

УДК 517.958:532.72

МОДЕЛЮВАННЯ ДРУГИХ МОМЕНТІВ ВИПАДКОВОГО ПОЛЯ КОНЦЕНТРАЦІЇ В НАПІВПРОСТОРІ З ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНИМ РОЗПОДІЛОМ ШАРУВАТИХ ВКЛЮЧЕНЬ

Ю. І. Білушак

Центр математичного моделювання ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України
вул. Дж. Дудаєва, 15, м. Львів, 79005, Україна. E-mail: byixx13@gmail.com.

Робота присвячена математичному моделюванню процесів дифузії домішкової речовини у двофазному шаруватому напівпросторі з урахуванням випадкового розташування підшарів та умов неідеального масового контакту на межах розділу фаз. Шаруваті включення розташовані за експоненціальним розподілом. Сформовано еквівалентне інтегродиференціальне рівняння, розв'язок якого побудований у вигляді інтегрального ряду Неймана. Усереднення отриманого розв'язку проведено за ансамблем конфігурацій фаз з експоненціальною функцією розподілу включень. Визначено дисперсію поля концентрації частинок і двоточкову функцію кореляції (автокореляції) поля для процесу дифузії в шаруватому напівпросторі з експоненціальним розподілом включень. Розроблено програмне забезпечення та визначений вплив характеристик середовища і параметрів структури на другі моменти поля концентрації домішки, що мігрує в шаруватому напівпросторі з експоненціальним розподілом включень.

Ключові слова: дифузія, випадково неоднорідна шарувата структура, експоненціальний розподіл, дисперсія поля, функція кореляції.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВТОРЫХ МОМЕНТОВ СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ КОНЦЕНТРАЦИИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ СЛОИСТЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Ю. И. Билушак

Центр математического моделирования ИПММ им. Я.С. Подстригача НАН Украины
ул. Дж. Дудаева, 15, г. Львов, 79005, Украина. E-mail: byixx13@gmail.com.

Работа посвящена математическому моделированию процессов диффузии примесного вещества в двухфазном слоистом полупространстве с учетом случайного расположения слоев и условий неидеального массового контакта на границах раздела фаз. Слоистые включения расположены по экспоненциальному распределению. Сформировано эквивалентное интегродифференциальное уравнение, решение которого построено в виде интегрального ряда Неймана. Усреднение полученного решения проведено по ансамблю конфигураций фаз с экспоненциальной функцией распределения включений. Определено дисперсию поля концентрации частиц и двухточечную функцию корреляции (автокорреляции) поля для процесса диффузии в слоистом полупространстве с экспоненциальным распределением включений. Разработано программное обеспечение и определено влияние характеристик среды и параметров структуры на вторые моменты поля концентрации примеси, которая мигрирует в слоистом полупространстве с экспоненциальным распределением включений.

Ключевые слова: диффузия, случайно неоднородная слоистая структура, экспоненциальное распределение, дисперсия поля, функция корреляции.

АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ. З розвитком техніки все більше використовуються в різних енергетичних і машинобудівних галузях шаруваті композитні матеріали, до яких ставлять вимоги високої міцності при малій вазі, забезпечення високої електропровідності при високих температурах експлуатації та багато інших. Вплив дифузійного масоперенесення агресивних домішкових речовин і середовища, в якому експлуатуються дані композитні матеріали, спричиняють зміну структури шаруватого матеріалу та можливе розшарування і міжфазне руйнування. Дія на композитне шарувате тіло агресивних домішок веде до деградації функціональних властивостей матеріалу.

В електротехніці широко використовуються двофазні композити, зокрема, для забезпечення високої електропровідності при високих температурах експлуатації. Одним із прикладів таких композитних матеріалів з добре вивченими механічними властивостями є композиційні матеріали $Fe-Cr$ [1], в якому матрицею є залізо; $Cu-W$ [2], в якому матрицею є мідь. При цьому відсоток вольфраму, який використовується як зміцнювач, не здійснює

суттєвого впливу на в'язкість матриці. Ще однією перевагою такого біметалічного композиту є те, що мідь і вольфрам майже взаємонерозчинні та не взаємодіють хімічно. Структура шаруватого композиту мідь-вольфрам з різним умістом шаруватих прошарків вольфраму приведена на рис. 1.

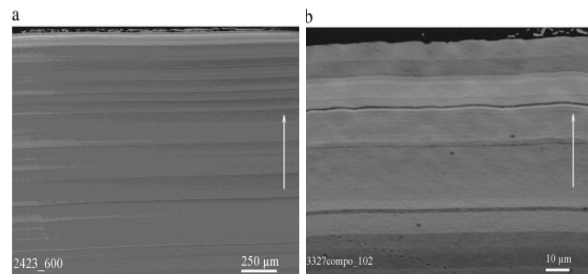


Рисунок 1 – Приклад структури конденсованих $Cu-W$ композитів з різним умістом вольфраму, %:
а – 2,5; б – 7,9

При дослідженні процесів переносу в неоднорідних тілах, як правило, відомі фізико-хімічні характеристики елементів композитного матеріалу, форма, їхня кількість або дольова частка і, можливо,

розподіл у тілі. Тоді процеси, які перебігають в такого типу тілах, необхідно розглядати як стохастичні, що, в свою чергу, призводить до потреби розв'язання нових підходів і методів математичного моделювання фізичних полів, у тому числі і дифузійних, у середовищах випадково неоднорідної структури.

Введення випадковості у параметрах середовища породжує стохастичність самих фізичних полів. При цьому методи статистичного усереднення за ансамблем реалізацій випадкових параметрів згладжують якісні особливості типових реалізацій, і отримані статистичні характеристики можуть суттєво відрізнятися від окремих реалізацій. Проте повна статистика містить всю інформацію про динамічну систему. Але на практиці вдається знайти тільки перші статистичні характеристики, які пов'язані з одноточковими розподілами ймовірностей [3, 4]. У працях [5, 6] розроблено підхід до математичного опису випадкового поля концентрації речовини, який базується на зведенні контактної задачі дифузії на шукану функцію до еквівалентного рівняння масопереносу в усьому тілі, формулюванні інтегродиференційного рівняння з випадковим оператором у припущенні, що внутрішню структурну неоднорідність можна розглядати як випадкові джерела; розв'язання рівняння методом послідовних наближень та усередненні поля концентрації за ансамблем конфігурацій фаз.

Метою роботи є математичне моделювання других моментів досліджуваних полів – дисперсії поля і двоточкової функції кореляції (автокореляції) поля концентрації домішкових частинок, які мігрують у випадковому шаруватому півпросторі із заданим розподілом фаз.

МАТЕРІАЛИ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ. Нехай домішкові частинки одного хімічного виду мігрують у шаруватому півпросторі, який складається з підшарів двох типів (фаз). Вважаємо, що дифузійні властивості фаз можуть суттєво відрізнятися. Приймаємо, що об'єм, який займає одна із фаз (матриця), є набагато більшим за об'єм іншої фази (включень). При цьому координати включень, а отже і підшарів матриці є невідомими, тобто структура тіла є випадково неоднорідною. Нехай включення розташовані в області тіла за експоненціальним розподілом [7] (рис. 2). Густина експоненціального розподілу має вигляд

$$f(z) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda z}, & z \geq 0; \\ 0, & z < 0, \end{cases} \quad (1)$$

де λ – масштабний параметр.

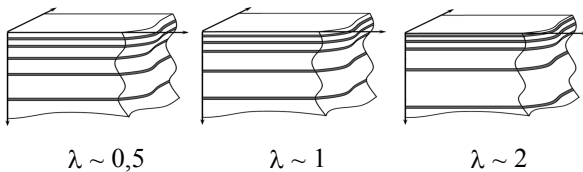


Рисунок 2 – Можливі реалізації структур багатошарового тіла при різних значеннях λ

Зазначимо, що зі збільшенням масштабного параметра λ у приповерхневій області тіла включення ущільнюються (рис. 2). Далі проміжок між включеннями збільшується, тобто зменшується ймовірність знаходження прошарку.

Процес міграції домішки в такому тілі описують рівняння дифузії, сформульовані для кожної фази зокрема [8], а саме

$$\rho_j \frac{\partial c_j(z,t)}{\partial t} = d_j \frac{\partial^2 c_j(z,t)}{\partial z^2}, \quad z \in \Omega_j = \bigcup_{i=1}^{n_j} \Omega_{ij},$$

$$t \in [0, \bar{t}] \quad (\bar{t} < \infty), \quad j = 0, 1, \quad (2)$$

де $c_j(z,t)$ – концентрація домішкових частинок у фазі j ; ρ_j – густина, d_j – кінетичний коефіцієнт переносу в області Ω_j , яку займає фаза j ; n_j – кількість підшарів фази j , Ω_{ij} – i -та однозв'язна область фази j , $i = \overline{1, n_j}$, $j = 0, 1$; z – просторова координата, t – час.

Приймаємо, що на границі тіла $z=0$ підтримується постійне значення концентрації домішкової речовини c_* , а при $z \rightarrow \infty$ концентрація дорівнює нулю, тобто

$$c_0(z,t)|_{z=0} = c_* \equiv const, \quad c_0(z,t)|_{z \rightarrow \infty} = 0. \quad (3)$$

Також накладена нульова початкова умова:

$$c_0(z,t)|_{t=0} = c_1(z,t)|_{t=0} = 0. \quad (4)$$

На границях поділу областей $z = z_l$ і $z = z_l + h_{l1}$ (де h_{l1} – товщина включення Ω_{l1} , l – номер підшару, $l = \overline{1, n_1}$, n_1 – кількість включень) виконуються умови рівності хімічних потенціалів та дифузійних потоків частинок домішкової речовини. Якщо прийняти лінійну залежність хімічного потенціалу від концентрації, то отримуємо умови неідеального контакту для функції концентрації у вигляді [5]:

$$k_0 c_0|_{z=z_l-0} = k_1 c_1|_{z=z_l+0},$$

$$\rho_0 d_0 \frac{\partial c_0}{\partial z} \Big|_{z=z_l-0} = \rho_1 d_1 \frac{\partial c_1}{\partial z} \Big|_{z=z_l+0}; \quad (5)$$

$$k_1 c_1|_{z=z_l+h_{l1}-0} = k_0 c_0|_{z=z_l+h_{l1}+0},$$

$$\rho_1 d_1 \frac{\partial c_1}{\partial z} \Big|_{z=z_l+h_{l1}-0} = \rho_0 d_0 \frac{\partial c_0}{\partial z} \Big|_{z=z_l+h_{l1}+0}, \quad (6)$$

де k_j – коефіцієнт концентраційної залежності хімічного потенціалу у фазі j [9], z_l – випадкова координата “верхньої” межі шару Ω_{l1} .

Зазначимо, що при такій постановці задачі випадковими величинами є границі контакту прошарків

$z = z_l$ та $z = z_l + h_{l1}$, тобто межі областей Ω_{i0} та Ω_{i1} , які є внутрішніми для тіла.

Використовуючи апарат теорії узагальнених функцій, контактну задачу (2), (5), (6) зводимо до рівняння масопереносу у всьому тілі, яке явно враховує стрибки I-го роду функції концентрації та її похідної на границях контакту [5]. Отриманій крайовій задачі ставимо у відповідність еквівалентне інтегродиференціальне рівняння, яке розв'язуємо методом послідовних наближень [8]. Розв'язок отримо у вигляді ряду Неймана, тобто

$$c(z,t) = c_0(z,t) + \int_0^t \int_0^{\infty} G(z,z',t,t') L_s(z',t') c_0(z',t') dz' dt' + \dots, \quad (7)$$

де $c_0(z,t)$ – розв'язок однорідного рівняння дифузії з коефіцієнтами, які є характеристиками матриці, за крайових умов (3), (4), тобто [10]

$$c_0(z,t) = c_* \operatorname{erfc} \left\{ z \sqrt{\rho_0 / 4d_0 t} \right\}; \quad (8)$$

$G(z,z',t,t')$ – функція Гріна даної задачі, тобто є розв'язком відповідної крайової задачі з точковим джерелом і нульовими крайовими умовами:

$$G(z,z',t,t') = \frac{\theta(t-t')}{2\sqrt{\pi\rho_0 d_0(t-t')}} \times \left(\exp \left(-\frac{(z-z')^2 \rho_0}{4d_0(t-t')} \right) - \exp \left(-\frac{(z+z')^2 \rho_0}{4d_0(t-t')} \right) \right), \quad (9)$$

а оператор $L_s(z,t)$ має наступний вигляд

$$L_s(z,t) = (\rho_0 - \rho_1) \sum_i^{n_1} \eta_{i1}(z) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \right\}_{z \in \Omega_{ij}} - (d_0 - d_1) \sum_i^{n_1} \eta_{i1}(z) \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\}_{z \in \Omega_{ij}} - \sum_{j=0}^1 \sum_i^{n_1} d_j \eta_{ij}(z) \times \left[\sum_l^{n_1} \left[\frac{\partial}{\partial z} \right]_{z=z_l} \delta(z-z_l) - []_{z=z_l} \delta'(z-z_l) + \sum_l^{n_1} \left[\frac{\partial}{\partial z} \right]_{z=z_l+h_{l1}} \delta(z-(z_l+h_{l1})) - []_{z=z_l+h_{l1}} \delta'(z-(z_l+h_{l1})) \right]. \quad (10)$$

Тут $\eta_{ij}(z) \equiv \begin{cases} 1, & z \in \Omega_{ij} \\ 0, & z \notin \Omega_{ij} \end{cases}$ – випадкова функція просторової координати («функція структури») [5, 11].

Усереднення поля концентрації домішкової речовини (7) проводимо за ансамблем конфігурацій фаз для експоненціального розподілу включень.

Для знаходження середнього поля концентрації домішкової речовини обмежуємося першими двома членами ряду (7) і враховуємо властивості випадкової «функції структури» $\eta_{ij}(z)$ [4]. У результаті одержуємо формулу для визначення усередненого за ансамблем конфігурацій фаз поля концентрації домішkových частинок:

$$\langle c(z,t) \rangle_{conf} = c_0(z,t) + n_1 \int_0^t \int_0^h G \left[(\rho_0 - \rho_1) \frac{\partial c_0}{\partial t'} - (d_0 - d_1) \frac{\partial^2 c_0}{\partial z'^2} \right] (1 - e^{-\lambda z'}) dz' + \int_h^{\infty} G \left[(\rho_0 - \rho_1) \frac{\partial c_0}{\partial t'} - (d_0 - d_1) \frac{\partial^2 c_0}{\partial z'^2} \right] \left(e^{-\lambda(z'-h)} - e^{-\lambda z'} \right) dz' dt'. \quad (11)$$

Підставляючи у співвідношення (11) вирази для концентрації домішкової речовини в однорідному півпросторі (8) та функції Гріна (9), отримаємо розрахункову формулу для усередненого поля концентрації [8].

Характерні розподіли усередненої концентрації подані на рис. 3. Числові розрахунки проводились у безрозмірних змінних [12] $\tau = d_0 t / z_0$, $\xi = z / z_0$. При цьому за базові приймали наступні значення коефіцієнтів $d_1/d_0 = 10$; $\rho_1/\rho_0 = 1,1$; $n_1 = 50$; $\bar{h} = h/z_0 = 0,1$.

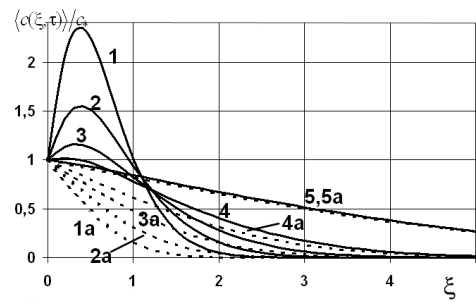


Рисунок 3 – Характерні розподіли усередненої концентрації в різні моменти часу

На рис. 3 наведені розподіли усередненої концентрації в різні моменти безрозмірного часу $\tau = 0.3; 0.5; 1; 10$ (криві 1–5). Криві «а» (штрихові лінії) позначають концентрацію домішки в однорідному півпросторі з характеристиками матриці. Зазначимо, що наявність в тілі випадково розташованих прошарків з відмінними від матриці характеристиками впливає на поведінку поля концентрації домішkových частинок, якщо його кінетичний коефіцієнт дифузії є більшим ніж в матриці (рис. 3). Також зауважимо, що для малих часів характерна поява приповехневого максимуму усередненої концентрації. При цьому значення усередненої концентрації в багатшаровому півпросторі є більшою ніж в однорідному тілі.

Визначимо другі моменти поля концентрації – дисперсію і функцію кореляції для дифузії домішки у двофазному випадково неоднорідному шаруватому півпросторі.

За означенням [7] дисперсією випадкової величини називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини від її математичного сподівання, тобто середнього значення. Дисперсія є центральним моментом другого порядку і мірою відхилення значень випадкової величини від центру розподілу.

Для поля концентрації мігруючої речовини дисперсія поля σ_c^2 за означенням дорівнює

$$\sigma_c^2(z, t) = \langle c^2(z, t) \rangle - \langle c(z, t) \rangle^2. \quad (12)$$

Для середнього від добутку полів концентрації має місце співвідношення [7]

$$\langle c(z_1, t_1) c(z_2, t_2) \rangle = \langle c(z_1, t_1) \rangle \langle c(z_2, t_2) \rangle + \psi_c(z_1, t_1, z_2, t_2), \quad (13)$$

де $\psi_c(z_1, t_1, z_2, t_2)$ – функція кореляції (автокореляції) поля концентрації $c(z, t)$ в точках (z_1, t_1) і (z_2, t_2) [11].

Звідси можемо визначити функцію кореляції поля $\psi_c(z, t, z, t)$ в точці (z, t) :

$$\psi_c(z, t, z, t) = \langle c^2(z, t) \rangle - \langle c(z, t) \rangle \langle c(z, t) \rangle. \quad (14)$$

Тоді середнє від квадрату поля можемо записати як суму добутків середніх та відповідної функції кореляції:

$$\langle c^2(z, t) \rangle = \langle c(z, t) c(z, t) \rangle = \langle c(z, t) \rangle \langle c(z, t) \rangle + \psi_c(z, t, z, t). \quad (15)$$

Якщо ми визначимо функцію кореляції поля концентрації $\psi_c(z, t, z, t)$ в точці (z, t) , тоді знайдемо і дисперсію поля в тілі.

Підставимо у (14) вираз для поля $c(z, t)$ у вигляді ряду Неймана (7) і обмежимося першими чотирма членами розкладу, тобто врахуємо не більше ніж парний взаємовплив підшарів, з яких складене тіло:

$$\begin{aligned} \langle c^2(z, t) \rangle &\approx c_0^2(z, t) + 2c_0(z, t) \left\langle \int_0^t \int_0^\infty G(z, z', t, t') \times \right. \\ &\times L_s(z', t') c_0(z', t') dz' dt' \rangle + 2c_0(z, t) \left\langle \int_0^t \int_0^\infty G(z, z', t, t') L_s(z', t') \times \right. \\ &\times \int_0^t \int_0^\infty G(z', z'', t', t'') L_s(z'', t'') c_0(z'', t'') dz'' dt'' dz' dt' \rangle + \\ &+ \left\langle \int_0^t \int_0^\infty G(z, z', t, t') L_s(z', t') c_0(z', t') dz' dt' \times \right. \\ &\times \left. \int_0^t \int_0^\infty G(z, z', t, t') L_s(z', t') c_0(z', t') dz' dt' \right\rangle. \end{aligned}$$

Також, вважаючи подання поля концентрації у вигляді ряду Неймана, запишемо формулу для квадрата від середнього поля концентрації домішки

$$\begin{aligned} \langle c(z, t) \rangle^2 &= \langle c_0(z, t) + \int_0^t \int_0^\infty G(z, z', t, t') L_s(z', t') c_0(z', t') dz' dt' + \\ &+ \int_0^t \int_0^\infty G(z, z', t, t') L_s(z', t') \int_0^t \int_0^\infty G(z', z'', t', t'') L_s(z'', t'') \times \\ &\times L_s(z'', t'') c_0(z'', t'') dz'' dt'' dz' dt' + \dots \rangle \langle c_0(z, t) + \int_0^t \int_0^\infty G(z, z', t, t') \times \\ &\times L_s(z', t') c_0(z', t') dz' dt' + \int_0^t \int_0^\infty G(z, z', t, t') L_s(z', t') \times \end{aligned}$$

$$\times \int_0^t \int_0^\infty G(z', z'', t', t'') L_s(z'', t'') c_0(z'', t'') dz'' dt'' dz' dt' + \dots \rangle. \quad (16)$$

Подамо одноточкову функцію кореляції поля концентрації $\psi_c(z, t, z, t)$ з урахуванням подання $c(z, t)$ у вигляді ряду Неймана. В результаті отримуємо

$$\begin{aligned} \psi_c(z, t, z, t) &= \left\langle \left(\int_0^t \int_0^\infty G(z, z', t, t') L_s(z', t') c_0(z', t') dz' dt' \right) \times \right. \\ &\times \left. \left(\int_0^t \int_0^\infty G(z, z', t, t') L_s(z', t') c_0(z', t') dz' dt' \right) \right\rangle - \\ &- \left\langle \int_0^t \int_0^\infty G(z, z', t, t') L_s(z', t') c_0(z', t') dz' dt' \right\rangle \times \\ &\times \left\langle \int_0^t \int_0^\infty G(z, z', t, t') L_s(z', t') c_0(z', t') dz' dt' \right\rangle. \quad (17) \end{aligned}$$

Врахуємо неперервність функції $c_0(z, t)$. Тоді дію на неї оператора $L_s(z, t)$ можна подати так

$$L_s(z, t) c_0(z, t) = \sum_{i=1}^{n_1} \eta_{i1}(z) \bar{L}_s(z, t) c_0(z, t), \quad (18)$$

де

$$\bar{L}_s(z, t) c_0(z, t) = (\rho_0 - \rho_1) \frac{\partial c_0(z, t)}{\partial t} - (d_0 - d_1) \frac{\partial^2 c_0(z, t)}{\partial z^2}.$$

Відповідно, співвідношення (17) можемо переписати у вигляді

$$\begin{aligned} \psi_c(z, t, z, t) &= \left\langle \left(\int_0^t \int_0^\infty G(z, z', t, t') \sum_{i=1}^{n_1} \eta_{i1}(z') \bar{L}_s(z', t') c_0(z', t') dz' dt' \right) \times \right. \\ &\times \left. \left(\int_0^t \int_0^\infty G(z, z', t, t') \sum_{i=1}^{n_1} \eta_{i1}(z') \bar{L}_s(z', t') c_0(z', t') dz' dt' \right) \right\rangle - \\ &- \left\langle \int_0^t \int_0^\infty G(z, z', t, t') \sum_{i=1}^{n_1} \eta_{i1}(z') \bar{L}_s(z', t') c_0(z', t') dz' dt' \right\rangle \times \\ &\times \left\langle \int_0^t \int_0^\infty G(z, z', t, t') \sum_{i=1}^{n_1} \eta_{i1}(z') \bar{L}_s(z', t') c_0(z', t') dz' dt' \right\rangle. \quad (19) \end{aligned}$$

Врахуємо, що функція Гріна $G(z, z', t, t')$, оператор $\bar{L}_s(z, t)$ і поле концентрації домішки в однорідному тілі $c_0(z, t)$ є детермінованими, а отже є детермінованим вираз $\bar{L}_s(z, t) c_0(z, t)$; що усереднення проводимо за ансамблем конфігурацій фаз, тобто випадковою величиною є координата «верхньої» межі включень z_{i1} ; що під інтегралами у формулі (19) немає інших членів з індексом i , а також, що добуток двох двократних інтегралів можна подати у вигляді одного чотирикратного інтеграла. Тоді співвідношення (19) можна подати так

$$\begin{aligned} \Psi_c(z, t, z, t) &= \int_0^t \int_0^t \int_0^t \int_0^t G(z, z', t, t') G(z, \bar{z}', t, \bar{t}') \times \\ &\times \bar{L}_s(z', t') c_0(z', t') \left\langle \sum_{i=1}^{n_1} \eta_{i1}(z') \sum_{k=1}^{n_1} \eta_{k1}(\bar{z}') \right\rangle d\bar{z}' d\bar{t}' dz' dt' - \\ &- \left(\int_0^t \int_0^t G(z, z', t, t') \bar{L}_s(z', t') c_0(z', t') \left\langle \sum_{i=1}^{n_1} \eta_{i1}(z') \right\rangle dz' dt' \right) \times \\ &\times \left(\int_0^t \int_0^t G(z, \bar{z}', t, \bar{t}') \bar{L}_s(\bar{z}', \bar{t}') c_0(\bar{z}', \bar{t}') \left\langle \sum_{k=1}^{n_1} \eta_{k1}(\bar{z}') \right\rangle d\bar{z}' d\bar{t}' \right) = \\ &= \int_0^t \int_0^t \int_0^t \int_0^t G(z, z', t, t') G(z, \bar{z}', t, \bar{t}') \bar{L}_s(z', t') c_0(z', t') \times \\ &\times \bar{L}_s(\bar{z}', \bar{t}') c_0(\bar{z}', \bar{t}') \left\langle \sum_{i=1}^{n_1} \eta_{i1}(z') \sum_{k=1}^{n_1} \eta_{k1}(\bar{z}') \right\rangle d\bar{z}' d\bar{t}' dz' dt' - \\ &- \int_0^t \int_0^t \int_0^t \int_0^t G(z, z', t, t') G(z, \bar{z}', t, \bar{t}') \bar{L}_s(z', t') c_0(z', t') \times \\ &\times \bar{L}_s(\bar{z}', \bar{t}') c_0(\bar{z}', \bar{t}') \left\langle \sum_{i=1}^{n_1} \eta_{i1}(z') \right\rangle \left\langle \sum_{k=1}^{n_1} \eta_{k1}(\bar{z}') \right\rangle d\bar{z}' d\bar{t}' dz' dt'. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{i=1}^{n_1} \eta_{i1}(z') \sum_{k=1}^{n_1} \eta_{k1}(\bar{z}') \right\rangle &= \sum_{i,k=1}^{n_1} \langle \eta_{i1}(z') \eta_{k1}(\bar{z}') \rangle = \\ &= \sum_{i,k=1}^{n_1} (\langle \eta_{i1}(z') \rangle \langle \eta_{k1}(\bar{z}') \rangle + \psi_\eta(z', \bar{z}')), \end{aligned} \quad (20)$$

де $\psi_\eta(z', \bar{z}')$ – функція кореляції фаз, остаточно одержимо

$$\begin{aligned} \Psi_c(z, t, z, t) &= n_1^2 \int_0^t \int_0^t \int_0^t \int_0^t G(z, z', t, t') G(z, \bar{z}', t, \bar{t}') \bar{L}_s(z', t') c_0(z', t') \times \\ &\times \bar{L}_s(\bar{z}', \bar{t}') c_0(\bar{z}', \bar{t}') \psi_\eta(z', \bar{z}') d\bar{z}' d\bar{t}' dz' dt'. \end{aligned} \quad (21)$$

Отже, ми отримали вираз (21) для функції кореляції поля концентрації домішкової речовини в двофазному багат шаровому півпросторі в точці (z, t) , який поданий через функцію кореляції фаз $\psi_\eta(z, \bar{z})$.

Аналогічним чином знайдемо функцію кореляції поля концентрації домішкової речовини $\Psi_c(z_1, t_1; z_2, t_2)$ у шаруватому півпросторі у двох точках тіла (z_1, t_1) і (z_2, t_2) , в результаті маємо

$$\begin{aligned} \Psi_c(z_1, t_1; z_2, t_2) &= n_1^2 \int_0^{t_1} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \int_0^{t_2} G(z_1, z'_1, t_1, t'_1) \times \\ &\times G(z_2, z'_2, t_2, t'_2) \bar{L}_s(z'_1, t'_1) c_0(z'_1, t'_1) \times \\ &\times \bar{L}_s(z'_2, t'_2) c_0(z'_2, t'_2) \psi_\eta(z'_1, z'_2) dz'_1 dt'_1 dz'_2 dt'_2. \end{aligned} \quad (22)$$

Таким чином, отримано формулу для доточкової функції кореляції поля концентрації частинок для двофазного шаруватого півпростору у вигляді чотирьохкратного інтеграла, підінтегральна функція якого

як множник містить функцію кореляції фаз і пропорційна квадрату кількості включень.

Ми прийняли, що включення в півпросторі розташовані за експоненціальним розподілом (1) (рис. 3). Функція кореляції включень для експоненціального розподілу має вигляд [13]

$$\Psi_\eta(z, z_1) = \sigma_\eta^2 e^{-\frac{|z-z_1|}{l}}, \quad (23)$$

де l – радіус кореляції шаруватих включень, $\sigma_\eta^2 = 1/\lambda^2$ – дисперсія для експоненціального розподілу включень.

Підставивши функцію кореляції включень (23) у співвідношення (21), отримаємо формулу для дисперсії поля концентрації домішки в півпросторі з експоненціальним розподілом включень:

$$\begin{aligned} \sigma_c^2(z, t) &= n_1^2 \sigma_\eta^2 \int_0^t \int_0^t \int_0^t \int_0^t G(z, z', t, t') \times \\ &\times G(z, \bar{z}', t, \bar{t}') \bar{L}_s(z', t') c_0(z', t') \times \\ &\times \bar{L}_s(\bar{z}', \bar{t}') c_0(\bar{z}', \bar{t}') e^{-\frac{|z'-\bar{z}'|}{l}} d\bar{z}' d\bar{t}' dz' dt'. \end{aligned} \quad (24)$$

Враховуючи вираз для функції Гріна в однорідному півпросторі (9) та вираз (18), маємо

$$\begin{aligned} \sigma_c^2(z, t) &= \left(\frac{n_1 \sigma_\eta Q c_*}{4\pi d_0} \right)^2 \int_0^t \int_0^t \int_0^t \int_0^t \frac{\theta(t-t')\theta(t-\bar{t}')}{\sqrt{(t-t')(t-\bar{t}')t'^3\bar{t}'^3}} \times \\ &\times \left(e^{-\frac{|z-z'|^2 \tilde{d}}{t-t'}} - e^{-\frac{|z+z'|^2 \tilde{d}}{t-t'}} \right) \left(e^{-\frac{|z-\bar{z}'|^2 \rho_0}{t-\bar{t}'}} - e^{-\frac{|z+\bar{z}'|^2 \tilde{d}}{t-\bar{t}'}} \right) \times \\ &\times z' \bar{z}' e^{-\frac{\tilde{d} z'^2}{t'^2}} e^{-\frac{\tilde{d} \bar{z}'^2}{\bar{t}'^2}} e^{-\frac{|z'-\bar{z}'|}{l}} d\bar{z}' d\bar{t}' dz' dt'. \end{aligned} \quad (25)$$

Після інтегрування остаточно отримаємо розрахункову формулу для знаходження дисперсії поля концентрації домішки в півпросторі з експоненціальним розподілом включень

$$\begin{aligned} \sigma_c^2(z, t) &= \left(\frac{n_1 \sigma_\eta Q c_*}{4\pi d_0} \right)^2 \int_0^t \int_0^t \frac{\theta(t-t')\theta(t-\bar{t}')}{\sqrt{(t-t')(t-\bar{t}')t'^3\bar{t}'^3}} \times \\ &\times (\bar{I}_1 - \bar{I}_2 + \bar{I}_3 - \bar{I}_4) d\bar{t}' dt', \end{aligned} \quad (26)$$

де $\bar{I}_k = I_k(z, t, z, t)$, $k = \overline{1,4}$,

$$\begin{aligned} I_i(z_1, t_1, z_2, t_2) &= A_i(t_1, \bar{t}'_1, t_2, t'_2, z_2) \times \\ &\times \left[k_i \left(M_1 \left(b_i^-(t_1, t'_1, t_2, t'_2, z_1, z_2), q_i^-(t_1, t'_1, z_1, z_2), b_i(t_2, \bar{t}'_2, z_2) \right) - \right. \right. \\ &- M_1 \left(b_i^+(t_1, t'_1, t_2, t'_2, z_1, z_2), q_i^+(t_1, t'_1, z_1, z_2), b_i(t_2, \bar{t}'_2, z_2) \right) \left. \right) + \\ &+ M_2 \left(b_+(t_1, \bar{t}'_1, z_1), b_i(t_2, \bar{t}'_2, z_2) \right) - M_2 \left(b_-(t_1, \bar{t}'_1, z_1), b_i(t_2, \bar{t}'_2, z_1) \right) + \\ &+ M_3 \left(\phi_i^-(t_1, \bar{t}'_1, t_2, \bar{t}'_2, z_1, z_2), b_i(t_2, \bar{t}'_2, z_2) \right) - \\ &- M_3 \left(\phi_i^+(t_1, \bar{t}'_1, t_2, \bar{t}'_2, z_1, z_2), b_i(t_2, \bar{t}'_2, z_2) \right) \left. \right], \quad i = \overline{1,2}; \\ I_j(z_1, t_1, z_2, t_2) &= A_j(t_1, \bar{t}'_1, t_2, t'_2, z_2) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times [k_j \{M_1(b_i^+(t_1, t'_1, t_2, t'_2, z_1, z_2), q_j^+(t_1, t'_1, z_1, z_2), b_+(t_2, \bar{t}'_2, z_2)) - \\ & - M_1(b_j^-(t_1, t'_1, t_2, t'_2, z_1, z_2), q_j^-(t_1, t'_1, z_1, z_2), b_+(t_2, \bar{t}'_2, z_2))\} + \\ & + M_3(\phi_j^+(t_1, \bar{t}'_1, t_2, \bar{t}'_2, z_1, z_2), b_-(t_2, \bar{t}'_2, z_2)) - \\ & - M_3(\phi_j^-(t_1, \bar{t}'_1, t_2, \bar{t}'_2, z_1, z_2), b_-(t_2, \bar{t}'_2, z_2))], j = 3, 4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1(b, q_{ii}^\pm, b_i) &= \frac{e^{\bar{q}_i^\pm}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\bar{a}^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{b_{a_1}^2}}{n!(2n+1)} \left\{ a_1^{-1} p^{2n+1} e^{-x^2} (2n+1)!! \Sigma_n + \right. \right. \\ & + \sqrt{\pi} (2n+1)!! 2^{-n} \operatorname{erf}(p) \left. \left. + \left(a_1^{-1} + \bar{b}/\bar{a} \right) \sum_{k=0}^n \binom{2n+2}{2k} \left(b_{a_1} \right)^{2n+2-2k} \times \right. \right. \\ & \times \left. \left. \left(p^{2k-1} e^{-p^2} (2k-1)!! \Sigma_{k1} + \sqrt{\pi} (2k-1)!! 2^{-k} \operatorname{erf}(p) \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(a_1^{-1} + 1 \right) \sum_{k=0}^n \binom{2n+2}{2k+1} \left(b_{a_1} \right)^{2n+1-k} p^{2k-1} e^{-x^2} \Sigma_{k2} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2(b, b_1) &= \left(k_{m1} \operatorname{erf}(b_1/2a) + 2^{-1} e^{-(b_{a_1})^2} \right) \times \\ & \times e^{-\frac{dz^2}{t-t'}} \left[\frac{e^{b_a^2}}{2a^2} \left(b_a \sqrt{\pi} \{ \operatorname{erf}(b_a) + 1 \} + e^{-b_a^2} \right) \right]; \end{aligned}$$

$$M_3(b, b_i) = \frac{1}{2} e^{-\frac{\bar{b}^2}{t-t'}} \frac{e^{b_{a_2}^2}}{2a_2^2} \left(b_{a_2} \left[\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(b_{a_2}) + \sqrt{\pi} \right] + e^{-b_{a_2}^2} \right),$$

$$A_i(s, s', s, \bar{s}', u) = \frac{1}{a^2(s, \bar{s}')} e^{-\frac{du^2}{s-s'} + \frac{b_i^2(s, s', u)}{4a^2(s, s')}};$$

$$k_i(s, s') = \frac{b_i(s, s') \sqrt{\pi}}{4a} \quad (i = \bar{1}, 4);$$

$$b_{\pm}(s, s', u) = \frac{1}{l} \pm \frac{2ud}{s-s'}; \quad b_{1,2}(s, s', u) = -\frac{1}{l} \pm \frac{2ud}{s-s'};$$

$$x = -(b_1 a_1 / \bar{a} + b/a_1) / 2;$$

$$\begin{aligned} q_i^\pm(s, s', u, w) &= -\frac{db_i^2(s, s', u)}{4} + \frac{b_i(s, s', u)}{2l} - \\ & - \frac{d(2w \pm b_i(s, s', u))}{2(s-s')} \quad i = \bar{1}, 4; \end{aligned}$$

$$\Sigma_n = \sum_{l=0}^n \frac{p^{-2l}}{(2n-2l-1)!!}; \quad \Sigma_{k1} = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{p^{-2l}}{2^l (2k-2l-1)!!};$$

$$\Sigma_{k2} = \sum_{l=0}^k \frac{k!}{2^l (k-l)!! p^{2l}}; \quad a(s, s') = \sqrt{\frac{d}{s'^2} + \frac{d}{s-s'}};$$

$$a_1(t, t', t, \bar{t}') = \frac{a(t, t')}{a(t, \bar{t}')}; \quad a_2(t, t', t, \bar{t}') = \sqrt{a^2(t, t') + a^2(t, \bar{t}')};$$

$$b_i^\pm(s, s', r, r', u, w) = \frac{d}{a} \left[\frac{1}{dl} - b_i(r, r', u) - \frac{2w \mp b_i(r, r', u)}{s-s'} \right], \quad i = 1, 2;$$

$$\begin{aligned} b_j^\pm(s, s', r, r', u, w) &= \frac{d}{a} \left[\frac{1}{dl} - b_j(r, r', u) \pm, \right. \\ & \left. \pm \frac{2w \mp b_j(r, r', u)}{s-s'} \right] \quad j = 3, 4; \end{aligned}$$

$$\Phi_i^\pm(s, s', r, r', u, w) = \frac{\left(\pm \frac{2wd}{s-s'} + \frac{1}{l} + b_i(r, r', u) \right)}{2a_2(s, s', r, r')}, \quad i = 1, 2;$$

$$\Phi_j^\pm(s, s', r, r', u, w) = \frac{\left(\pm \frac{2zd}{s-s'} - \frac{1}{l} + b_j(r, r', u) \right)}{2a_2(s, s', r, r')}, \quad j = 3, 4;$$

$$p = -(a_1 \bar{b} + b_{a1}); \quad \bar{b} = b_1 / (2\bar{a}); \quad b_{a2} = b / (2a_1);$$

$$\bar{b}_1 = b_1 / (2a_1); \quad b_a = b / (2a);$$

$$\text{тут } \binom{n}{k} = \frac{(n)!}{(k)!(n-k)!} \text{ - біноміальні коефіцієнти.}$$

Якщо підставимо вираз (23) у співвідношення (22), тоді отримаємо формулу для двоточкової функції кореляції поля концентрації домішки в напівпросторі з експоненціальним розподілом включень:

$$\begin{aligned} \Psi_c(z_1, t_1; z_2, t_2) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} G(z_1, z'_1, t_1, t'_1) \times \\ & \times G(z_2, z'_2, t_2, t'_2) \bar{L}_s(z'_1, t'_1) c_0(z'_1, t'_1) \times \\ & \times \bar{L}_s(z'_2, t'_2) c_0(z'_2, t'_2) n_1^2 \sigma_{\eta}^2 e^{-\frac{|z'_1 - z'_2|}{l}} dz'_2 dt'_2 dz'_1 dt'_1. \quad (27) \end{aligned}$$

Врахуємо вираз для функції Гріна (9) та вираз (18) у формулі (27), тоді

$$\begin{aligned} \Psi_c(z_1, t_1; z_2, t_2) &= \left(\frac{n_1 \sigma_{\eta} Q c_*}{4\pi d_0} \right)^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\theta(t_1 - t'_1) \theta(t_2 - t'_2)}{\sqrt{(t_1 - t'_1)(t_2 - t'_2) t_1^3 t_2^3}} \times \\ & \times \int_0^{\infty} z'_1 e^{-\frac{\tilde{d} z_1^2}{t_1^2}} \left(e^{-\frac{|z_1 - z'_1|^2 \tilde{d}}{t_1 - t'_1}} - e^{-\frac{|z_1 + z'_1|^2 \tilde{d}}{t_1 - t'_1}} \right) \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\frac{|z_2 - z'_2|^2 \tilde{d}}{t_2 - t'_2}} - \right. \\ & \left. - e^{-\frac{|z_2 + z'_2|^2 \tilde{d}}{t_2 - t'_2}} \right\} z'_2 e^{-\frac{dz_2^2}{t_2^2}} e^{-\frac{z'_1 - z'_2}{l}} dz'_2 + \int_{z'_1}^{\infty} e^{-\frac{|z_2 - z'_2|^2 \tilde{d}}{t_2 - t'_2}} - \\ & \left. - e^{-\frac{|z_2 + z'_2|^2 \tilde{d}}{t_2 - t'_2}} \right\} z'_2 e^{-\frac{dz_2^2}{t_2^2}} e^{-\frac{z' - z'}{l}} dz'_2 \left\{ dz'_1 dt'_2 dt'_1. \quad (28) \end{aligned}$$

Після інтегрування в (28) отримаємо розрахункову формулу для двоточкової функції кореляції поля концентрації частинок у багатoshаровому півпросторі з експоненціальним розподілом включень:

$$\begin{aligned} \Psi_c(z_1, t_1; z_2, t_2) &= \left(\frac{n_1 \sigma_{\eta} Q c_*}{4\pi d_0} \right)^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\theta(t_1 - t'_1) \theta(t_2 - t'_2)}{\sqrt{(t_1 - t'_1)(t_2 - t'_2) t_1^3 t_2^3}} \times \\ & \times (\tilde{I}_1 - \tilde{I}_2 + \tilde{I}_3 - \tilde{I}_4) dt'_2 dt'_1, \quad (29) \end{aligned}$$

де $\tilde{I}_k = I_k(z_1, t_1, z_2, t_2)$, $k = \bar{1}, 4$.

Значимо, що формули для дисперсії (24) та двоточкової функції кореляції поля концентрації (27) є справедливими для довільних крайових умов.

Числові розрахунки проводимо в безрозмірних змінних τ, ξ . Для розрахунку дисперсії (27) та двоточкової функції кореляції (29) поля у півпросторі за експоненціального розподілу включень використано формулу чисельного інтегрування для подвійного інтеграла в квадратурах [12, 14]. Значимо, що підінтегральні функції (26) і (29) не мають стрибків і нескінченностей та інтегрування відбувається по

обмеженій області. Приклади поверхонь, які утворює підінтегральна функція (27), наведені на рис. 4 для моментів часу $\tau_1 = 0,8$; $\tau_2 = 0,8$ (рис. 4,а) та $\tau_1 = 2$; $\tau_2 = 2$ (рис. 4,б).

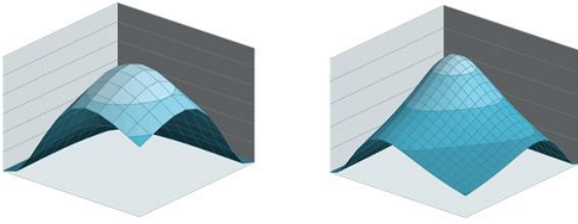


Рисунок 4 – Підінтегральна функція (29):
а) – для $\tau_1 = 0,8$; $\tau_2 = 0,8$; б) – $\tau_1 = 2$; $\tau_2 = 2$

На рис. 5 проілюстровано характерні розподіли дисперсії поля концентрації домішкової речовини в напівпросторі з експоненціальним розподілом включень в різні моменти безрозмірного часу $\tau = 0,05$; $0,1$; $0,2$; $0,3$; $0,4$; $0,6$ (криві 1–6) для малого $l = 1$ (рис. 5,а) і великого $l = 10$ (рис. 5,б) радіусів кореляції включень. Зазначимо, що радіус кореляції є вхідним параметром задачі, він вводиться у функції кореляції фаз для експоненціального розподілу (23). Тут приймалися наступні значення коефіцієнтів $d_1/d_0 = 0,1$; $\rho_1/\rho_0 = 0,8$; $n_1 = 50$.

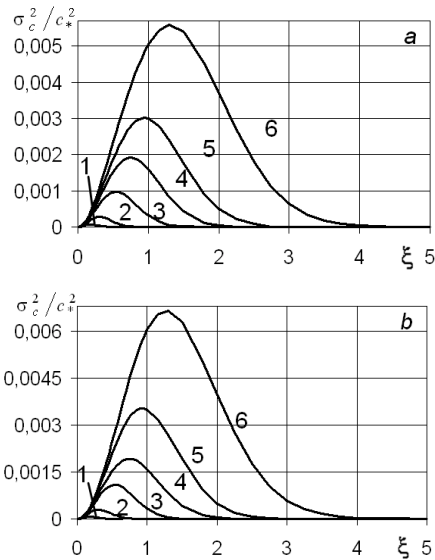


Рисунок 5 – Дисперсія поля концентрації в різні моменти безрозмірного часу при $l = 1$ (а) та $l = 10$ (б)

Від початку перебігу процесу дифузії у випадковій шаруватій структурі дисперсія поля концентрації починає зростати в околі поверхні, де діє джерело маси (криві 1, рис. 5). З часом цей максимум зростає і зсувається в глиб тіла (криві 2–6, рис. 5), крива прямує до симетричного вигляду. Зазначимо, що для $\tau = 0$, як і $\xi = 0$, $\sigma_c^2(\xi, \tau) = 0$.

У стаціонарному випадку дисперсія поля дорівнює нулю на всьому проміжку: $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \sigma_c^2(\xi, \tau) = 0$.

Зауважимо, що величина радіуса кореляції включень практично не впливає на дисперсію поля для невеликих часових інтервалів протікання процесу дифузії (криві 1–4, рис. 5). Потім, починаючи з моменту безрозмірного часу $\tau = 0,3$, більші значення радіуса кореляції включень призводять до більших значень дисперсії поля концентрації. Так, для часу $\tau = 0,6$ максимальні значення дисперсії для $l = 1$ і $l = 10$ (криві 6, рис. 5) відрізняються на 17%.

На рис. 6, 7 показано просторові розподіли та їх проекції на площину Ox_1x_2 для функції кореляції поля концентрації в різні моменти безрозмірного часу τ_1 і τ_2 . Вздовж осей Ox та Oy відкладені безрозмірні просторові змінні $\xi_i = z_i/z_0$ $i = \overline{1,2}$, вздовж осі Oz – функцію $\psi_c(\xi_1, \tau_1, \xi_2, \tau_2)/c_*$. При цьому прийнято $d_1/d_0 = 0,01$; $\rho_1/\rho_0 = 0,8$; $\bar{h} = h/z_0 = 0,05$, $n_1 = 50$; $l = 10$.

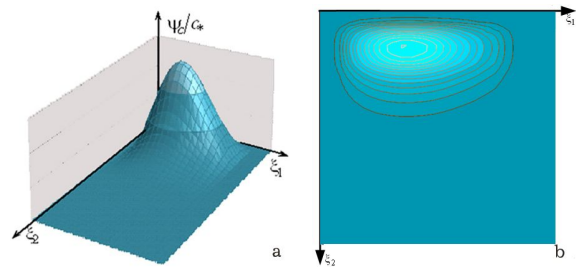


Рисунок 6 – Функція кореляції поля концентрації в моменти безрозмірного часу $\tau_1 = 0,05$; $\tau_2 = 0,01$

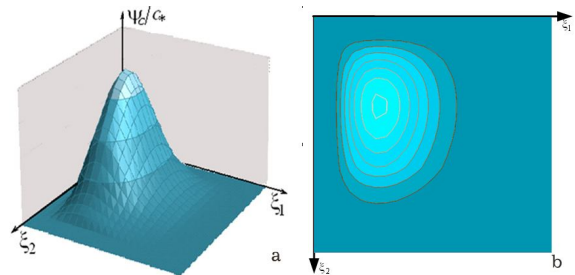


Рисунок 7 – Функція кореляції поля концентрації в моменти безрозмірного часу $\tau_1 = 0,1$; $\tau_2 = 0,2$

На границях півпростору ($z_1 = 0$, $z_2 = 0$) і в початкові моменти часу ($t_1 = 0$, $t_2 = 0$) функція кореляції дорівнює нулю.

З ростом часової змінної функція кореляції різко зростає біля поверхні, де діє джерело маси. Рис. 6 ілюструє появу максимуму функції $\psi_c(z_1, t_1; z_2, t_2)$ в момент часу $\tau_1 = 0,05$; $\tau_2 = 0,01$, а рис. 7 – зсув цього максимуму в глиб тіла в момент $\tau_1 = 0,1$; $\tau_2 = 0,2$.

Збільшення однієї часової змінної при фіксації іншої призводить до зростання функції кореляції в околі тієї самої границі $z_1 = 0$ (рис. 6). При цьому цей максимум поступово зсувається до в глиб тіла (рис. 7). Далі збільшення часів τ_1 і τ_2 веде до подальшого зростання функції кореляції в усій області

визначення та поступовому прямуванні поверхні до симетричного вигляду. У стаціонарних випадках $\lim_{t_1 \rightarrow \infty} \psi_c(z_1, t_1; z_2, t_2) = 0$ і $\lim_{t_2 \rightarrow \infty} \psi_c(z_1, t_1; z_2, t_2) = 0$.

Величина радіуса кореляції включень l не впливає на функцію кореляції, як і на дисперсію поля, в малих часових інтервалах. Для великих часів протікання процесу дифузії збільшення радіуса кореляції l призводить до зростання функції $\psi_c(z_1, t_1; z_2, t_2)$.

Зміна характеристик середовища, як і для дисперсії, призводить тільки до зміни значення функції кореляції не змінюючи її поведінку. При цьому зміна відношення коефіцієнтів дифузії суттєво впливає на значення функції кореляції поля. Так, збільшення параметра d_1/d_0 на порядок веде до зростання максимуму функції ψ_c/c_* також на порядок. При зменшенні характерної товщини шаруватих включень в рази при тій самій їхній об'ємній частці (тобто збільшенні кількості включень) значення функції кореляції поля концентрації зростає на порядки.

ВИСНОВКИ. Таким чином, запропоновано підхід до математичного опису других моментів поля концентрації речовини, дифундує у двофазних випадково неоднорідних шаруватих тілах – дисперсії поля і функції кореляції поля концентрації. Цей підхід використовує подання поля концентрації у вигляді збіжного інтегрального ряду Неймана та враховує усереднення за ансамблем конфігурацій фаз. У результаті отримано формули для визначення дисперсії поля та функції кореляції поля в інтегральному вигляді через детерміновані функцію Гріна та концентрацію речовини в однорідному тілі, а також відому функцію кореляції фаз. При цьому враховувався не тільки ймовірнісний розподіл фаз, але і парний взаємовплив включень.

Отримано розрахункові формули для дисперсії поля та функції кореляції поля концентрації мігруючих домішкових частинок у півпросторі з експоненціальним розподілом включень. На основі одержаних формул проведено комп'ютерне моделювання дисперсії та функції кореляції поля концентрації та встановлено їхні основні закономірності. Зокрема показано, що від початку протікання процесу дифузії дисперсія і функція кореляції зростають в околі поверхні тіла, де діє джерело маси. З часом максимум зсувається в глиб тіла, а досліджувані функції прямують до симетричного вигляду.

Зазначимо, що враховуючи накладені обмеження при отриманні формул для дисперсії поля та функції кореляції поля, а також їх достатньо загальний вигляд, одержані результати можна застосовувати і до інших фізичних процесів, що описуються диференціальними рівняннями параболічного типу, якщо відповідне випадкове поле можна подати у вигляді збіжного ряду Неймана.

ЛІТЕРАТУРА

1. Pareige C., Roussel M., Novy S. et al. Kinetic study of phase transformation in a highly concentrated Fe-Cr alloy: Monte Carlo simulation versus experiments // *Acta Materialia*. – 2011. – Vol. 59. – PP. 2404–2411.
2. Bukhanovsky V., Grechanyuk N., Minakova R. et al. Production technology, structure and properties of Cu-W layered composite condensed materials for electrical contacts // *International Journal of Refractory Metals and Hard Materials*. – 2011. – Vol. 29, iss. 5. – PP. 573–581.
3. Кляцкин В. Статистика и реальность в стохастических динамических системах // *Нелинейные волны* 2004. – Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2005. – С. 256–286.
4. Чернуха О., Білушак Ю. Побудова розв'язку рівняння дифузії частинок у випадково неоднорідному півпросторі з ерлангівським розподілом шарів // *Задачі термодифузії та методи їх розв'язку: колект. моногр.; під ред. В.П. Ляшенка*. – Кременчук: Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, 2012. – С. 81–90.
5. Чапля С.Я., Чернуха О.Ю. Математичне моделювання дифузійних процесів у випадкових і регулярних структурах. – К.: Наукова думка, 2009. – 302 с.
6. Chaplya Y., Chernukha O., Bilushchak Y. Contact initial boundary-value problem of the diffusion of admixture particles in a two-phase stochastically inhomogeneous stratified strip // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2012. – Vol. 183, no 1. – PP. 83–99.
7. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. *Справочник по теории вероятности и математической статистике*. – М.: Наука, 1985. – 640 с.
8. Чапля С., Чернуха О., Гончарук В., Білушак Ю. Моделювання процесів дифузії домішкових частинок у півпросторі з експоненціальним розподілом включень // *Моделювання та інформаційні технології*. – 2011. – Вип. 59. – С. 140–152.
9. Мюнстер А. *Химическая термодинамика*. – М.: Мир, 1971. – 295 с.
10. Лыков А. *Теория теплопроводности*. – М.: Высшая школа, 1978. – 463 с.
11. Рытов С., Кравцов Ю., Татарский В. *Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля*. – М.: Наука, 1978. – 436 с.
12. *Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган*. – М.: Мир, 1979. – 830 с.
13. Чапля С., Чернуха О., Гончарук В., Торський А. Процеси переносу розпадної речовини в гетерогенних середовищах. – Львів: Євросвіт, 2009. – 261 с.
14. Крылов В. *Приближенное вычисление интегралов*. – М.: Наука, 1967. – 500 с.

MATHEMATICAL MODELING OF THE SECOND MOMENTS OF RANDOM CONCENTRATION FIELD IN A SEMISPACE WITH EXPONENTIAL DISTRIBUTION OF STRATIFIED INCLUSIONS

Y. Bilushchak

Centre of Mathematical Modelling of Pidstryhach IAPMM of Ukrainian NAS

vul. Dudayeva, 15, Lviv, 79005, Ukraine. E-mail: byixx13@gmail.com.

The work is devoted to mathematical modeling of admixture diffusion processes in a two-phase stratified semispace with taking into account the random disposition of a sublayers and the condition of nonideal mass contact on interphases. The layer inclusions are disposed according to the exponential distribution. The equivalent integrodifferential equation is formulated. Its solution is obtained in the form of integral Neumann series. Averaging of the obtained solution is carried out on the basis of the ensemble of phase configurations with the exponential function of inclusions distribution. Dispersion of the field of particle concentration is defined as well as a two-point function of field correlation (self-correlation) for the diffusion process in the stratified semispace with exponential distribution of inclusions. Software is designed and the influence of environment characteristics and structure parameters on second moments of admixture particle concentration field, which migrates to the layered semispace with an exponential distribution of inclusions, is established.

Key words: diffusion, randomly inhomogeneous stratified structure, exponential distribution, field dispersion, correlation function.

REFERENCES

1. Pareige, C., Roussel, M., Novy, S., Kuksenko, V., Olsson, P., Domain, C., Pareige, P. (2011) "Kinetic study of phase transformation in a highly concentrated Fe–Cr alloy: Monte Carlo simulation versus experiment", *Acta Materialia*, vol. 59, pp. 2404–2411.
2. Bukhanovsky, V., Grechanyuk, N., Minakova, R. et al. (2011) "Production technology, structure and properties of Cu–W layered composite condensed materials for electrical contacts", *International Journal of Refractory Metals and Hard Materials*, vol. 29, iss. 5, pp. 573–581.
3. Klyatskin, V. (2005) «Statistics and Reality in Stochastic Dynamical Systems», *Nonlinear Waves 2004*, IPF. RAN, Nizhni Novgorod, pp. 256–286.
4. Chernukha, O., Bilushchak, Y. (2012) *Pobudova rozv'yazku rivnyannya difuziyi chastinok u vipadkovo neodnorodnomu pivprostori z erlangivskim rozpodklom shariv: Zadachi termodifuziyi ta metodi yih rozv'yazku* [Constructing a solution of equation of particle diffusion in a randomly nonhomogeneous semispace with erlangian distribution of layers: Thermal diffusion problems and solution methods], ed. by V. Lyashenko, monograf., Kremenchuk Mikhaylo Ostrohradskyi National University, pp. 81–90, Ukraine.
5. Chaplya, Y.Y., Chernukha, O.Y. (2009) *Matematichne modelyannya difuznih procesiv u vipadkovih ta vporядkovanikh strukturah* [Mathematical modelling diffusive processes in random and regular structures], Naukova Dumka, Kiev, Ukraine.
6. Chaplya, Y., Chernukha, O., Bilushchak, Y. (2012) "Contact initial boundary-value problem of the diffusion of admixture particles in a two-phase stochastically inhomogeneous stratified strip", *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 183, no. 1, pp. 83–99.
7. Korolyuk, V.S., Portenko, N.I., Skorokhod, A.V., Turbin, A.F. (1985) *Spravochnyk po teorii veroyatnosti i matematicheskoy statistike* [Reference book on the probability theory and mathematical statistics], Nauka Moscow, Russia.
8. Chaplya, Y., Chernukha, Y., Goncharuk, V., Bilushchak Y. (2011) "Modeling admixture diffusion processes in a semispace with the exponential distribution of inclusions", *Modelling and information technologies*, vol. 59, pp. 140–152.
9. Munster, A. (1971) *Khimicheskaya termodinamika* [Chemical Thermodynamics], Mir, Moscow, Russia.
10. Lykov, A.V. (1978) *Teoriya teploprovodnosti* [The theory of heat transfer], Vysshaya Shkola, Moscow, Russia.
11. Rytov, M., Kravtsov, Y., Tatarskii, V. (1978) *Vvedenie v statisticheskuyu radiofiziku. Chast II. Sluchaynie polya* [Introduction to Statistical Radiophysics. Part II. Random Fields], Nauka, Moscow, Russian.
12. *Dovidnyk specialnih funkciy* (1979) [Handbook of special functions], Edited by M. Abramowitz and I. Stegun. Mir, Moscow, Russia.
13. Chaplya, Y., Chernukha, O., Goncharuk, V., Torsky, A. (2010) *Procesi perenesennya rehovini, scho rozpadaetsya, v geterogennih seredovischah* [Transfer processes of decaying substance in heterogeneous media], Eurosvi, Lviv, Ukraine.
14. Krylov, V. (1967) *Priblizhennoe vyichislenie integralov* [Approximate calculation of integrals], Nauka, Moscow, Russian.

Стаття надійшла 27.06.2014.