaussian random loads at the design stage”, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, vol. 9, no. 3, pp.169–184.

Стаття надійшла 10.03.2014.