

УДК 622.02.001.57:539.373

ИМИТАЦИОННЫЕ КРИВЫЕ ЗАПРЕДЕЛЬНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СТРУКТУРНО НЕОДНОРОДНЫХ ГОРНЫХ ПОРОД В УСЛОВИЯХ КОНТРОЛИРУЕМОГО РАЗРУШЕНИЯ

А. Н. Шашенко, С. Н. Гапеев, Б. Р. Ракишев, А. С. Ковров

ГВУЗ «Национальный горный университет»

просп. Карла Маркса, 19, г. Днепропетровск, 49005, Украина.

E-mail: shashenko@nmu.org.ua, sergey.gapeev@hotmail.com, b.rakishev@mail.ru, kovrov@rambler.ru

Адекватность численной модели возрастает при учете вероятностной природы прочности горных пород и учете нелинейных эффектов их поведения за пределом прочности – разупрочнения и разрыхления. Получение параметров нелинейного поведения горных пород требует специальных испытательных машин и систем контроля, эти эксперименты очень трудоемки и затратны, что практически полностью нивелирует достоинства численных методов, так как для подготовки лишь одной адекватной модели следует выполнить колоссальный объем достаточно сложных лабораторных испытаний. Предложена методика получения зависимостей « σ – ε » на основе имитационного моделирования деформирования образцов горных пород в режиме контролируемого разрушения с учетом параметров статистического закона распределения прочности реальных образцов, с помощью которой применительно к численному моделированию можно получить полные диаграммы деформирования, достаточно близкие к реальным (отличие не превышает 12 %), не прибегая к сложным экспериментам.

Ключевые слова: численные методы, запредельное деформирование пород, полная диаграмма деформирования, имитационное моделирование, методика

ІМІТАЦІЙНІ КРИВІ ПОЗАМЕЖНОГО ДЕФОРМУВАННЯ СТРУКТУРНО НЕОДНОРІДНИХ ГІРСЬКИХ ПОРІД В УМОВАХ КОНТРОЛЬОВАНОГО РУЙНУВАННЯ

О. М. Шашенко, С. М. Гапеев, Б. Р. Ракишев, О. С. Ковров

ДВНЗ «Національний гірничий університет»

просп. Карла Маркса, 19, м. Дніпропетровськ, 49005, Україна.

E-mail: shashenko@nmu.org.ua, sergey.gapeev@hotmail.com, b.rakishev@mail.ru, kovrov@rambler.ru

Адекватність чисельної моделі зростає при врахуванні імовірнісної природи міцності гірських порід та врахуванні нелінійних ефектів їх поведінки за межею міцності - розміцнення і розпушення. Отримання параметрів нелінійної поведінки гірських порід вимагає спеціальних випробувальних машин і систем контролю, ці експерименти дуже трудомісткі і витратні, що практично повністю нівелює переваги чисельних методів, оскільки для підготовки лише однієї адекватної моделі слід виконати колосальний обсяг досить складних лабораторних випробувань. Запропоновано методику отримання залежностей « σ – ε » на основі імітаційного моделювання деформування зразків гірських порід в режимі контрольованого руйнування з урахуванням параметрів статистичного закону розподілу міцності реальних зразків. За допомогою цієї методики стосовно чисельного моделювання можна отримати повні діаграми деформування, досить близькі до реальних (відмінність не перевищує 12 %), не вдаючись до складних лабораторних експериментів.

Ключові слова: чисельні методи, позамежне деформування порід, повна діаграма деформування, імітаційне моделювання, методика

АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ. Проблема оценки прочности горных пород в сложном напряженном состоянии – одна из важнейших в геомеханике. В итоге она сводится к сравнению эквивалентных напряжений с пределом прочности на сжатие. Имея же хорошо обоснованный критерий прочности, можно аналитически решить и обратную задачу, т.е. прогнозировать прочность горных пород, строить паспорта прочности, т.е. изучать процесс разрушения горных пород на численных моделях. Такие модели исследуются при помощи программных комплексов, в основе которых лежит один из численных методов. Для этих целей очень хорошо подходит метод конечных элементов (МКЭ).

Стандартные исследования процесса разрушения горных пород проводятся путем испытаний по определенным методикам породных образцов (блоков), т.е. по сути, физических моделей, имитирующих реальный породный массив. При этом затрачиваются значительные усилия для ликвидации несовершенств самого процесса физического моделирования, таких как торцевые условия, качество обработки поверхностей, особенностей испытательных

машин, погрешностей измерительных приборов и т.п. Для слабых горных пород собственно изготовление образцов часто представляет непростую проблему, особенно для испытаний в режиме контролируемого разрушения, что очень важно для имитации реальных условий деформирования породного массива. Все вышеуказанные недостатки физического моделирования приводят к тому, что экспериментальные данные, полученные путем лабораторных испытаний породных образцов, являются в известной степени величинами случайными. Для получения же более точных результатов необходимо выполнить большое количество лабораторных опытов, проведение которых очень трудоемко и требует существенных материальных затрат. Компьютерное моделирование процесса разрушения породных образцов в объемном напряженном состоянии в отличие от физического моделирования лишено отмеченных выше недостатков. Оно позволяет ограничиться определенной, хорошо обоснованной, теорией прочности и результатами обычных стандартных испытаний образцов горных пород на одноосное сжатие (растяжение, сдвиг). При этом мож-

но учесть естественную вариацию этих параметров, задавая в компьютерной стохастической модели параметры того или иного закона распределения.

Целью настоящей статьи является описание подхода и результатов численного эксперимента по исследованию процесса разрушения образца горной породы в режиме контролируемого разрушения.

МАТЕРИАЛ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ. Известны два вида испытаний горных пород на одноосное сжатие:

- в условиях заданных нагрузок;
- в условиях заданных деформаций.

В первом случае на пульте пресса задают определенную нагрузку (напряжение – σ_i) и измеряют соответствующую ей продольную (поперечную) относительную деформацию – ε_i . В конце испытаний определяют предельное напряжение (предел прочности на одноосное сжатие – R_c) и предельное значение продольной деформации ε_k . После этого образец лавинообразно разрушается. В этом режиме происходит, например, нагружение пород кровли в лаве по мере увеличения длины консоли.

Во втором случае задаются значения деформаций и измеряются соответствующие им напряжения. Для этого используют особые, т.н. «жесткие», испытательные машины [1–4]. При этом поведение породных образцов в процессе их деформирования до момента разрушения полностью совпадает с поведением таких же образцов, нагружаемых в режиме заданных нагрузок.

Иначе обстоят дела с разрушением структурно неоднородных горных пород за пределом прочности (рис. 1). При жестко заданной деформации первыми разрушаются структурные элементы наиболее «неудачно» ориентированные по отношению к внешнему нагружению. При этом часть приходящейся на них нагрузки перераспределяется на другие, более «удачно» расположенные элементы.

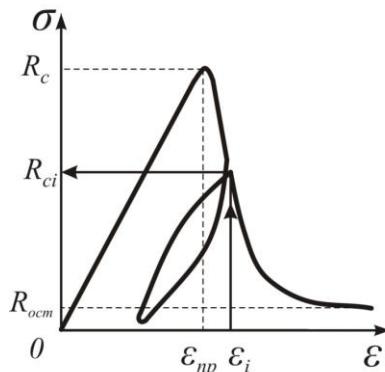


Рисунок 1 – Испытания образцов горных пород на одноосное сжатие в режиме заданных деформаций

Образец приобретает новую структуру, которой соответствует более низкий по отношению к исходному R_c предел прочности на одноосное сжатие R_{ci} . Петля гистерезиса, полученная при снятии нагрузки до нуля, будет характеризовать уровень диссипации упругой энергии. В конце нагружения будут разрушены все внутренние связи и образец, внешне сохраняя форму и остаточную прочность $R_{ост}$ за счет

сил трения, перейдет в состояние так называемого эквиволлюмиального течения. Форма ниспадающей части кривой деформирования по сути является характеристикой структуры конкретной литологической разности.

Таким образом разрушается породный массив вокруг одиночных горных выработок, в целиках и во многих других элементах подземных структур. Роль «жесткого» нагружающего устройства при этом играет упруго деформирующаяся область породной среды, расположенная за областью неупругих деформаций (рис. 2). Таким образом, можно говорить о т.н. гипотезе соответствия – предположении о подобии механических явлений, происходящих при «жестком» разрушении породного образца и произвольной локальной точки массива в окрестности горной выработки.

Эта особенность разрушения горных пород находит свое отражение в расчетных схемах (моделях) в аналитических расчетах [5, 6] и численном моделировании [7, 8].

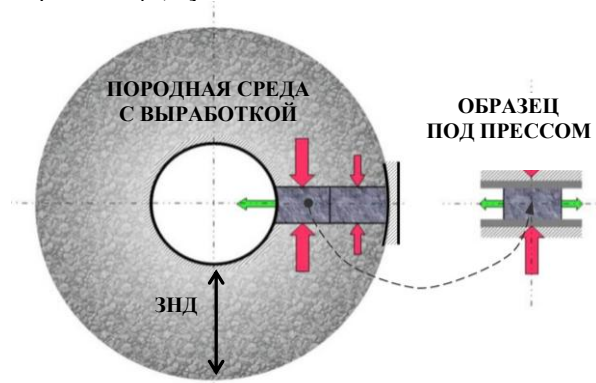


Рисунок 2 – К аналогии механических явлений в породах зоны неупругих деформаций, окружающей горную выработку, и образце, деформирующемся в режиме заданных деформаций на «жестком» прессе

При этом в случае численного моделирования приходится применять особые приемы, касающиеся не только изменений в исходных моделях, но и в архитектуре соответствующего программного продукта. Так, например, поступили на кафедре строительства, геотехники и геомеханики в НГУ [8], внеся соответствующие изменения в алгоритм расчета, учитывающие особенности деформирования и разрушения горных пород за пределом прочности.

Исследования, выполненные А.Н. Шашенко, Е.А. Сдвижковой в области масштабного эффекта в горных породах [8, 9] показали, что гистограммы распределения прочности различных углевмещающих пород подчиняются определенным законам распределения: нормальному, логнормальному, Вейбулла и др.

Сложное напряженное состояние, в котором находятся горные породы в окрестности выработок, можно привести к эквивалентному одноосному, используя ту или иную теорию прочности. Тогда, зная характер нагружения и вид кривой распределения прочности структурных элементов в породе, можно автоматически учесть это обстоятельство в

алгоритме расчета, минуя стадию трудоемких лабораторных испытаний.

Методика численного моделирования процесса деформирования породных образцов за пределом прочности состояла в следующем. График реальных испытаний конкретной горной породы перестраивался. На вертикальной и горизонтальной осях координат все значения напряжений и деформаций делились на их наибольшие значения (R_c) и (ε_{\max}). Тогда появлялась возможность сравнивать между собой горные породы одной литологической разности, имеющие разную прочность.

В объемной компьютерной модели (рис. 3) вертикальная деформация ($\varepsilon_1 = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$) задавалась в процентах от длины образца, а его боковые грани были свободны от нагрузок. Вертикальные и горизонтальные перемещения по нижней грани образца задавались равными нулю – это соответствует наличию жесткой нижней плиты пресса и сухому трению на контакте между гранью образца и плитой пресса [10].

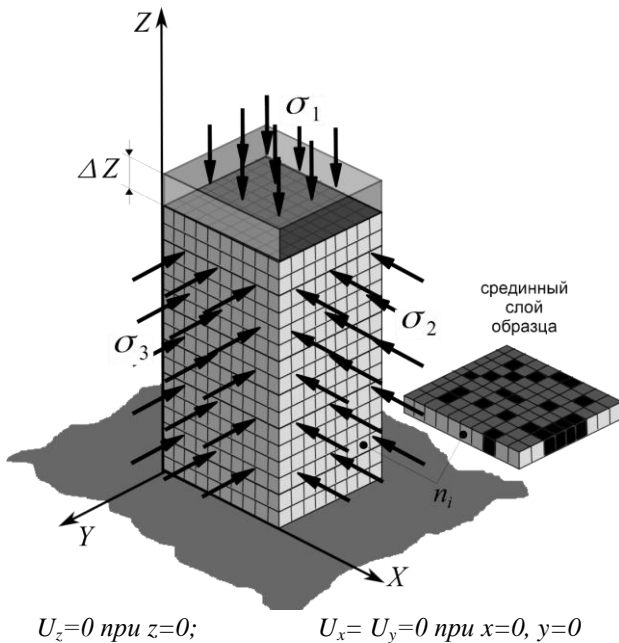


Рисунок 3 – Объемная компьютерная модель нагружения образца в режиме заданной деформации

В процессе приращения вертикальных деформаций в центре каждого элемента определялась величина эквивалентных напряжений σ_{ei} , которая сравнивалась с пределом прочности на одноосное сжатие R_c . Значения предела прочности R_{ci} в каждом элементе задавались с помощью датчика случайных чисел по логнормальному закону распределения. Параметры закона принимались на основе обработки данных лабораторных испытаний на одноосное сжатие образцов кварцево-гидрогематитобитумитовых сланцев (а), мартито-кварцитогематитовых роговиков (б) и руды краскомартитовой (в), полученных на шахте «Родина» ОАО «Криворожский железорудный комбинат» (ОАО «КЖРК») (рис. 4).

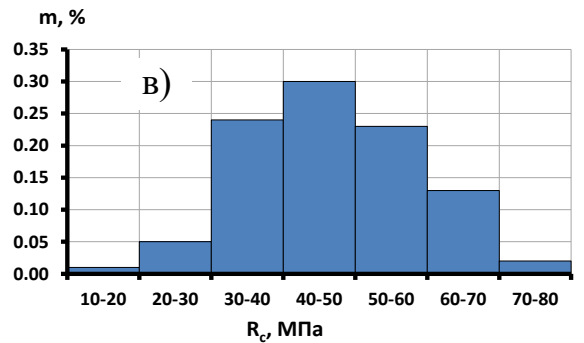
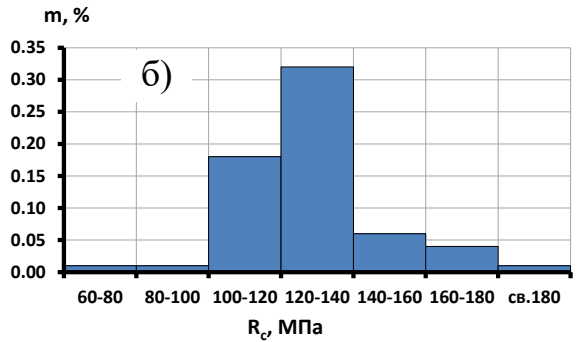
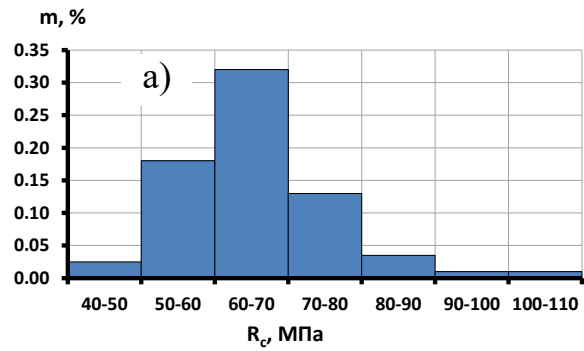


Рисунок 4 – Гистограммы распределения пределов прочности вмещающих пород и руды (ш. «Родина», ОАО «КЖРК»)

Элементы, в которых выполнялось условие

$$\sigma_e \geq R_c, \quad (1)$$

считались разрушенными. При этом несущая способность образца снижалась, что учитывалось коэффициентом снижения прочности по отношению к начальной его прочности

$$\omega = \frac{n - n_p}{n}, \quad (2)$$

где n – общее число конечных элементов; n_p – число разрушенных конечных элементов, в которых выполнялось условие (1). Величина коэффициента ω изменялась в следующих пределах $1 > \omega > \omega_{ост}$, где $\omega_{ост}$ – остаточная прочность образца.

На рис. 5–7 показаны в безразмерных координатах моделируемые горные породы шахты «Родина» ОАО «КЖРК» для случаев нормального и логнормального законов распределения, как наиболее близко отражающих их структурные особенности. Из графиков следует, что к реальной кривой деформирования ближе всего ложатся имитационные кривые, полученные на основе логнормального закона распределения.



Рисунок 5 – Кривые деформирования за пределом прочности кварцево-гидрогематитобитовых сланцев



Рисунок 6 – Кривые деформирования за пределом прочности мартито-кварцито-гематитовых роговиков



Рисунок 7 – Кривые деформирования за пределом прочности руды краско-мартитовой

Для сравнения с результатами численного моделирования кривые лабораторных испытаний горных пород были приведены к безразмерной форме. Как следует из рис. 5–7 и табл. 1, отличие натуральных и численных экспериментов не превышает 12 %, что является вполне удовлетворительным результатом.

Таблица 1 – Сравнение результатов численного моделирования и лабораторных тестов

Относительная деформация	Диапазон относительного напряжения		
	Тест	модель	%
кварцево-гидрогематитобитовые сланцы			
0,1	0,42	0,46	9,5
0,2	0,78	0,86	11,2
0,3	0,98	1,00	2,0
0,4	0,78	0,87	11,5
0,5	0,59	0,62	5,0
0,6	0,40	0,42	5,0
0,7	0,26	0,27	3,8
0,8	0,09	0,1	10,0
0,9	0,087	0,1	12,0
1,0	0,085	0,1	12,0
кварцево-гидрогематитобитовые сланцы			
0,1	0,60	0,58	3,3
0,2	1,0	0,98	2,0
0,3	0,70	0,76	8,67
0,4	0,36	0,40	12,2
0,5	0,20	0,22	10,0
0,6	0,12	0,10	12,2
0,7	0,11	0,09	9,2
0,8	0,10	0,095	5,3
0,9	0,95	0,095	0,0
1,0	0,95	0,095	0,0
краско-мартитовая руда			
0,1	0,40	0,41	2,5
0,2	0,80	0,81	1,5
0,3	1,00	1,0	0
0,4	0,90	0,92	2,2
0,5	0,57	0,62	8,1
0,6	0,39	0,43	8,1
0,7	0,20	0,27	10,2
0,8	0,13	0,41	7,8
0,9	0,11	0,12	7,6
1,0	0,10	0,11	7,4

Описанный подход позволяет получить данные для выполнения анализа напряженно-деформированного состояния горных пород, подвергающихся нагружению в режиме контролируемого разрушения. Такой анализ может быть выполнен с использованием программного пакета, реализующего метод конечных элементов, разработанного в лаборатории геомеханики Национального горного университета и учитывающего эффекты разупрочнения и разрыхления породной среды [8]. При этом ниспадающая ветвь полной диаграммы деформирования образцов задается в виде набора пар значений « σ – ϵ ». Формирование этого набора в численных решениях задач о напряженно-деформированном состоянии породного массива возможно по методике, изложенной ниже.

Исходными данными для проведения имитационного моделирования с целью построения полной диаграммы деформирования образца за пределом

прочности являются следующие параметры: предел прочности на одноосное сжатие R_c ; предел прочности на сдвиг R_τ ; предел прочности на одноосное растяжение R_p ; коэффициент хрупкости ψ ; модуль Юнга E ; коэффициент Пуассона μ ; параметры закона распределения: дисперсия D и математическое ожидание m . Эти характеристики могут быть достаточно просто получены в ходе проведения стандартных лабораторных испытаний реальных горных пород.

Для получения величин R_c , E , μ необходимо провести серию стандартных испытаний образцов горных пород на одноосное сжатие. При этом получают также гистограммы распределения прочности (см., например, рис. 4), по которым устанавливают параметры закона распределения прочности (D и m).

Установление величины R_τ для образцов может быть выполнено косвенным методом по известной стандартной методике продавливания породных дисков.

Учитывая, что величины R_c , R_p и R_τ связаны соотношением

$$R_\tau = 0,5\sqrt{R_c R_p}, \quad (3)$$

а зная R_c и R_p , можно вычислить R_p :

$$R_p = (4R_\tau^2)/R_c. \quad (4)$$

Имея значения R_c и R_p , несложно вычислить коэффициент хрупкости

$$\psi = R_p/R_c. \quad (5)$$

Теперь, зная величины E , R_c и учитывая, что для упругой части диаграммы деформирования $E = R_c/\varepsilon_1$, можно вычислить величину деформаций ε_1 для точки предельного состояния породы. Полученные данные позволяют построить упругую ветвь диаграммы деформирования.

Затем, используя установленные в ходе анализа результатов испытаний образцов породы на одноосное сжатие параметры закона распределения прочности, создается численная объемная модель, каждому конечному элементу которой присваивается значение предела прочности в соответствии с заданным законом распределения. Подготовленная таким образом численная модель подвергается пошаговой деформации, при этом величина прикладываемой деформации $\varepsilon_1^{[i]}$ принимается в долях от длины образца, что соответствует описанной выше методике. На каждом шаге под действием приложенной деформации в части элементов впервые выполняется условие (1), т.е. они переходят в категорию подвергшихся деструкции. Для каждого из этих элементов устанавливается коэффициент снижения прочности

$$k_\omega = R_c/\sigma_e^{[i]}, \quad (6)$$

где $\sigma_e^{[i]}$ – величина эквивалентных напряжений на i -ом шаге.

Затем для такого элемента вычисляется текущая прочность $R_c^{[i]} = R_c \cdot k_\omega$, которая включается в общую выборку для расчета средней прочности образца $R_c^{[i]}$ на данном шаге. Рассматривая ниспадающую ветвь диаграммы « σ – ε » как геометрическое место точек предельных упругих состояний

материала при $R_c^{[i]}$ [8], на диаграмму наносится точка ($\varepsilon_1^{[i]}$; $R_c^{[i]}$).

На следующем шаге процедура повторяется, причем в расчете $R_c^{[i+1]}$ и $R_c^{[i+1]}$ участвуют уже не только те элементы, в которых условие (1) выполнено впервые, но и те, в которых это условие было выполнено ранее. Для последних вычисляется новый коэффициент снижения прочности – уже для $\sigma_e^{[i+1]}$, а затем и $R_c^{[i+1]}$. В результате наносится следующая точка ($\varepsilon_1^{[i+1]}$; $R_c^{[i+1]}$).

Расчет продолжается до тех пор, пока R_c не достигнет величины остаточной прочности:

$$R_c \approx 0,1R_c = R_{ocm} \quad (7)$$

т.е., пока практически все элементы не перейдут в состояние деструкции, либо до тех пор, пока прикладываемая к модели относительная величина ε_1 не достигнет значения, равного единице.

В результате выполнения этой серии расчетов на графике « σ – ε » строится верхняя часть ниспадающей ветви полной диаграммы деформирования, вплоть до той ее части, которая соответствует переходу образца в состояние эквиволлюмиального течения и достижения им остаточной прочности. Эти же результаты и формируют указанные выше пары значений « σ – ε », используемые расчетным алгоритмом.

ВЫВОДЫ. 1. Выполнены лабораторные испытания основных вмещающих пород и руды, отобранные в выработках шахты «Родина» ОАО «Криворожский железорудный комбинат», что позволило получить гистограммы распределения предела прочности на одноосное сжатие и графики деформирования горных пород за пределом прочности.

2. Выполнено имитационное численное моделирование процесса деформирования горных пород за пределом прочности, что позволило получить виртуальные графики запределного деформирования.

3. Разработан модуль алгоритма расчета в программном продукте, который позволил повысить точность геомеханических расчетов – отличие натуральных и численных экспериментов не превышает 12 %, что является вполне удовлетворительным результатом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ставрогин А.Н., Протосеня А.Г. Пластичность горных пород: монография. – М.: Недра, 1979. – 301 с.
2. Виноградов В.В. Геомеханическое управление состоянием массива вблизи горных выработок: монография. – К.: Наукова думка, 1989. – 192 с.
3. Кирничанский Г.Т. Элементы теории деформирования и разрушения горных пород: монография. – К.: Наукова думка, 1989. – 189 с.
4. Ставрогин А.Н., Тарасов Б.Г. Экспериментальная физика и механика горных пород: монография. – СПб.: «Наука», 2001. – 343 с.
5. Шашенко А.Н., Тулуб С.Б., Сдвижкова Е.А. Некоторые задачи статистической геомеханики: монография. – К.: Пульсары, 2002. – 302 с.
6. Гладкий А.В., Солодянкин О.В., Ткач О.О. Про необхідність розробок геомеханічних моделей на базі сучасних методів математичного моделювання // Вісник Житомир. інж.-технол. ін-ту. Техн. науки.

– 2002. – № 4. – С. 252–258.

7. Hilton E., Owen D.R.J. Finite element programming. – London: Academic Press, 1977. – 305 p.

8. Шашенко А.Н., Сдвижкова Е.А., Гапеев С.Н. Деформируемость и прочность массивов горных пород: монография. – Д.: Національний гірничий університет, 2008. – 224 с.

9. Сдвижкова Е.А., Тулуб С.Б. Анализ влияния ориентировки основной системы трещин на устой-

чивость подготовительных выработок // *Металлургическая и горнорудная промышленность*. – 2001. – №2. – С. 78–80.

10. Starotitorov I., Starotitorova Y. Numerical analysis of the rock failure process in the three-dimensional stress state // *Науковий вісник Національного гірничого університету*. – 2008. – № 6. – С. 52–55.

SIMULATION CURVES OF THE EXCESSIVE DEFORMATION FOR STRUCTURALLY INHOMOGENEOUS ROCKS IN THE CONDITIONS OF CONTROLLED FAILURE

A. Shashenko, S. Gapeyev, B. Rakishev, O. Kovrov
State Higher Education Institution “National Mining University”
prosp. Karl Marks, 19, Dnipropetrovsk, 49005, Ukraine.

E-mail: shashenkoa@nmu.org.ua, sergey.gapeev@hotmail.com, b.rakishev@mail.ru, kovrov@rambler.ru

It is well known that the results of numerical modeling of geomechanical systems are mainly depend on reliable information about physical and mechanical properties of rocks, which are obtained by carrying out laboratory tests with rock samples. The scattering parameters obtained in these standard tests are indicative of their probabilistic nature, and taking it into account will provide more adequate simulation results. However, the adequacy of the numerical model will be further enhanced taking into account nonlinear effects of rock behavior behind the ultimate strength – weakening and loosening. Obtaining parameters of the rock nonlinear behavior requires special testing machines and control systems, and these experiments are very time-consuming and costly, that almost completely eliminates the advantages of numerical methods for the preparation of just the only adequate model the enormous amount of quite sophisticated laboratory tests should be performed. So the technique for obtaining complete dependences « σ – ε » in application to numerical simulation is proposed. The procedure involves performing a series of standard laboratory tests with rock samples to produce a set of strength and deformation characteristics and parameters for the statistical distribution law of their strength. Further, according to laboratory tests obtained by finite element method (3D-model) the simulation of deformation of rock samples in the mode of a controlled demolition is carried out. Step by step solution to the boundary conditions in the deformation of the upper face of the virtual rock sample allows getting a full simulation descending branch of the deformation diagram « σ – ε », which is considered as a locus of elastic limit states at each step of the calculation. Thus obtained complete stress-strain diagram is used via algorithm developed at the National Mining University for solving geomechanical problems (finite element method) as a set of data pairs (σ_i ; ε_i), which allows to take into account in the calculation of non-linear behavior of rocks beyond the strength and improve the model adequacy and accuracy of the results. With this technique the researcher can get a full stress-strain diagram, which close enough to the real ones (the difference does not exceed 12%) avoiding complex laboratory experiments. References 8, tables 1, figures 7.

Key words: numerical methods, excessive deformation of rocks, complete diagram, simulation modeling, technique.

REFERENCES

1. Stavrogin, A.N. and Protosenya, A.G. (1979), *Plastichost gornyh porod* [Plasticity of rocks], Nedra, Moscow, Russia.

2. Vinogradov, V.V. (1989), *Geomekhanika upravleniya sostoyaniem massiva vblizi gornyh virabotok* [Geomechanical control of the rock behavior in the vicinity of mine excavations], Naukova dumka, Kiev, Ukraine.

3. Kirmichansky, G.G. (1989), *Elementy teorii deformirovaniya i razrucheniya gornikh porod* [Elements of the theory of rock deformation and failure], Naukova dumka, Kiev, Ukraine.

4. Stavrogin, A.N. and Tarasov, B.G. (2001), *Experimentalnaya fizika i mekhanika gornyh porod* [Experimental physics and rock mechanics], Nauka, St. Petersburg, Russia.

5. Shashenko, A.N., Tulub, S.B., Sdvizhkova, E.A. (2002), *Nekotore zadachi statisticheskoy geomekhaniki* [Some problems of statistical geomechanics], Pulsary, Kiev, Ukraine.

6. Gladky, A.V., Solodjankin, A.V. and Tkach, O.O. (2002), “On the need for development of geomechanical models based on modern methods of mathematical modeling”, *The Journal of Zhytomyr State Technological University. Series: Engineering*, no. 4, pp. 252–258.

7. Hilton, E., Owen, D.R.J. (1977), *Finite element programming*, Academic Press, London, Great Britain.

8. Shashenko, A.N., Sdvizhkova, E.A., Gapeyev, S.N. (2008), *Deformiruemost i prichnost massivov gornih porod* [Deformability and strength of rock masses], National Mining University, Dnepropetrovsk, Ukraine.

9. Sdvizhkova, E.A. and Tulub, S.B. (2001), “Analysis of the influence of orientation of the main fracture systems on the sustainability of development workings”, *Metallurgical and mining industry*, no. 2, pp. 78–80.

10. Starotitorov, I. and Starotitorova, Y. (2008) “Numerical analysis of the rock failure process in the three-dimensional stress state”, *Scientific bulletin of the National mining university*, no. 6, pp. 52–55.

Стаття надійшла 07.08.2015.