

УДК 66.011, 519.855

МОДЕЛЬ НЕАВТОНОМНОЇ СИСТЕМИ ВИРОБНИЦТВА БІОГАЗУ ТА МЕТОД ЇЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ**І. В. Гураль, М. П. Дивак, Ю. Р. Піговський**

Тернопільський національний економічний університет

вул. Чехова, 8, м. Тернопіль, 46000, Україна. E-mail: div@tneu.edu.ua, mdy@tneu.edu.ua, pigovsky@gmail.com

Розглянуто задачу побудови математичної моделі неавтономної системи для виробництва біогазу у вигляді інтервального різницевого рівняння на основі модифікованого рівняння Моно. Також модифіковано метод побудови ідентифікації параметрів математичної моделі, що забезпечує знаходження інтервальних оцінок цих параметрів. Побудовано єдину неавтономну модель динаміки об'єму залишкової маси субстрату на основі бананових шкур, яка забезпечує адекватне відображення динаміки зазначеного процесу для цілого діапазону температур, в межах мезофільного режиму процесу бродіння.

Ключові слова: біогаз, анаеробне мікробіологічне бродіння, неавтономна модель, інтервальне різницеве рівняння, цільова функція, ідентифікація параметрів.

МОДЕЛЬ НЕАВТОНОМНОЇ СИСТЕМИ ПРОИЗВОДСТВА БИОГАЗА И МЕТОД ЕЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ**И. В. Гураль, Н. П. Дывак, Ю. Р. Пиговский**

Тернопольский национальный экономический университет

ул. Чехова, 8, г. Тернополь, 46000, Украина. E-mails: div@tneu.edu.ua, mdy@tneu.edu.ua, pigovsky@gmail.com

Рассмотрена задача построения математической модели автономной системы для производства биогаза в виде интервального разностного уравнения на основе модифицированного уравнения Моно. Также модифицирован метод построения идентификации параметров математической модели, который обеспечивает нахождение интервальных оценок этих параметров. Построено единую неавтономную модель динамики объема остаточной массы субстрата на основе банановых шкур, которая обеспечивает адекватное отражение динамики указанного процесса для целого диапазона температур, в пределах мезофільного режима процесса брожения.

Ключевые слова: биогаз, анаэробное микробиологическое брожение, неавтономная модель, интервальное разностное уравнение, целевая функция, идентификация параметров.

АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ. Енергетична незалежність країни та добробут населення повною мірою залежить від забезпечення її енергоносіями для функціонування всіх галузей економіки. Провідне місце серед складових енергоресурсів посідає біогаз, який отримують в процесі анаеробної мікробіологічної ферментації органічних речовин в біогазових установках.

Існує достатня кількість технологічних схем біогазових установок, які відрізняються складом обладнання, топологією, режимами роботи.

В основних елементах біогазових установок відбуваються складні тепломасообмінні процеси. Для забезпечення високої ефективності таких установок необхідно надійно витримувати сталими такі параметри як температура субстрату в реакторі, концентрація, тиск у біогазовій установці; кислотність середовища, швидкість подачі субстрату в реактор, збалансованість потоків субстрату тощо.

Аналіз процесів анаеробного мікробіологічного бродіння показав, що на обсяг виходу біогазу найбільше впливають такі фактори як температура (Т) ферментації, концентрація субстрату (S) і склад органічної речовини [1], що є основними факторами впливу.

Математична модель процесу анаеробного мікробіологічного бродіння твердих органічних відходів, яка дає можливість прогнозувати цей процес при таких умовах (температурі, концентрації субстрату та складу органічної речовини), є невід'ємною складовою частиною системи контролю за процесом. Незважаючи на те, що існують вже розроблені та визнані моделі процесу, задача моделювання анаеробного мікробіологічного бродіння в

біогазових установках залишається актуальною і на сьогоднішній день [2]. Зокрема більшість математичних макромоделей анаеробного мікробіологічного бродіння в біогазових установках описують автономну систему [3]. Разом із тим реальний процес є неавтономним, оскільки вимагає врахування факторів впливу, таких як температура субстрату.

Тому метою даної роботи є розробка підходу до перетворення відомої системи автономної системи до моделі неавтономної (з управляючими факторами впливу) та розробка методу ідентифікації такої моделі для конкретного прикладу.

МАТЕРІАЛ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ. Для прикладу обрано процес анаеробного мікробіологічного бродіння бананових шкірок, результати імітаційного експерименту, які є вихідними даними для моделювання зазначеного процесу наведені у праці [2].

У прикладі, наведеному у праці [3], розглянуто процеси анаеробного бродіння твердих органічних відходів (бананової шкірки).

Процес бродіння відбувається в анаеробних умовах реактора періодичної дії з використанням мезофільних бактерій. Усі експериментальні дані отримано авторами [3] за умови використання 20-літрового реактора з періодичним завантаженням із початковим об'ємом субстрату 10 дм³.

У математичній моделі процесу анаеробного бродіння бананових відходів на кінетику процесу враховувалися фактори впливу.

У загальному вигляді розглядається задача ідентифікації параметрів модифікованого нелінійного диференціального рівняння Моно в дискретній формі:

$$v_k = v_{k-1} - \frac{h g_1(\bar{u}) v_{k-1} (1 + h(g_2(\bar{u}) v_{k-2} - g_3(\bar{u})))}{(g_4(\bar{u}) + v_{k-1})}, \quad (1)$$

де v_k – об’єм залишкової маси органічних відходів в реакторі біогазової установки на k -тій дискреті процесу бродіння, h – крок дискретизації, $g_1(\bar{u})$, $g_2(\bar{u})$, $g_3(\bar{u})$, $g_4(\bar{u})$ – невідомі функції, значення яких залежить від факторів впливу на процеси в біогазових установках, \bar{u} – вектор факторів впливу, який визначає характер процесу.

Об’єм накопиченого біогазу обчислюють на основі встановленої за різницевою рівнянням (1) динаміки відбродженого субстрату із використанням такого виразу:

$$y_k = [y_{\max}] \cdot (v_0 - v_k) / v_0, \quad (2)$$

де y_k – відносна маса біогазу, накопиченого на k -тій дискреті процесу бродіння; $[y_{\max}] = [10; 20] \cdot v_0$ – максимальна питома маса метану, яка враховує інтервал виходу $[10; 20] \text{ дм}^3$ біогазу на 1 дм^3 субстрату залежно від вмісту глюкози в органічних речовинах; v_0, v_k – об’єми початкової та залишкової маси органічних відходів у реакторі біогазової установки на k -тій дискреті процесу бродіння.

Для розв’язування задачі ідентифікації параметрів моделі (1) потрібно забезпечити такі умови:

$$[\bar{v}_k^-; \bar{v}_k^+] \subseteq [v_k^-; v_k^+], \forall k = 1 \dots N. \quad (3)$$

У нашому випадку в різницевому рівнянні (1) замість функцій $g_1(\bar{u})$, $g_2(\bar{u})$, $g_3(\bar{u})$, $g_4(\bar{u})$, що залежать від зовнішніх факторів впливу на процеси в біогазових установках, доцільно розглянути іншу схему ідентифікації, яка б включала знаходження інтервальних оцінок цих функцій за умов змінних факторів впливу на процеси в біогазовій установці з подальшим уточненням інтервальних оцінок (звуженням інтервалів) за рахунок використання наборів даних для різних наборів факторів. У результаті математичну задачу ідентифікації параметрів моделі запишемо у вигляді задачі розв’язування інтервальної системи нелінійних алгебричних рівнянь (ІСНАР):

$$\begin{cases} [\bar{v}_0^-; \bar{v}_0^+] \subseteq [v_0^-; v_0^+]; [\bar{v}_1^-; \bar{v}_1^+] \subseteq [v_1^-; v_1^+]; \\ [\bar{v}_k^-] = [\bar{v}_{k-1}^-] - h \cdot [\bar{g}_1^-; \bar{g}_1^+] \cdot [\bar{v}_{k-1}^-] \times \\ \times \frac{(1 + h \cdot ([\bar{g}_2^-; \bar{g}_2^+] \cdot [\bar{v}_{k-2}^-] - [\bar{g}_3^-; \bar{g}_3^+]))}{([\bar{g}_4^-; \bar{g}_4^+] + [\bar{v}_{k-1}^-])}; \\ v_{k+1}^- \leq [\bar{v}_{k-1}^-; \bar{v}_{k-1}^+] - h \cdot [\bar{g}_1^-; \bar{g}_1^+] \cdot [\bar{v}_{k-1}^-; \bar{v}_{k-1}^+] \times \\ \times \frac{(1 + h \cdot ([\bar{g}_2^-; \bar{g}_2^+] \cdot [\bar{v}_{k-2}^-; \bar{v}_{k-2}^+] - [\bar{g}_3^-; \bar{g}_3^+]))}{([\bar{g}_4^-; \bar{g}_4^+] + [\bar{v}_{k-1}^-; \bar{v}_{k-1}^+])} \leq v_{k+1}^+, \end{cases} \quad (4)$$

де $[\bar{v}_k^-; \bar{v}_k^+]$ – оцінка гарантованого інтервалу об’єму залишкової маси органічних відходів у k -тій момент часу; $[v_k^-; v_k^+]$ – гарантований інтервал

об’єму залишкової маси органічних відходів встановлений експериментальним шляхом; $\bar{g}_i(\bar{u}) \subseteq [\bar{g}_i^-; \bar{g}_i^+]$, $\forall \bar{u} \in U$, U – область зміни факторів впливу. Якщо в інтервальну систему (4) підставити інтервальні дані – результати експерименту, то розв’язком цієї системи є інтервальні оцінки параметрів $g_i(\bar{u}) \subseteq [g_i^-; g_i^+]$ $i = 1, \dots, 4$, а результатом розв’язування задачі ідентифікації в цілому – є кінцева інтервальна модель у вигляді інтервального різницевого рівняння:

$$\begin{aligned} [v_k^-; v_k^+] &= [v_{k-1}^-; v_{k-1}^+] - h \cdot [g_1^-; g_1^+] \cdot [v_{k-1}^-; v_{k-1}^+] \times \\ &\times \frac{(1 + h \cdot ([g_2^-; g_2^+] \cdot [v_{k-2}^-; v_{k-2}^+] - [g_3^-; g_3^+]))}{([\bar{g}_4^-; \bar{g}_4^+] + [v_{k-1}^-; v_{k-1}^+])}, \\ k &= 1, \dots, K. \end{aligned} \quad (5)$$

Тоді формулу для накопиченого об’єму біогазу перетворюємо до такого інтервального вигляду:

$$[y_k^-; y_k^+] = [y_{\max}^-; y_{\max}^+] \cdot ([v_0^-; v_0^+] - [v_k^-; v_k^+]) / [v_0^-; v_0^+], \quad (6)$$

де $[y_k^-; y_k^+]$ – гарантований інтервал значень відносної маси біогазу, накопиченого на k -тій дискреті процесу бродіння; $[y_{\max}^-; y_{\max}^+] = [10; 20] \cdot [v_0^-; v_0^+]$ – оцінка гарантованого інтервалу значень максимальної питомої маси метану, яка враховує інтервал виходу $[10; 20] \text{ дм}^3$ біогазу на 1 дм^3 субстрату, залежно від вмісту глюкози в органічних речовинах; $[v_0^-; v_0^+], [v_k^-; v_k^+]$ – оцінки гарантованих інтервалів об’ємів початкової та залишкової маси органічних відходів в реакторі біогазової установки на k -тій дискреті процесу бродіння.

Проте, основною проблемою побудови математичних моделей процесів у біогазових установках є складність отримання експериментальних даних у різних режимах їх функціонування. Разом із тим, спираючись на універсальну формулу Чена-Хашімото [4], доцільно отримати інтервальні оцінки процесу накопичування біогазу у біогазовій установці при різних режимах її функціонування і для змінних зовнішніх факторів впливу, користуючись методами, наведеними в праці [5].

Розв’язком даної ІСНАР (4) є деяка область, яка, як правило, є розірваною та не опуклою. Тому, замість знаходження точного розв’язку ІСНАР (4), переважно використовують наближені методи оцінювання деякого розв’язку із заданої області, звівши зазначену задачу до задачі оптимізації $\delta([\bar{g}^-; \bar{g}^+])$ деякої цільової функції [6]:

$$\delta([\bar{g}^-; \bar{g}^+]) \rightarrow \min. \quad (7)$$

Розв’язком задачі оптимізації (7) є вектор інтервальних оцінок $[\bar{g}_i^-; \bar{g}_i^+]$ параметрів, які забезпечать прогнозований коридор на основі лінійного інтервального різницевого рівняння (5), що буде включатися в межах коридору для експериментальних даних.

У працях [7, 8], розглянуто подібну задачу. Також описано властивості цільової функції. Проте в нашому випадку задача є складнішою, оскільки необхідно оцінити не один розв'язок, а певну область розв'язків у вигляді вектора інтервальних оцінок $[\hat{g}_l^-; \hat{g}_l^+]$.

Розглянемо особливості побудови цільової функції на основі інтервальної системи (4) з метою знаходження інтервальних оцінок параметрів моделі.

Нехай задано деяку інтервальну оцінку параметрів різницевого оператора $[\hat{g}_l^-; \hat{g}_l^+]$. Підставимо отриману інтервальну оцінку $[\hat{g}_l^-; \hat{g}_l^+]$ разом із відомими значеннями векторів вхідних змінних $\vec{u}_0, \dots, \vec{u}_k$ у вираз для обчислення інтервальної оцінки $[\hat{v}_k^-(l); \hat{v}_k^+(l)]$ прогнозованого значення об'єму залишкової маси органічних відходів. У результаті обчислимо величину $\delta([\hat{g}_l^-; \hat{g}_l^+])$, що задає якість наближення інтервальної оцінки вектора параметрів.

Якість наближення $\delta([\hat{g}_l^-; \hat{g}_l^+])$ будемо визначати кількісно у вигляді різниці центрів найбільш віддалених між собою прогнозованого та експериментального інтервалів – у випадку, коли вони не перетинаються та найменшою шириною перетину серед прогнозованих та експериментальних інтервалів – для випадку їх перетину. Дані умови запишемо наступним чином:

$$\delta([\hat{g}_l^-; \hat{g}_l^+]) = \max_{k=1, \dots, K} \left\{ \begin{aligned} &mid(\vec{f}^T([\hat{v}_0^-(l); \hat{v}_0^+(l)], \dots, \\ &[\hat{v}_{k-1}^-(l); \hat{v}_{k-1}^+(l)], \dots, \vec{u}_0, \dots, \vec{u}_k) \cdot [\hat{g}_l^-; \hat{g}_l^+]) - \\ &- mid(\vec{f}^T([\hat{v}_0^-(l); \hat{v}_0^+(l)], \dots, [\hat{v}_{k-1}^-(l); \hat{v}_{k-1}^+(l)], \dots, \\ &\dots, \vec{u}_0, \dots, \vec{u}_k) \cdot [\hat{g}_l^-; \hat{g}_l^+]) \end{aligned} \right\}, \text{ якщо} \\ [\hat{v}_k^-(l); \hat{v}_k^+(l)] \cap [v_k^-(l); v_k^+(l)] = \emptyset, \exists k = 1, \dots, K; \quad (8)$$

$$\delta([\hat{g}_l^-; \hat{g}_l^+]) = \max_{k=1, \dots, K} \left\{ \begin{aligned} &wid(\vec{f}^T([\hat{v}_0^-(l); \hat{v}_0^+(l)], \dots, \\ &[\hat{v}_{k-1}^-(l); \hat{v}_{k-1}^+(l)], \dots, \vec{u}_0, \dots, \vec{u}_k) \cdot [\hat{g}_l^-; \hat{g}_l^+]) - \\ &- wid(\vec{f}^T([\hat{v}_0^-(l); \hat{v}_0^+(l)], \dots, [\hat{v}_{k-1}^-(l); \hat{v}_{k-1}^+(l)], \dots, \\ &\dots, \vec{u}_0, \dots, \vec{u}_k) \cdot [\hat{g}_l^-; \hat{g}_l^+]) \end{aligned} \right\}, \text{ якщо} \\ [\hat{v}_k^-(l); \hat{v}_k^+(l)] \cap [v_k^-(l); v_k^+(l)] \neq \emptyset, \forall k = 1, \dots, K; \quad (9)$$

де $mid(\bullet), wid(\bullet)$ – операції визначення центру та ширини інтервалу, відповідно.

Зауважимо, що цільова функція $\delta([\hat{g}_l^-; \hat{g}_l^+])$ є дискретною від $k = 1, \dots, K$ і немає представлення в аналітичному вигляді, а її значення можна обчислити виключно чисельними методами. Формули (8) і (9) для обчислення ступеня «розугодження» між коридорами інтервальних оцінок прогнозованої характеристики на основі інтервального різницевого рівняння та експериментальних оцінок цієї характеристики на усіх дискретах проілюстровано на рис. 1.

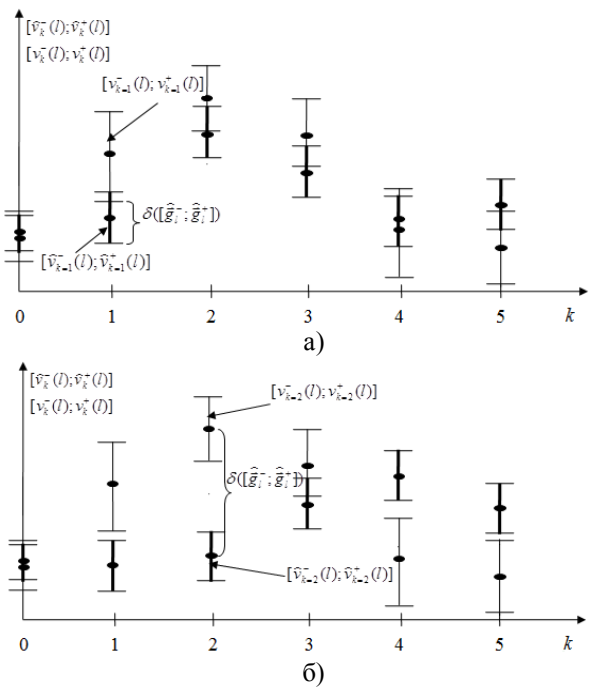


Рисунок 1 – Ілюстрація до обчислення цільової функції: а) за формулою (8) для випадку неточного наближення оцінок параметрів інтервального різницевого рівняння; б) за формулою (9) для випадку уточнення оцінок параметрів інтервального різницевого рівняння

Як бачимо із рис 1,а, у першому випадку – обчислення за формулою (8) – інтервальні оцінки прогнозованої характеристики та отримані з експерименту для дискретних значень k суттєво відхиляються одна від одної. При цьому найбільше відхилення існує між центрами інтервалів $[\hat{v}_{k=2}^-(l); \hat{v}_{k=2}^+(l)]$ та $[v_{k=2}^-(l); v_{k=2}^+(l)]$ для дискрети $k=2$. Модуль цього відхилення й є значенням цільової функції. Можна припустити, що у цьому випадку інтервальні оцінки прогнозованого значення об'єму залишкової маси органічних відходів отримані за наявності неточних оцінок параметрів інтервального різницевого рівняння (5). Як тільки оцінки параметрів інтервального різницевого рівняння (5) у процесі процедури випадкового пошуку уточнюються, то перетини інтервальних оцінок прогнозованого інтервалу та інтервалів цієї характеристики, отриманих з експерименту для кожної дискрети стають не порожніми множинами, як це показано на рис. 1,б, тоді цільову функцію обчислюємо за формулою (9).

З рис. 1,б найбільше відхилення (неузгодження) спостерігається між інтервалами $[\hat{v}_{k=1}^-(l); \hat{v}_{k=1}^+(l)]$ та $[v_{k=1}^-(l); v_{k=1}^+(l)]$ для дискрети $k=1$. Саме це узгодження, обчислене за формулою (9), визначає значення цільової функції.

Нехай знайдено хоча б один розв'язок $[\hat{g}_l^-; \hat{g}_l^+] = [\bar{g}_l^-; \bar{g}_l^+] \in \Omega$ ІСНАР (4). Підставимо його у вираз (6) разом із відомими значеннями векторів вхідних змінних $\vec{u}_0, \dots, \vec{u}_k$. Отримаємо інтервальні оцінки $[\hat{v}_k^-(l); \hat{v}_k^+(l)]$ на основі інтервального різни-

цевого рівняння. Оскільки $[\hat{g}_l^-; \hat{g}_l^+] = [\hat{g}^-; \hat{g}^+] \in \Omega$, то згідно з умовами формування ІСНАР (4) виконуються умови належності інтервальних оцінок $[\hat{v}_k^-(l); \hat{v}_k^+(l)]$ до інтервалів, отриманих з експерименту:

$$[\hat{v}_k^-(l); \hat{v}_k^+(l)] \Big|_{[\hat{g}_l^-; \hat{g}_l^+] \in \Omega} = \hat{f}^T([\hat{v}_0^-(l); \hat{v}_0^+(l)], \dots, [\hat{v}_{k-1}^-(l); \hat{v}_{k-1}^+(l)], \dots, \hat{u}_0, \dots, \hat{u}_k) \cdot [\hat{g}_l^-; \hat{g}_l^+] \subset [\hat{v}_k^-(l); \hat{v}_k^+(l)], \quad \forall k = 1, \dots, K. \quad (10)$$

Тоді справджується рівність ширини інтервалів

$$wid((\hat{f}^T([\hat{v}_0^-(l); \hat{v}_0^+(l)], \dots, [\hat{v}_{k-1}^-(l); \hat{v}_{k-1}^+(l)], \dots, \hat{u}_0, \dots, \hat{u}_k) \times [\hat{g}_l^-; \hat{g}_l^+]), \forall k = 1, \dots, K. \quad (11)$$

і відповідно значення цільової функції у формулі (9) набуває мінімального нульового значення:

$$\min_{[\hat{g}_l^-; \hat{g}_l^+] \in \Omega} (\delta([\hat{g}_l^-; \hat{g}_l^+])) = 0. \quad (12)$$

Отже, найменше значення цільової функції $\delta([\hat{g}_l^-; \hat{g}_l^+])$, обчисленої за виразом (9), досягається для векторів інтервальних оцінок $[\hat{g}^-; \hat{g}^+]$ параметрів різницевого рівняння, які забезпечують сумісність ІСНАР (4). У цьому випадку цільова функція набуває нульового значення:

$$\delta([\hat{g}_l^-; \hat{g}_l^+] = [\hat{g}^-; \hat{g}^+] \in \Omega) = 0.$$

Таким чином, задачу знаходження розв'язків ІСНАР (4) перетворюємо до задачі інтервального оцінювання її розв'язків, яка за своєю суттю є оптимізаційною задачею з цільовою функцією, що встановлює відношення між прогнозованим і експериментальним коридором.

Виходячи з особливостей побудови цільової функції, модифікуємо відому обчислювану схему процедури випадкового пошуку мінімуму цільової функції з використанням направляючого конуса Растрігіна [9].

На початковій ітерації випадкового пошуку ($l=0$) задаємо інтервал початкового наближення вектора параметрів інтервального різницевого рівняння $[\hat{g}_0^-; \hat{g}_0^+]$. В околі цього наближення на поверхні уявної гіперсфери, радіусом r , тобто на відстані r від інтервалу $[\hat{g}_0^-; \hat{g}_0^+]$ у просторі параметрів на основі рівномірного закону розподілу генеруємо p випадкових інтервалів:

$$[\hat{g}_p^-; \hat{g}_p^+] = [\hat{g}_0^-; \hat{g}_0^+] + r \cdot [\xi_p^-; \xi_p^+], \quad p=1, \dots, P \quad (13)$$

Серед згенерованих інтервалів вибираємо інтервал, який забезпечує найменше значення цільової функції:

$$[\hat{g}_1^-; \hat{g}_1^+] = \operatorname{argmin}_{p=1, \dots, P} (\delta([\hat{g}_0^-; \hat{g}_0^+] + r \cdot [\xi_p^-; \xi_p^+])). \quad (14)$$

Варто зазначити, що незалежно від використання інтервальної оцінки параметрів інтервального різницевого рівняння значення цільової функції, яке

обчислюємо за формулою (8) або (9), не є інтервальним.

Отримана оцінка інтервалу вектора параметрів інтервального різницевого рівняння є наближенням для наступної ітерації. Додатково у цій процедурі обчислюємо вектор пам'яті, який визначає успішний напрям пошуку:

$$\bar{w} = ((\hat{g}_1^- + \hat{g}_1^+) \cdot 0.5 - (\hat{g}_0^- + \hat{g}_0^+) \cdot 0.5) / r. \quad (15)$$

На наступних ітераціях у просторі параметрів будемо уявну множину гіперконусів із вершинами, які належать інтервалу $[\hat{g}_l^-; \hat{g}_l^+]$, та є поточними оцінками вектора параметрів інтервального різницевого рівняння, із кутом розкриття ψ і віссю \bar{w}_l . Ці гіперконуси «відсікають» від гіперсфери з центрами в інтервалі $[\hat{g}_l^-; \hat{g}_l^+]$ і радіусом r деякі поверхні. На отриманих поверхнях у просторі параметрів генеруємо на основі рівномірного закону розподілу p випадкових інтервалів за формулою (13), де інтервал $[\xi_p^-; \xi_p^+]$ у даному випадку обчислюємо, виходячи із обмежень на параметри конусів. Серед згенерованих інтервалів вибираємо інтервал, який забезпечує найменше значення цільової функції:

$$[\hat{g}_{l+1}^-; \hat{g}_{l+1}^+] = \operatorname{argmin}_{p=1, \dots, P} (\delta([\hat{g}_l^-; \hat{g}_l^+] + r \cdot [\xi_p^-; \xi_p^+])). \quad (16)$$

Отримана оцінка інтервалу вектора параметрів інтервального різницевого рівняння є наближенням для наступної $l+1$ ітерації пошукової процедури. Додатково у цій процедурі перевизначаємо вектор пам'яті:

$$\bar{w}_{l+1} = \alpha \cdot \bar{w}_l + \beta \cdot \frac{((\hat{g}_{l+1}^- + \hat{g}_{l+1}^+) \cdot 0.5 - (\hat{g}_l^- + \hat{g}_l^+) \cdot 0.5)}{r}, \quad (17)$$

де $\alpha - (0 \leq \alpha \leq 1)$ – коефіцієнт забування, а β – коефіцієнт інтенсивності врахування нової інформації.

Пошук продовжується до тих пір, поки зменшується значення цільової функції. Якщо ж значення цільової функції не зменшується на певній ітерації, то замість конусів використовуємо набір гіперсфер, як на початковій ітерації для заданого вектора оцінок параметрів. Якщо ж і далі серед згенерованих інтервалів не можливо знайти інтервал, який забезпечує зменшення цільової функції, то у цьому випадку налаштуємо довжину кроку r , як правило зменшуємо її.

Розглянемо приклад побудови неавтономної моделі процесів виробництва біогазу, шляхом анаеробного мікробіологічного бродіння в біореакторі, бананових шкірок [3]. При цьому використаємо дані, наведені у праці [2].

На інтенсивність процесу зброджування і, як наслідок, утворення біогазу впливають чотири групи факторів: біологічні (склад зброджуваної біомаси; склад мікрофлори; умови життєдіяльності мікроорганізмів), фізичні (температура зброджування; тиск у біогазовій установці; гідравлічний режим), хімічні (концентрація, кислотність середовища; вміст летких жирних кислот у зброджуваній масі; обсяг і

склад біогазу, що утворюється) та організаційно технологічні (доза добового завантаження нових порцій зброджуваної маси; навантаження за беззольною речовиною; залишкові речовини).

Проаналізувавши процеси анаеробного мікробіологічного бродіння можна стверджувати, що на обсяг виходу біогазу найбільше впливають такі фактори, як температура (Т) ферментації, концентрація субстрату (S) і склад органічної речовини [1], що є основними факторами впливу. Але основним параметром, який повинен регулюватися в процесі такого бродіння слід вважати температуру (Т), так як температура впливає на метаболічну активність та репродуктивну здатність мікроорганізмів.

Підтримка оптимальної температури є одним з найважливіших чинників процесу зброджування. У природних умовах утворення біогазу відбувається при температурах від 0 до 97°C [10], але з урахуванням оптимізації процесу переробки органічних відходів для отримання біогазу та біодобрив виділяють три температурних режими:

- психофільний – від 20 до 25 °С;
- мезофільний – від 25 до 40 °С;
- термофільний – понад 40 °С.

Відомості щодо оптимального температурного режиму різні для різних видів сировини, але на підставі емпіричних даних установок періодичного завантаження, що працюють на сировині з бананових відходів, оптимальною температурою для мезофільного температурного режиму є 32–35 °С, а для термофільного 52–54 °С. Психофільний температурний режим дотримується в установках без підігріву, в яких відсутній контроль за температурою. Найбільш інтенсивне виділення біогазу в психофільному режимі відбувається при 23 °С. Перевагу здебільшого надають мезофільному режимові, оскільки при цьому досягається економія енергії. Метанове бродіння – процес ендотермічний, який потребує постійного підігріву для підтримки температури ферментації. Метантенки і сировина переважно підігріваються за рахунок спалювання утвореного газу.

На основі детального аналізу біохімічних процесів та універсальної формули Чена-Хашімото [4], отримано експериментальні дані процесу бродіння твердих органічних відходів (бананової шкірки) в анаеробних умовах реактора періодичної дії з використанням мезофільних бактерій.

Процес бродіння спостерігався протягом 50 діб із кількістю дискрет $k=0, \dots, 41$. З використанням отриманих даних проводили аналіз впливу температури на динаміку процесів у біогазових установках. Зокрема, в межах мезофільного температурного режиму змінювали діапазони температур до таких значень: $[T^-; T^+] = [28; 30]^\circ\text{C}$, $[T^-; T^+] = [30; 38]^\circ\text{C}$, $[T^-; T^+] = [32; 35]^\circ\text{C}$. Концентрацію S при цьому залишали незмінною. Результати спостережень за даним процесом наведено в табл. 1.

Провівши аналіз впливу різних температурних режимів ($[T^-; T^+] = [28; 40]^\circ\text{C}$, $[T^-; T^+] = [30; 38]^\circ\text{C}$ та $[T^-; T^+] = [32; 35]^\circ\text{C}$) на динаміку процесів у біогазових установках, результати моделювання динаміки інтервальних оцінок об'єму залишкової

маси бананових відходів в реакторі біогазової установки представимо у вигляді табл. 1.

Таблиця 1 – Інтервальна оцінка об'єму залишкової маси органічних відходів в реакторі біогазової установки при різних температурних режимах

№ дискрети k	діб	V_k^-	V_k^+	V_k^-	V_k^+	V_k^-	V_k^+
		[28,4 0], дм^3	[28,4 0], дм^3	[30,3 8], дм^3	[30,3 8], дм^3	[32,3 5], дм^3	[32,35] дм^3
0	901	9,398	9,979	9,515	9,971	9,615	9,960
1	10	8,958	9,958	9,174	9,943	9,359	9,922
2	11	8,566	9,938	8,866	9,917	9,127	9,886
3	12	8,211	9,918	8,587	9,891	8,914	9,853
4	13	7,888	9,899	8,330	9,867	8,717	9,821
5	14	7,591	9,881	8,093	9,843	8,535	9,790
6	15	7,316	9,864	7,873	9,821	8,364	9,761
7	16	7,061	9,847	7,668	9,800	8,205	9,734
8	17	6,821	9,831	7,475	9,780	8,055	9,708
9	18	6,596	9,816	7,293	9,761	7,913	9,683
10	19	6,384	9,801	7,121	9,742	7,778	9,659
11	20	6,183	9,786	6,959	9,724	7,651	9,636
12	21	5,993	9,772	6,804	9,707	7,529	9,615
13	22	5,812	9,759	6,657	9,691	7,413	9,594
14	23	5,639	9,746	6,516	9,675	7,302	9,573
15	24	5,474	9,733	6,381	9,660	7,196	9,554
16	25	5,316	9,722	6,252	9,645	7,094	9,535
17	26	5,164	9,710	6,128	9,630	6,996	9,517
18	27	5,018	9,699	6,009	9,616	6,901	9,500
19	28	4,878	9,688	5,894	9,603	6,810	9,482
20	29	4,742	9,677	5,783	9,590	6,722	9,466
21	30	4,612	9,667	5,676	9,577	6,637	9,450
22	31	4,486	9,657	5,572	9,565	6,555	9,434
23	32	4,363	9,647	5,472	9,553	6,475	9,419
24	33	4,245	9,638	5,375	9,541	6,398	9,405
25	34	4,131	9,628	5,281	9,530	6,323	9,390
26	35	4,019	9,619	5,189	9,519	6,250	9,377
27	36	3,911	9,611	5,100	9,508	6,179	9,363
28	37	3,806	9,602	5,014	9,498	6,110	9,350
29	38	3,704	9,594	4,930	9,488	6,043	9,337
30	39	3,605	9,585	4,848	9,478	5,978	9,325
31	40	3,508	9,577	4,768	9,468	5,914	9,312
32	41	3,414	9,570	4,690	9,458	5,852	9,300
33	42	3,322	9,562	4,614	9,450	5,791	9,289
34	43	3,232	9,554	4,540	9,440	5,732	9,277
35	44	3,144	9,547	4,467	9,431	5,674	9,266
36	45	3,058	9,540	4,396	9,422	5,617	9,255
37	46	2,974	9,533	4,327	9,414	5,562	9,244
38	47	2,892	9,526	4,259	9,405	5,507	9,234
39	48	2,812	9,519	4,193	9,397	5,454	9,223
40	49	2,733	9,512	4,128	9,389	5,402	9,213
41	50	2,656	9,506	4,064	9,381	5,351	9,203

Тепер розглянемо задачу ідентифікації математичної моделі динаміки об'єму залишкової маси органічних відходів при різних температурних режимах. При цьому за основу зазначеної динаміки використаємо нелінійне інтервальне рівняння у вигляді (5).

При розв'язуванні цієї задачі методами параметричної ідентифікації із застосуванням процедур випадкового пошуку отримано нелінійне інтервальне різницеве рівняння у вигляді (5).

Задамо умову для забезпечення прогнозу інтервальних оцінок об'єму залишкової маси органічних відходів в процесі переробки в заданих межах, визначених похибками вимірвальних пристроїв

$$[\hat{v}_{k+1}] = [\hat{v}_{k+1}^-, \hat{v}_{k+1}^+] \subseteq [v_{k+1}] = [v_{k+1}^-, v_{k+1}^+], \quad (18)$$

де $k = 0, \dots, 1$ – часові дискретні.

Виходячи із умов (18), структура інтервальної системи алгебричних рівнянь [11] матиме такий вигляд:

$$v_{k+1}^- \leq [\hat{v}_{k-1}^-; \hat{v}_{k-1}^+] - h \cdot [\hat{g}_1^-; \hat{g}_1^+] \cdot [\hat{v}_{k-1}^-; \hat{v}_{k-1}^+] \times \frac{(1+h \cdot ([\hat{g}_2^-; \hat{g}_2^+] [\hat{v}_{k-2}^-; \hat{v}_{k-2}^+] - [\hat{g}_3^-; \hat{g}_3^+]))}{([\hat{g}_4^-; \hat{g}_4^+] + [\hat{v}_{k-1}^-; \hat{v}_{k-1}^+])} \leq v_{k+1}^+,$$

$$k=2 \dots 41. \quad (19)$$

При цьому за початкові умови покладемо інтервальні оцінки об'ємів залишкової маси органічних відходів в реакторі біогазової установки з відхиленнями в межах $\pm 1\%$ маси завантажених у реактор бананових шкірок $[\hat{v}_{k=0}^-]$ та $[\hat{v}_{k=1}^-]$, вибрані згідно з даними табл. 1 (перші дві стрічки для $k=0$ та $k=1$).

У результаті розв'язування цієї задачі методами параметричної ідентифікації інтервального різницевого рівняння із застосуванням процедур випадкового пошуку отримано параметри інтервального різницевого рівняння (5).

При температурі $[T^-; T^+] = [28; 40]^\circ\text{C}$ і початкових умовах:

$$[\hat{v}_0^-; \hat{v}_0^+] = [((v_0^- + v_0^+) \cdot 0,5) \cdot (1 - 0,01); ((v_0^- + v_0^+) \cdot 0,5) \times (1 + 0,01)] \subset [9,398; 9,979];$$

$$[\hat{v}_1^-; \hat{v}_1^+] = [((v_1^- + v_1^+) \cdot 0,5) \cdot (1 - 0,01); ((v_1^- + v_1^+) \cdot 0,5) \times (1 + 0,01)] \subset [8,958; 9,958],$$

отримано такі параметри моделі процесу переробки органічних відходів в інтервальному вигляді:

$$[g_1^-; g_1^+] = [3,311; 6,571], \quad [g_2^-; g_2^+] = [3,197; 6,817],$$

$$[g_3^-; g_3^+] = [2,520; 6,494], \quad [g_4^-; g_4^+] = [3,665; 6,582];$$

при температурі $[T^-; T^+] = [30; 38]^\circ\text{C}$ і початкових умовах:

$$[\hat{v}_0^-; \hat{v}_0^+] = [((v_0^- + v_0^+) \cdot 0,5) \cdot (1 - 0,01); ((v_0^- + v_0^+) \cdot 0,5) \times (1 + 0,01)] \subset [9,515; 9,971];$$

$$[\hat{v}_1^-; \hat{v}_1^+] = [((v_1^- + v_1^+) \cdot 0,5) \cdot (1 - 0,01); ((v_1^- + v_1^+) \cdot 0,5) \times (1 + 0,01)] \subset [9,174; 9,943],$$

отримано такі параметри: $[g_1^-; g_1^+] = [3,963; 7,683]$,

$$[g_2^-; g_2^+] = [4,781; 7,519], \quad [g_3^-; g_3^+] = [4,645; 9,005],$$

$$[g_4^-; g_4^+] = [3,905; 8,069];$$

а при температурі $[T^-; T^+] = [32; 35]^\circ\text{C}$ і початкових умовах:

$$[\hat{v}_0^-; \hat{v}_0^+] = [((v_0^- + v_0^+) \cdot 0,5) \cdot (1 - 0,01); ((v_0^- + v_0^+) \cdot 0,5) \times (1 + 0,01)] \subset [9,615; 9,960];$$

$$[\hat{v}_1^-; \hat{v}_1^+] = [((v_1^- + v_1^+) \cdot 0,5) \cdot (1 - 0,01); ((v_1^- + v_1^+) \cdot 0,5) \times (1 + 0,01)] \subset [9,359; 9,922],$$

отримано такі параметри: $[g_1^-; g_1^+] = [5,066; 8,029]$,

$$[g_2^-; g_2^+] = [5,897; 8,757], \quad [g_3^-; g_3^+] = [2,592; 7,613],$$

$$[g_4^-; g_4^+] = [6,039; 8,949].$$

Для знаходження розв'язку отриманого рівняння використовувався алгоритм, описаний у праці [11]. Програмне забезпечення для реалізації вказаного алго-

ритму, створено на основі мови програмування C#.

Результати прогнозування порівняно з експериментальними даними об'єму залишкової маси органічних відходів при різних температурних режимах зображено на рис. 2–4.

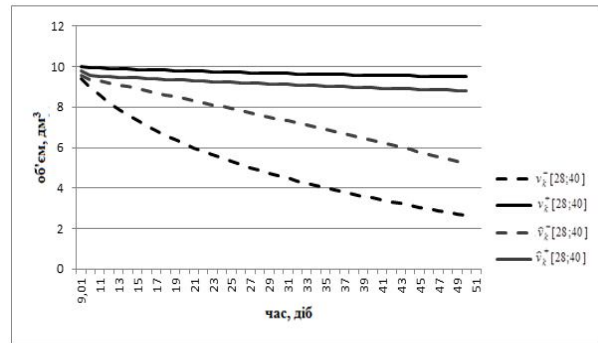


Рисунок 2 – Коридор динаміки об'єму залишкової маси бананових відходів при температурі $[T^-; T^+] = [28; 40]^\circ\text{C}$

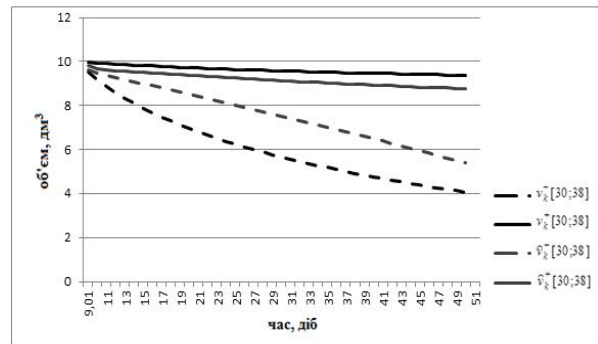


Рисунок 3 – Коридор динаміки об'єму залишкової маси бананових відходів при температурі $[T^-; T^+] = [30; 38]^\circ\text{C}$

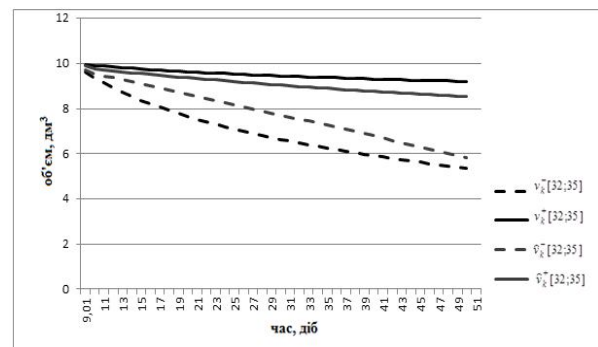


Рисунок 4 – Коридор динаміки об'єму залишкової маси бананових відходів при температурі $[T^-; T^+] = [32; 35]^\circ\text{C}$

Як бачимо з рис. 2–4, для усіх температурних режимів процесу анаеробного мікробіологічного бродіння відходів у вигляді бананових шкірок отримано математичну модель, яка описує процеси динаміки об'єму залишкової маси в реакторах. При цьому коридори динаміки об'єму залишкової маси знаходяться в межах коридору експериментальних даних, що забезпечує адекватність математичної моделі. Слід зауважити, що отримана математична

модель є неавтономною, оскільки оцінки параметрів залежать від заданих температурних діапазонів.

Тепер спробуємо перейти до єдиного інтервального рівняння, яке адекватно описує зміну інтервалу температур в межах $[T^-; T^+] = [28; 40]^\circ\text{C}$, тобто включає всі температурні інтервали, які можуть використовуватися для управління процесом бродіння. На рис. 5 показано, що коридор для інтервальної моделі динаміки зміни об'єму залишкової маси субстрату включає коридори, отримані для інших температурних режимів.

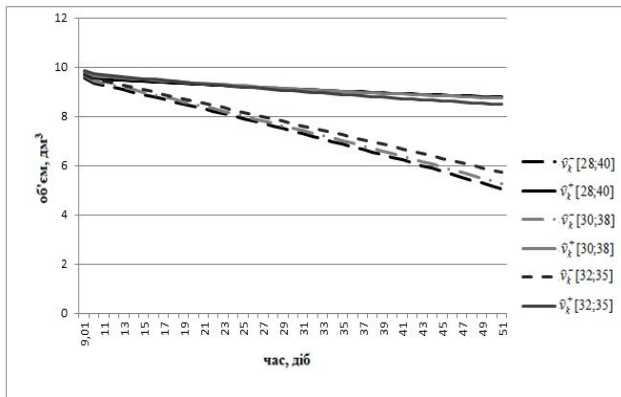


Рисунок 5 – Результати моделювання коридорів динаміки об'єму залишкової маси бананових відходів в реакторі біогазової установки для різних температурних режимів: $[T^-; T^+] = [28; 40]^\circ\text{C}$, $[T^-; T^+] = [30; 38]^\circ\text{C}$, $[T^-; T^+] = [32; 35]^\circ\text{C}$

Отже, можемо вважати, що єдиною інтервальною моделлю, для всього температурного діапазону, є інтервальне різницеве рівняння (5), з такими інтервальними оцінками коефіцієнтів: $[g_1^-; g_1^+] = [3,311; 6,571]$, $[g_2^-; g_2^+] = [3,197; 6,817]$, $[g_3^-; g_3^+] = [2,520; 6,494]$, $[g_4^-; g_4^+] = [3,665; 6,582]$.

ВИСНОВКИ. Розглянуто задачу побудови математичної моделі неавтономної системи для виробництва біогазу у вигляді інтервального різницевого рівняння на основі модифікованого рівняння Моно. У результаті досліджень модифіковано метод побудови ідентифікації параметрів математичної моделі, який, на відміну від існуючого, забезпечує знаходження інтервальних оцінок параметрів моделі.

Побудовано єдину неавтономну модель динаміки об'єму залишкової маси субстрату на основі бананових шкірок, яка забезпечує адекватне відображення динаміки зазначеного процесу для цілого діапазону температур, який як правило, реалізує мезофільний режим процесу бродіння.

Перевагою запропонованого підходу є можливість дослідження температурних режимів бродіння (в межах мезофільного), з метою досягнення найбільш ефективного, за часовим показником, режиму отримання біогазу в біогазових установках.

ЛІТЕРАТУРА

1. Біохімічний аналіз процесів в біогазових установках та його застосування в задачі макромодельовання процесів виробництва біогазу / І.В. Гураль, М.П. Дивак // Міжнародний науково-технічний журнал «Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах». – Хмельницький, 2014. – С. 152–158.
2. Інтервальне представлення динаміки анаеробного мікробіологічного бродіння в біогазових установках / М.П. Дивак, І.В. Гураль // Індуктивне моделювання складних систем. – 2014. – Вип. 6. – С. 55–68.
3. Norazwina Zaino. Kinetics of Biogas Production from Banana Stem Waste, Biogas, Dr. Sunil Kumar (Ed.). – 2012. – PP. 395–408.
4. Chen Y., Hashimoto A.G. Kinetic of Methane Fermentation // Biotechnology and Bioengineering. – 1978. – Vol. 8. – PP. 269–282.
5. Дивак М.П. Задачі математичного моделювання статичних систем з інтервальними даними. – Тернопіль: Видавництво ТНЕУ «Економічна думка», 2011. – 216 с.
6. Дослідження цільової функції в задачах параметричної ідентифікації інтервального різницевого оператора із заданою точністю / М.П. Дивак, Т.М. Дивак, П.Г. Стахів // Міжнародний науковий журнал "Комп'ютеринг". – 2011. – Т. 10. – Вип. 2. – С. 162–171.
7. Особливості побудови інтервальної системи алгебричних рівнянь та методу її розв'язку в задачах ідентифікації лінійного інтервального різницевого оператора / М.П. Дивак, Т.М. Дивак // Індуктивне моделювання складних систем: збір. наук. праць. – К.: МННЦ ІТС НАН та МОН України, 2009. – Вип. 1. – С. 35–43.
8. Дивак М. Ідентифікація параметрів моделей «вхід–вихід» динамічних систем на основі інтервального підходу / М. Дивак, П. Стахів, І. Калішук // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2004. – Т. 9, № 4. – С. 109–117.
9. Растринин Л.А. Адаптація складних систем. – Рига: Зинатне, 1981. – 359 с.
10. Альтернативні методи використання відходів тваринництва на прикладі підсобного господарства синівського аграрного ліцею / Л.Д. Пляцук, Р.А. Васькін, В.О. Соляник // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – 2011. – Вип. 4/2011, част. 1. – С. 147–150.
11. Практичні аспекти застосування методу та алгоритму параметричної ідентифікації дискретних динамічних систем з інтервальною невизначеністю / Т.М. Дивак, Ю.Р. Піговський, М.П. Дивак, Є.О. Марценюк // Індуктивне моделювання складних систем. – 2010. – Вип. 2. – С. 39–49.

NON-AUTONOMOUS MODEL OF BIOGAS PRODUCTION AND METHOD OF ITS IDENTIFICATION

I. Hural¹, M. Dyvak, Yu. Pigovsky

Ternopil National Economic University

Chekhova St., 8, Ternopil, 46000, Ukraine. E-mails: div@tneu.edu.ua, mdy@tneu.edu.ua, pigovsky@gmail.com

The article considers the problem of mathematical modeling of non-autonomous systems for biogas production as interval difference equation based on modified Mono equation. Also, the method of constructing mathematical model parameter identification was modified and this method provides finding of the interval estimates of these parameters. The non-autonomous model of the volume of residual substrate masses from banana peels was established, which provides an adequate reflection of the dynamics of this process for a range of temperatures within the mesophilic fermentation regime.

Key words: biogas, anaerobic microbial fermentation, non-autonomous model, interval difference equation, the objective function, identification of parameters.

REFERENCES

1. Hural, I.V., Dyvak, M.P. (2014), "The Biochemical Analysis of The Processes at Biogas Plants and its Implementation in Macro Modelling Biogas Production Process Problem", *Measuring and computing in industrial processes*, pp.152–158.
2. Dyvak, M.P., Hural, I.V. (2014), "The interval representation of the dynamics of anaerobic microbial fermentation at biogas plants", *Inductive modeling of complex systems*, vol. 6, pp. 55–68.
3. Zaino, N. (2012), "Kinetics of Biogas Production from Banana Stem Waste", *Biogas*, pp. 395–408.
4. Chen, Y., Hashimoto, A.G. (1978), "Kinetic of Methane Fermentation", *Biotechnology and Bioengineering*, vol. 8, pp. 269–282.
5. Dyvak, M.P. (2011), *Zadachi matematichnogo modelyuvannya statichnih sistem z intervalnimi danimi* [Problems of mathematical modeling of static systems with interval data], Publisher TNEU "Economic Thought", Ternopil, Ukraine.
6. Dyvak, M.P., Dyvak, T.M., Stakhiv, P.G. (2011), "The research objective function in problems of parametric identification of difference functional interval with a given accuracy", *International Journal of Computing*, vol. 10, iss. 2, pp. 162–171.
7. Dyvak, M.P., Dyvak, T.M. (2009), "Features of construction of interval systems of algebraic equations and methods of solving problems in identification of interval linear difference operator", *Indutive modeling of complex systems: Coll. Science. pr.*, vol. 1, pp. 35–43.
8. Dyvak, M., Stakhiv, P., Kalishchuk, I. (2004), "Identification of the models "input-output" dynamic systems using interval approach", *Bulletin of Ternopil State Technical University*, vol. 9, no. 4, pp. 109–117.
9. Rastrigin, L.A. (1981), *Adaptatsiya slozhnyih sistem* [Adaptation of complex systems], Zynatne, Riga, Latvia.
10. Plyatsuk, L.D., Vaskin, P.A., Solyanik, V. A. (2011), "Alternative methods of using animal waste as an example of filial time farm agricultural lyceum", *Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyyi National University*, vol. 4 (69), iss. 1, pp.147–150.
11. Dyvak, T.M., Pigovsky, Ya.R., Dyvak, M.P., Martsenyuk, Ye.O. (2010), "Practical aspects of the method and algorithm parameter identification of discrete dynamic systems with uncertainty", *Inductive modeling of complex systems*, vol. 2, pp. 39–49.

Стаття надійшла 27.05.2015.