

УДК 532.72:532.546:519.63

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗЧИНЕННЯ СОЛЬОВИХ ВКЛЮЧЕНЬ В ГРУНТОВИХ ОСНОВАХ ГІДРОТЕХНІЧНИХ СПОРУД

О. М. Степанченко

Національний університет водного господарства та природокористування
вул. Соборна, 11, м. Рівне, 33028, Україна. E-mail: o.m.stepanchenko@nuwm.edu.ua

Розглянуто процес неізотермічного розчинення солей, що залягають у вигляді включень в основі гідротехнічного об'єкта, та винесення їх фільтраційним потоком, що призводить до утворення і еволюції карстової порожнини. В роботі побудовано нову математичну модель даної задачі, що описується нелінійною крайовою задачею фільтрації сольових розчинів, конвективної дифузії розчинених в фільтраційному потоці солей при залежності параметрів фільтрації і масопереносу від концентрації розчинених солей, і при наявності криволінійних меж області фільтрації та рухомої межі фронту розчинення сольового включення. Розвинуто чисельний метод розв'язування відповідних нелінійних крайових задач, з використанням методу числових конформних відображень та побудови нових монотонних різницевих схем. Отримано чисельний розв'язок даної задачі та проведено аналіз отриманих результатів.

Ключові слова: масоперенос, фільтрація, конформні відображення, монотонна різницева схема.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСТВОРЕНИЯ СОЛЕВЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ В ГРУНТОВЫХ ОСНОВАНИЯХ ГИДРОТЕХНИЧЕСКИХ СООРУЖЕНИЙ

О. М. Степанченко

Национальный университет водного хозяйства и природопользования
ул. Соборная, 11, г. Ровно, 33028, Украина. E-mail: o.m.stepanchenko@nuwm.edu.ua

Рассмотрен процесс неізотермического растворения солей, которые залегают в виде включений в основании гидротехнического объекта, и вынесения их фильтрационным потоком, который приводит к образованию и эволюции карстовой полости. В данной работе построена новая математическая модель данной задачи, которая описывается нелинейной краевой задачей фильтрации солевых растворов, конвективной диффузии растворенных в фильтрационном потоке солей при зависимости параметров фильтрации и массопереноса от концентрации растворенных солей, и при наличии криволинейных пределов области фильтрации и подвижного предела фронта растворения солевого включения. Развита численная метод решения соответствующих нелинейных краевых задач, с использованием метода числовых конформных отражений и построения новых монотонных разностных схем. Получено численное решение данной задачи и проведен анализ полученных результатов.

Ключевые слова: массоперенос, фильтрация, конформные отражения, монотонная разностная схема.

АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ. Іноді водорозчинні породи (наприклад солі) залягають в ґрунтових основах гідротехнічних споруд у вигляді включень. В процесі фільтрації води солі із цих включень розчиняються і виносяться фільтраційним потоком. В результаті в основі гідротехнічної споруди утворюється і розвивається з часом карстова порожнина, що є негативним явищем і може призводити до небажаних наслідків, а саме зменшення несучої здатності ґрунтів основи та порушення стійкості споруди. Подібні задачі та їх математичні моделі досліджено в роботах А. П. Власюка [1, 2, 8], В. І. Лаврика [3–6], О. М. Степанченко [7, 8], З. Бажанта [9] та К. Накараї [10].

На відміну від вищезгаданих робіт, тут побудовано нову математичну модель даних задач розчинення солей і карстових порід, що залягають в основах ГТС у вигляді включень, що описуються поперше, нелінійною крайовою задачею фільтрації сольових розчинів, конвективної дифузії розчинених в фільтраційному потоці солей по-друге, при залежності параметрів фільтрації і масопереносу від концентрації розчинених солей, і по-третє, при наявності криволінійних меж області фільтрації та рухомої межі фронту розчинення сольового включення. Розвинуто чисельний метод розв'язування відповідних нелінійних крайових задач, якими описуються побудовані математичні моделі в областях складної геометричної форми з рухомими межами з

використанням методу числових конформних відображень та побудови нових монотонних різницевих схем.

Мета роботи – дослідити процес утворення та розвитку карстових порожнин в ґрунтових основах гідротехнічних споруд.

Практичні значення результатів роботи пов'язані з передбаченням та недопущенням критичних ситуацій під час будівництва та експлуатації гідротехнічних споруд. Одним із факторів ризику аварій на ГТС є карст. Карстові процеси небезпечні не лише для ГТС. У випадку прикладання на ґрунтові основи значних навантажень у вигляді споруд цивільного або промислового призначення, можливе підняття рівня ґрунтових вод. Якщо водорозчинні включення в сухому ґрунті не несуть потенційної загрози спорудам, то при переході пористого середовища в насичений стан ці включення починають розчинятись. А наслідком таких процесів можуть бути аварійні стани будівель, аж до повного їх руйнування. Проведення натурних експериментів в таких випадках або надто дороге з точки зору матеріальних затрат та часу, або взагалі неможливе. Одним із методів отримання прогностичних даних є математичне моделювання та проведення відповідних чисельних експериментів. Це зроблено в статті на прикладі задачі розчинення сольового включення в основі ГТС.

МАТЕРІАЛ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ. Розглянемо процес розчинення солей та інших во-

дорозчинних порід, що залягають у вигляді включення в основі гідротехнічної споруди (рис. 1). В процесі фільтрації води відбувається розчинення та винесення їх фільтраційним потоком, утворення та еволюція карстової порожнини.

Будемо вважати: ґрунт однорідно-ізотропним відносно фільтраційних і дифузійних властивостей, фільтрацію води усталеною за законом Дарсі, процес масопереносу описується законом Фіка.

Потрібно розрахувати поля напорів, швидкості фільтрації та концентрації розчинених солей, а також кількість винесених солей фільтраційним потоком. Крім того потрібно провести візуалізацію поля концентрації розчинених солей в фізичній області; спрогнозувати зону повного розчинення (карстову порожнину) в області фільтрації в околі сольового включення, солі з поверхні якого що розчиняються і виносяться фільтраційним потоком.

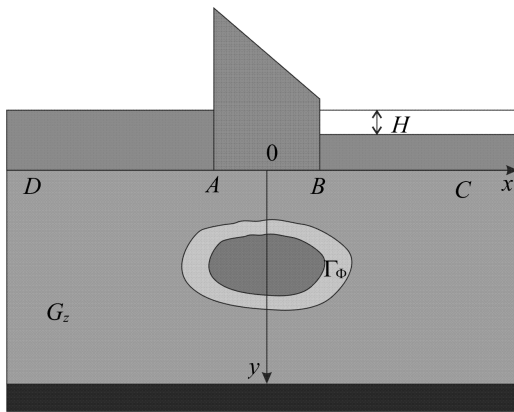


Рисунок 1 – Утворення та еволюція карстової порожнини в основі гідротехнічної споруди

Математична модель задачі в фізичній області в змінних x, y . Математична модель вищенаведеної постановки, очевидно буде нелінійною і описується такою крайовою задачею:

$$\frac{\partial \left(D(c) \frac{\partial c}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(D(c) \frac{\partial c}{\partial y} \right)}{\partial y} - V_x(c) \frac{\partial c}{\partial x} - V_y(c) \frac{\partial c}{\partial y} - \gamma(c - C_m) = \sigma \frac{\partial c}{\partial t},$$

$$(x, y) \in G_z, t > 0, \quad (1)$$

$$\vec{V} = -k(c) \text{grad } h + v \text{grad } c, \text{div } \vec{V} = 0, (x, y) \in G_z, (2)$$

$$h|_{AD} = h(x, 0) = H_1, h|_{BC} = h(x, 0) = H_2, \frac{\partial h}{\partial n}|_{AB \cup DC} = 0,$$

$$\frac{\partial h}{\partial n}|_{\Gamma_\phi} = 0, (x, y) \in G_z, (3)$$

$$c(x, y, 0) = \tilde{C}_0(x, y), (x, y) \in \bar{G}_z, (4)$$

$$c|_{AD} = c(x, 0, t) = \tilde{C}_1(x, t), t > 0, (5)$$

$$\frac{\partial c}{\partial n}|_{AB \cup DC} = \frac{\partial c}{\partial y}|_{y=0 \cup y=b} = 0, x \in (-\infty; -a) \cup (-a; a),$$

$$\frac{\partial c}{\partial n}|_{BC} = \frac{\partial c}{\partial y}|_{y=0} = 0, a < x < \infty, (6)$$

$$\left[\delta D(c) \frac{\partial c}{\partial n} + (-D(c) + \delta V_n) c \right] \Big|_{\Gamma_\phi} = -D(c) C_m, (x, y) \in \Gamma_\phi, (7)$$

$$\frac{dl}{dt} = \frac{1}{C_m S_l} \int_S \left(V_n c - D(c) \frac{\partial c}{\partial n} \right) dS, (x, y) \in \Gamma_\phi, (8)$$

де $k(c)$ – коефіцієнт фільтрації, що залежить від концентрації сольового розчину; $V_x(c), V_y(c)$ – компоненти швидкості фільтрації, які залежать від концентрації, $|V(c)| = \sqrt{V_x^2(c) + V_y^2(c)}$; $D(c), \lambda$ – відповідно коефіцієнт конвективної дифузії та параметер поздовжньої і поперечної гідродинамічної дисперсії причому $D(c) = D_m + \lambda|V(c)|$; Γ_ϕ – межа фронту розчинення сольового включення, рівняння якого $g(x, y) = 0$. Тут (8) є кінематичною граничною умовою, якою описується рух фронту розчинення.

Математична модель задачі фільтрації в змінних ξ, η комплексної області. Для розв'язування крайової задачі (1)–(8), використаємо метод скінченних різниць із застосуванням числових конформних відображень в оберненій постановці [5]. З цією метою проведемо в фізичній області тонкий розріз, що з'єднає сольове включення та ділянку виходу фільтраційного потоку і відобразимо конформно двохзв'язну область з чотирма відміченими точками A, B, C, D, що еволюціонує (рис. 2), на параметричний прямокутник комплексної області змінних ξ, η . Варто зауважити, що в даному випадку цей параметричний прямокутник не співпадає з областю комплексного потенціалу.

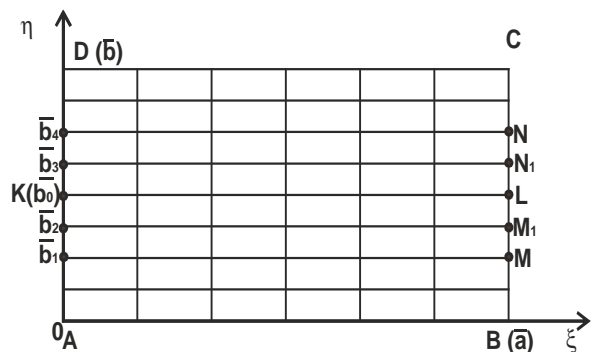
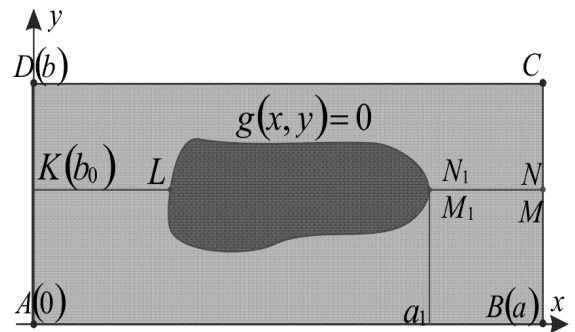


Рисунок 2 – Конформне відображення області фільтрації з розрізом на параметричний прямокутник площини (ξ, η)

Для розв'язування крайової задачі (1)–(8) розв'яжемо спочатку задачу фільтрації (2), (3) та будемо різницеву гідродинамічну сітку фільтраційного потоку. Для чисельної побудови оберненого конформного відображення використаємо пару спряжених гармонічних функцій

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y), \\ \eta = \eta(x, y), \end{cases} \quad (9)$$

які зв'язані умовами Коші-Рімана

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (10)$$

Тоді функції оберненого відображення

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta), \\ y = y(\xi, \eta), \end{cases} \quad (11)$$

також зв'язані умовами Коші-Рімана

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = -\frac{\partial y}{\partial \xi}. \quad (12)$$

В зв'язку з цим сформулюємо спочатку допоміжну обернену задачу для побудови конформного відображення області фільтрації з тонким розрізом на параметричний прямокутник в площині (ξ, η)

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = -\frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad (\xi, \eta) \in G_\zeta \quad (13)$$

$$g_1(x(\xi, 0), y(\xi, 0)) = 0, \text{ зокрема } y(\xi, 0) = 0, \\ \xi \in (0, \bar{a}), (x, y) \in \Gamma_1(AB), \quad (14)$$

$$g_2(x(\xi, \bar{b}), y(\xi, \bar{b})) = 0, \text{ зокрема } y(\xi, \bar{b}) = b, \\ \xi \in (0, \bar{a}), (x, y) \in \Gamma_2(CD), \quad (15)$$

$$g_3(x(0, \eta), y(0, \eta)) = 0, \text{ зокрема } x(0, \eta) = 0, \\ \eta \in (0, \bar{b}), (x, y) \in \Gamma_3(AD), \quad (16)$$

$$g_4(x(\bar{a}, \eta), y(\bar{a}, \eta)) = 0, \text{ зокрема } x(\bar{a}, \eta) = 0, \\ \eta \in (0, \bar{b}_1) \cup (\bar{b}_4, \bar{b}), (x, y) \in \Gamma_4(BC), \quad (17)$$

$$g_0(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = 0, (x, y) \in \Gamma_\Phi(M_1LN_1), \quad (18)$$

$$x|_{M_1M} = x|_{N_1N}, \quad y|_{M_1M} = y|_{N_1N}. \quad (19)$$

На $LN_1 \cup LM_1$ значення функцій $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ задані, або задовольняють деякому рівнянню $g(x, y) = 0$, а на $MM_1 \cup NN_1$ – задаються умови "вільного" розрізу (рівність функцій та їх похідних). Тут: $g(x, y) = 0$ – рівняння контура сольового включення, $g_i(x, y) = 0$, $i = \overline{1, 4}$ – рівняння контурів Γ_i , $i = \overline{1, 4}$ – меж AB, BC, CD, DA області фільтрації G_ζ .

Відобразимо конформно область фільтрації G_ζ з тонким розрізом площини (x, y) на параметричний

прямокутник G_ζ площини (ξ, η) . Позначимо верхню і нижню сторони криволінійного чотирикутника G_ζ через Γ_ζ^1 і Γ_ζ^2 , ліву і праву – через Γ_ζ^3 , Γ_ζ^4 . Відповідні сторони параметричного прямокутника G_ζ позначимо через Γ_ζ^i , $i = \overline{1, 4}$.

Як добре відомо, цей чотирикутник G_ζ можна конформно відобразити на параметричний прямокутник $G_\zeta = \{0 \leq \xi \leq a, 0 \leq \eta \leq b\}$ з відповідним співвідношенням сторін $M=a/b$, який називається модулем прямокутника, так, щоб при цьому чотирьом фіксованим точкам A, B, C, D області G_ζ відповідали вершини A, B, C, D прямокутника G_ζ . При цьому відображенні встановлюється взаємно однозначна відповідність між граничними точками прямокутника G_ζ і області G_ζ , а також між внутрішніми точками цих областей.

Нехай це відображення реалізується аналітичною функцією $\zeta(z) = \xi(x, y) + i \cdot \eta(x, y)$. Будемо шукати обернене відображення параметричного прямокутника G_ζ площини (ξ, η) на область G_ζ площини (x, y) , яке реалізується функцією $z(\zeta) = x(\xi, \eta) + i \cdot y(\xi, \eta)$. В подальшому будемо проводити числовий розрахунок шуканого відображення.

Зокрема, для рис. 2, крайові умови для побудови конформного відображення наступні:

$$x|_{AD} = x(0, \eta) = 0, \quad 0 \leq \eta \leq \bar{b},$$

$$y|_{AB} = y(\xi, 0) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq \bar{a},$$

$$y|_{DC} = y(\xi, \bar{b}) = b, \quad 0 \leq \xi \leq \bar{a},$$

$$x|_{BM \cup NC} = x(\bar{a}, \eta) = a, \quad \eta \in [0, \bar{b}_1] \cup [\bar{b}_4, \bar{b}],$$

$$y|_{M_1M \cup N_1N} = y(\bar{a}, \eta) = b_0, \quad \eta \in [\bar{b}_1, \bar{b}_2] \cup [\bar{b}_3, \bar{b}_4].$$

Математична модель задачі масопереносу в змінних ξ, η комплексної області. Перейдемо в математичній моделі (1)–(8) до змінних ξ, η , при цьому $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$.

Рівняння фільтрації (2) в змінних ξ, η матиме вигляд

$$A_1 \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} + B_1 \frac{\partial^2 h}{\partial \xi \partial \eta} + C_1 \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + D_1 \frac{\partial h}{\partial \xi} + E_1 \frac{\partial h}{\partial \eta} = 0, \quad (20)$$

де коефіцієнти A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 знаходяться наступним чином:

$$A_1 = \frac{k(c)}{\mathfrak{S}_1}, \quad C_1 = \frac{k(c)}{\mathfrak{S}_1}, \quad B_1 = 0,$$

$$D_1 = \frac{1}{\mathfrak{S}_1^2} \left[\frac{\partial k(c)}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial k(c)}{\partial \eta} y_\xi \right] y_\eta - \frac{1}{\mathfrak{S}_1^2} \left[-\frac{\partial k(c)}{\partial \xi} x_\eta - \frac{\partial k(c)}{\partial \eta} x_\xi \right] x_\eta,$$

$$E_1 = -\frac{1}{\mathfrak{S}_1^2} \left[\frac{\partial k(c)}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial k(c)}{\partial \eta} y_\xi \right] y_\eta + \frac{1}{\mathfrak{S}_1^2} \left[-\frac{\partial k(c)}{\partial \xi} x_\eta - \frac{\partial k(c)}{\partial \eta} x_\xi \right] x_\eta$$

Компоненти швидкості фільтрації, перетворенні до змінних ξ, η , приймуть вигляд

$$V_x = -\frac{k(c)}{\mathfrak{S}_1} \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial \xi} \cdot y_\eta - \frac{\partial h}{\partial \eta} \cdot y_\xi \right) - \frac{\nu}{\mathfrak{S}_1} \cdot \left(\frac{\partial c}{\partial \xi} \cdot y_\eta - \frac{\partial c}{\partial \eta} \cdot y_\xi \right),$$

$$V_y = -\frac{k(c)}{\mathfrak{S}_1} \cdot \left(-\frac{\partial h}{\partial \xi} \cdot x_\eta + \frac{\partial h}{\partial \eta} \cdot x_\xi \right) - \frac{\nu}{\mathfrak{S}_1} \cdot \left(-\frac{\partial c}{\partial \xi} \cdot x_\eta + \frac{\partial c}{\partial \eta} \cdot x_\xi \right).$$

Для запису рівняння (1) в змінних ξ, η , маємо:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} + v_1 \frac{\partial c}{\partial \xi} + v_2 \frac{\partial c}{\partial \eta} - \bar{\gamma}(c - C_m) = \bar{\sigma} \left(\frac{\partial c}{\partial t} \right)_{(\xi, \eta)}, \quad (21)$$

де

$$v_1 = \bar{V}_1 + \frac{\bar{\sigma}}{\mathfrak{S}_1} (x_i y_\eta - y_i x_\eta), \quad v_2 = \bar{V}_2 + \frac{\bar{\sigma}}{\mathfrak{S}_1} (-x_i y_\xi + y_i x_\xi).$$

Аналогічний перехід до змінних ξ, η здійснюємо в граничних умовах

$$-\frac{\partial h}{\partial \xi} x_\eta + \frac{\partial h}{\partial \eta} x_\xi = 0, \quad \xi \in (0, \bar{a}), \quad \eta = 0, \quad (22)$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial n} \right|_{CD} = \left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_{CD} = -\frac{\partial h}{\partial \xi} x_\eta + \frac{\partial h}{\partial \eta} x_\xi = 0, \quad \xi \in (0, \bar{a}),$$

$$\eta = \bar{b}, \quad (23)$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial n} \right|_{\Gamma_\Phi} = \frac{\partial h(\bar{a}, \eta)}{\partial \xi} = 0, \quad \xi \in (0, \bar{a}), \quad \eta \in [\bar{b}_2, \bar{b}_3] \quad (24)$$

$$c(x, y, 0) = c(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), 0) = \tilde{C}_0(\xi, \eta), \quad (25)$$

$$c|_{AD} = c(0, y, t) = c(0, \eta, t) = \tilde{C}_1(t), \quad (26)$$

$$\left. \frac{\partial c}{\partial n} \right|_{AB} = \left. \frac{\partial c}{\partial y} \right|_{y=0} = -\frac{\partial c}{\partial \xi} x_\eta + \frac{\partial c}{\partial \eta} x_\xi = 0, \quad \xi \in (0, \bar{a}),$$

$$\eta = 0, \quad (27)$$

$$\left. \frac{\partial c}{\partial n} \right|_{BC} = \left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x=a} = \frac{\partial c}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial c}{\partial \eta} y_\xi = 0,$$

$$\eta \in (0, \bar{b}_1) \cup (\bar{b}_4, \bar{b}), \quad \xi = 0, \quad (28)$$

$$\left. \frac{\partial c}{\partial n} \right|_{\Gamma_\Phi} = -\frac{\partial c(\bar{a}, \eta)}{\partial \xi} = 0. \quad (29)$$

Тут $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_1$ – якобіан відповідно прямого та оберненого конформного відображення.

$$\mathfrak{S} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x = \frac{1}{\mathfrak{S}_1} = \frac{1}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi},$$

$$\mathfrak{S}_1 = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi = y_\eta^2 + y_\xi^2.$$

А $\mathfrak{S}_{1\xi}, \mathfrak{S}_{1\eta}$ мають відповідно представлення:

$$\mathfrak{S}_{1\xi} = \frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial \xi} = x_{\xi\xi} y_\eta + x_\xi y_{\xi\eta} - x_{\xi\eta} y_\xi - x_\eta y_{\xi\xi},$$

$$\mathfrak{S}_{1\eta} = \frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial \eta} = x_{\xi\eta} y_\eta + x_\xi y_{\eta\eta} - x_{\eta\eta} y_\xi - x_\eta y_{\xi\eta}.$$

Алгоритм розв'язання задачі фільтрації сольових розчинів. Отриману задачу фільтрації розв'яжемо чисельним методом скінченних різниць. Замінивши похідні в (20) їх скінченно-різницевиими аналогами, отримаємо:

$$\frac{H_{i+1,j}^k - 2H_{i,j}^k + H_{i-1,j}^k}{h_1^2} + \frac{H_{i,j+1}^k - 2H_{i,j}^k + H_{i,j-1}^k}{h_2^2} + B_{1i,j} \frac{H_{i+1,j}^k - H_{i,j}^k}{2h_1} + B_{2i,j} \frac{H_{i,j+1}^k - H_{i,j}^k}{2h_2} = 0,$$

де

$$H_{i,j}^k = h(i \cdot h, j \cdot h, k \cdot \tau),$$

$$i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad k = \overline{0, K}.$$

Для розв'язку отриманої вище СЛАР, використаємо, наприклад, метод послідовної верхньої релаксації, отримаємо:

$$H_{0,j}^{k+1} = \frac{\omega}{4} (H_{i-1,j}^{k+1} + H_{i-1,j}^k + H_{i,j-1}^{k+1} + H_{i,j-1}^k),$$

$$i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m-1}.$$

Алгоритм знаходження концентрації солей в ґрунті. Для розв'язання задачі масопереносу розіємо рівність (21) на дві, використовуючи економічні методи, зокрема локально-одновимірну схему О. А. Самарського таким чином, щоб одновимірні рівняння конвективної дифузії в сумі давали (21). Кожне з цих одновимірних рівнянь розв'яжемо числовим методом на півінтервалах $\tau/2$ по часу. Тут τ – крок дискретизації в часі.

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} + v_1 \frac{\partial c}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \gamma(c - C_m) = \frac{1}{2} \sigma \frac{\partial c}{\partial t}, \quad (30)$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} + v_2 \frac{\partial c}{\partial \eta} - \frac{1}{2} \bar{\gamma}(c - C_m) = \frac{1}{2} \sigma \frac{\partial c}{\partial t}. \quad (31)$$

Для рівняння (30) використаємо монотонну різницеву схему

$$\mu_1 \frac{C_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} - 2C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + C_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_1^2} + r_1^+ \frac{C_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} - C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_1} + r_1^- \frac{C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - C_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}}}{h_1} - \frac{1}{2} \gamma \left(C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - C_m \right) = \sigma \frac{C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - C_{i,j}^k}{\tau},$$

де

$$\mu_1 = \frac{1}{1 + 0,5 \cdot h_1 \cdot |r_1|}, \quad r_1 = r_1^+ + r_1^-,$$

$$r_1^+ = 0,5(r_1 + |r_1|) \geq 0, \quad r_1^- = 0,5(r_1 - |r_1|) \leq 0, \quad r_1 = v_1.$$

Для рівняння (31) також використаємо монотонну різницеву схему

$$\mu_2 \frac{C_{i,j-1}^{k+1} - 2C_{i,j}^{k+1} + C_{i,j+1}^{k+1}}{h_2^2} + r_2^+ \frac{C_{i,j+1}^{k+1} - C_{i,j}^{k+1}}{h_2} + r_2^- \frac{C_{i,j}^{k+1} - C_{i,j-1}^{k+1}}{h_2} - 0,5\gamma(C_{i,j}^{k+1} - C_m) = 0,5\sigma \frac{C_{i,j}^{k+1} - C_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}}{0,5\tau},$$

де

$$\mu_2 = \frac{1}{1 + 0,5h_2|r_2|}, \quad r_2 = r_2^+ + r_2^-, \quad r_2 = v_2,$$

$$r_2^+ = 0,5(r_2 + |r_2|) \geq 0, \quad r_2^- = 0,5(r_2 - |r_2|) \leq 0.$$

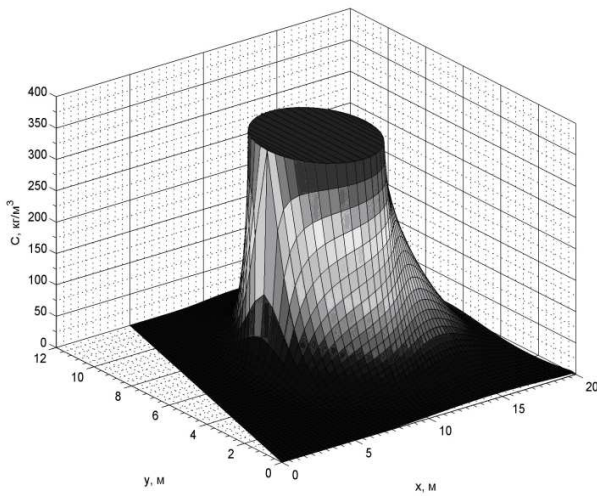
Результати чисельних експериментів, їх аналіз та висновки. Програмна реалізація обчислювальних алгоритмів здійснена в пакеті Scilab з використанням вбудованої мови та його засобів візуалізації результатів обчислень і відображення графічних об'єктів.

Числові розрахунки для розмірних величин проведено для наступних вхідних даних:

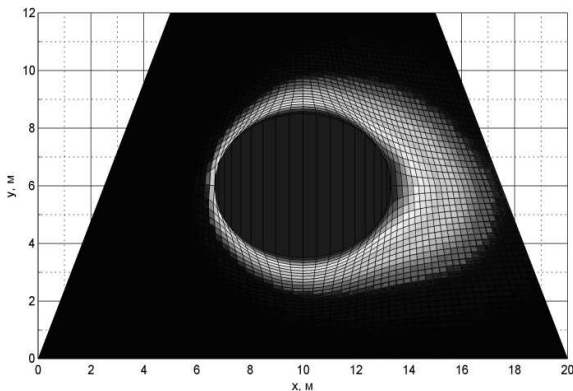
$$H_1 = 5\text{ м}, \quad H_2 = 1\text{ м}, \quad \rho_B = 2,17 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

$$D_m^1 = 9,3 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^2}{\text{доб}}, \quad \tau = 30 \text{ доб}.$$

Результати чисельних експериментів для математичної моделі (1–8) розчинення сольових включень з використанням конформних відображень наведені у вигляді графіків (рис. 3–7).



а)



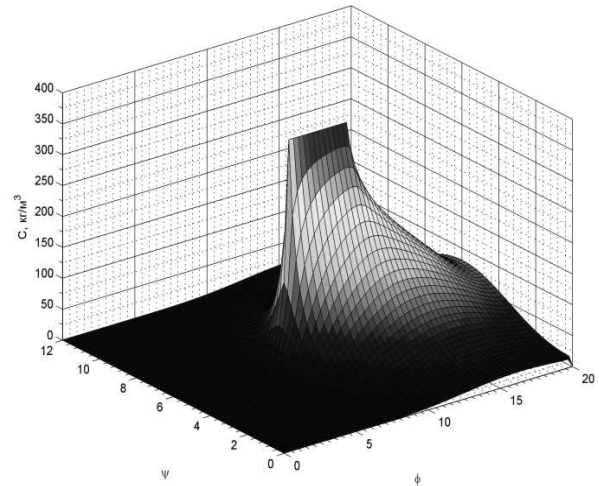
б)

Рисунок 3 – Об'ємна (а) і плоска (б) візуалізація розподілу концентрації солі в поровому просторі ґрунту при розчиненні сольового включення циліндричної форми через 30 років в фізичній області

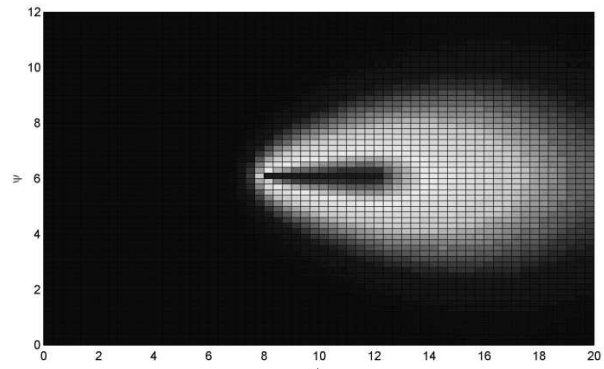
На рис. 3 представлена об'ємна і плоска візуалізація розподілу концентрації солі в поровому просторі ґрунту при розчиненні сольового включення циліндричної форми в фізичній області (x, y) . В області

комплексних змінних (ϕ, ψ) циліндр трансформується в плоске тіло нескінченно малої товщини (рис. 4).

Як видно з рис. 3, в фізичній області лінії течії, огинаючи сольове включення, так само як і еквіпотенціальні лінії, набувають складної форми. Сітка дискретизації має складну конфігурацію. Тому застосування різницевої схеми в такій області є не простою задачею. В області комплексних змінних (рис. 4) розчинне тіло трансформувалося в плоске нескінченно тонке тіло. Лінії функції течії і лінії комплексного потенціалу є прямими, причому лінії функції течії є паралельними до площини нескінченно тонкого розчинного тіла. По своїй постановці ця задача відповідає одній з найпростіших задач фізичної області.



а)



б)

Рисунок 4 – Об'ємна (а) і плоска (б) візуалізація розподілу концентрації солі в поровому просторі ґрунту при розчиненні сольового включення циліндричної форми через 90 років в області комплексних змінних.

На рис. 5 представлений графік залежності від часу зміни маси сольового включення внаслідок його розчинення. Як видно з результатів чисельних експериментів, швидкість розчинення тіла з врахуванням нелінійної залежності коефіцієнта дифузії і коефіцієнта фільтрації від концентрації розчину і від

температури більша (друга крива), ніж у випадку, коли коефіцієнт дифузії і коефіцієнт фільтрації вважаються сталими величинами (перша крива). При цьому, наприклад, протягом 200-т місяців від початку дослідження процесу, маса винесених солей у випадку нелінійної задачі в 1,8 рази більша за відповідну масу для випадку лінійної задачі. І при збільшенні часу таке відношення зростає. Зрозуміло, що такими уточненнями прогнозних розрахунків для реальних задач нехтувати не можна.

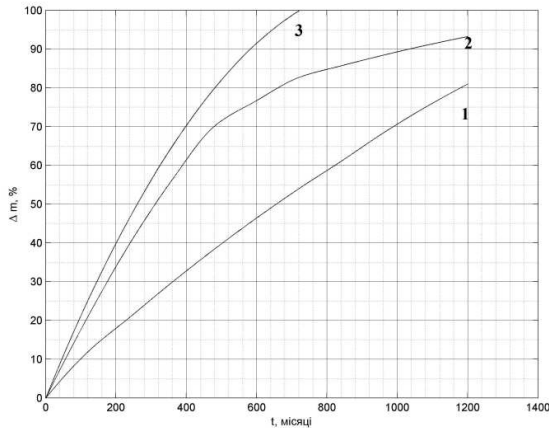


Рисунок 5 – Залежність маси розчиненої солі Δm від часу t для соляного включення циліндричної форми

На рис. 6 і 8 представлені горизонтальні проекції поверхні розчиненого циліндричного соляного включення в різні моменти часу у випадку, коли коефіцієнт дифузії вважається сталою величиною (рис. 6) і коли коефіцієнт дифузії і коефіцієнт фільтрації залежать від концентрації розчину і від температури (рис. 7). Як видно з наведених даних, внаслідок того, що швидкість розчинення тіла нерівномірно розподілена по його поверхні, в процесі розчинення круговий циліндр трансформується в циліндр неправильної еліптичної форми. Причому у випадку нелінійної моделі швидкість розчинення значно більша, ніж у випадку лінійної моделі. Так, наприклад, через 100 років після початку дослідження процесів розчинення, діаметр включення по вертикальній осі для випадку нелінійної задачі є приблизно в два рази меншим, аніж для випадку сталої коефіцієнта дифузії.

Розглянемо процес розчинення соляного включення циліндричної форми, який межує з водопроникною нерозчинною породою або добре консолідованим ґрунтом. Внаслідок розчинення солі виникає зона повного розчинення. Будемо вважати, що вона не заповнюється ґрунтовим середовищем. Зону розчинення можна представити у вигляді вільного від породи і солі каналу циліндричної форми, по якому відбувається фільтрація води. Коефіцієнт фільтрації в цьому випадку значно менший від коефіцієнту фільтрації води в ґрунті. При таких умовах розчинення солі відбувається з великою швидкістю (червона крива рис. 5, рис 8) в основному за рахунок фільтраційного механізму.

Утворений таким чином вільний від ґрунту і солі канал, вздовж якого відбувається фільтрація води, являє собою карстову протоку розміри якої швидко зростають з часом.

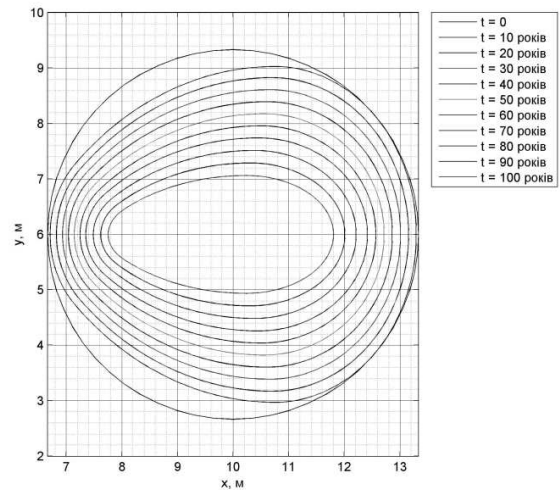


Рисунок 6 – Горизонтальна проекція поверхні розчиненого циліндричного соляного включення в різні моменти часу. Коефіцієнт дифузії не залежить від концентрації розчину

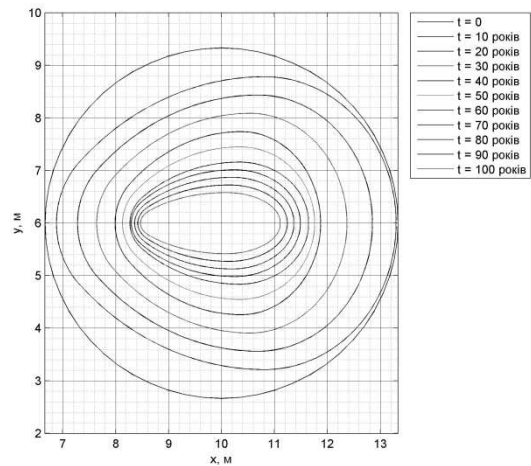


Рисунок 7 – Горизонтальна проекція поверхні розчиненого циліндричного соляного включення в різні моменти часу. Коефіцієнт дифузії залежить від концентрації розчину

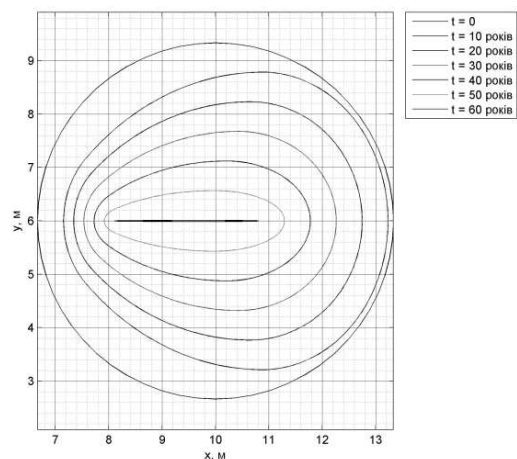


Рисунок 8 – Горизонтальна проекція поверхні розчиненого циліндричного соляного включення в різні моменти часу. Коефіцієнт дифузії не залежить від концентрації розчину. Ґрунт не заповнює зону розчинення і в ній утворюється карстова протока

ВИСНОВКИ. Побудована математична модель задачі розчинення сольового включення складної геометричної форми на основі диференціальних рівнянь молекулярної та конвективної дифузії з врахуванням осмосу, теплопереносу, фільтрації, з крайовими умовами в лінійній та нелінійній постановці в фізичній області простору та в області комплексного потенціалу. Розроблений числовий метод побудови різницевої схеми розв'язку задачі фільтрації та масопереносу. Здійснена програмна реалізація задачі та проведені числові експерименти на тестових прикладах. Проведені розрахунки просторового розподілу концентрації розчиненої речовини, положення рухомої межі фронту розчинення в різні моменти часу для сольового включення різної форми. На основі числових експериментів проведений аналіз нелінійних параметрів, які суттєво впливають на характер розподілу концентрації розчиненої речовини і на величину зміщення рухомої межі фронту розчинення. До таких параметрів відносяться коефіцієнт масообміну між сольовим включенням і розчином, конвективна складова коефіцієнта дифузії і характер її залежності від величини концентрації розчиненої речовини, швидкість фільтрації, яка в свою чергу залежить від величини гідравлічного напору і від осмотичних параметрів. Отримані розрахункові шляхом дані для розглянутої модельної задачі свідчать про збільшення швидкості розчинення включень в основах ГТС при дослідженнях нелінійних задач, як математичних моделей досліджуваних процесів. Відносно уточнення прогнозних даних сягає ста і більше відсотків (в порівнянні з лінійною математичною моделлю).

Наступні етапи роботи будуть стосуватись дослідження карстоутворення в неізотермічних умовах а також відповідних задач у просторовому випадку.

ЛІТЕРАТУРА

1. Власюк А. П., Михальчук В. Г. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений двухсвязных и трехсвязных областей / Препринт / АН Украины. Ин-т математики; 91.57. – Киев, 1991. – 56 с.
2. Власюк А. П. Численное решение задачи растворения и выноса солей фильтрационным потоком в основании гидротехнических сооружений / Рукопись деп. в ГНТБ Украины 15.12.93, № 2445- УК 93. – Ровно, 1993. – 12 с.
3. Лаврик В. И., Милютин А. Ф. Аналитическое и численно-аналитическое решение двумерных краевых задач конвективной диффузии растворимых веществ при фильтрации подземных вод / Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 78.24– Киев, 1978. – 56 с.
4. Лаврик В. И., Рудченко П. А. Исследование процессов конвективного массопереноса при двумерной фильтрации подземных вод / Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 80.12. – Киев, 1980. – 40 с.
5. Лаврик В. И., Власюк А. П. Некоторые задачи фильтрации и массопереноса в неоднородных анизотропных пористых средах / Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.15. – Киев, 1985. – 59 с.
6. Лаврик В. И., Милютин А. Ф. Численно-аналитическое решение краевых задач конвективной диффузии солей, залегающих в фильтрационных потоках в виде включений // Математические методы исследования физических полей. – 1980. – С. 3–10.
7. Власюк А. П., Степанченко О. М. Чисельне моделювання однієї задачі розчинення сольового включення // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки 36. наук. праць – Кам'янець-Подільський. – 2010. – №4. – С. 70–84.
8. Власюк А. П., Степанченко О. М. Математичне моделювання розчинення сольового включення в основі гідротехнічної споруди в неізотермічних умовах // Тези Всеукраїнської наукової конференції “Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів”. – Рівне. – 2013. – С. 44.
9. Bažant Zdeněk P, Steffens A. Mathematical model for kinetics of alkali-silica reaction in concrete // Cement and Concrete Research, Volume 30, Issue 3, March 2000, Pages 419-428
10. Nakarai K., Ishida T. Maekawa K. Multi-scale physicochemical modeling of soil-cementitious material interaction //, Soils and Foundations, 46(5): – 2006b. PP. 653–664.

MATHEMATICAL MODELLING OF DISSOLVING OF THE SALINE INCLUSIONS IN SOIL BASES OF THE HYDROTECHNICAL BUILDINGS

O. Stepanchenko

National University of Water Management and Nature Resource Use
vul. Soborna, 11, Rivne, 33028, Ukraine. E-mail: o.m.stepanchenko@nuwm.edu.ua

Purpose. The goal of this thesis is to study the formation and development of karst cavities in the underground hydro-technical grounds while taking into account the non-linearity of the processes of dissolution and leaching of water-soluble inclusions (rock salt, gypsum etc.) by filtration flow of the underground waters. **Methodology.** Mathematical modeling of the processes of filtration, heat and mass transfer is applied in this thesis, which describes the nonlinear boundary value problem of filtration of saline solutions, convective diffusion in the filtration of dissolved salts flow and dependence of the filtration and mass transfer parameters from concentrations of dissolved salts and in the presence of curvilinear filtering boundaries and the moving boundary of the dissolution point in salt inclusion. **Results.** Finite difference method and numerical conformal mappings in the reverse direction have been used while solution of obtained boundary value problem. Method of conformal mappings solutions of nonlinear boundary value problems with moving boundaries, dissolution of salt seams and inclusions of water-soluble rocks has been developed to obtain the numerical solution. The algorithms for calculating the rate of dissolution of the salt inclusions formed by filtering the mass flux of the dissolved substance and time evaluation method for dissolution of the salt inclusions have been created. **Originality.** A mathematical model and conducted numerical experiments concerning the research of process of occurrence and

development of karst cavities and ducts on the basis of differential equations of the second order that describe the phenomena of filtration, mass transfer, heat transfer and dissolution kinetics with non-linear filtering effects, molecular and convective diffusion, thermo-diffusion, osmosis in non-isothermal conditions have been developed for the first time. **Practical value.** The obtained numerical results allow us to make the predictive assessment of the processes in the caves. Comparative numerical experiments with the help of different numerical methods are in good mutual accordance, which confirms the adequacy of the constructed mathematical model. References 12, figures 8.

Key words: mass transferring, filtration, conformal representations, monotonous difference scheme.

REFERENCES

1. Vlasiuk, A.P., Mykhalchuk, V.G. (1991), *Avtomaticheskoe postroenie konformnyh i kvazikonformnyh otobrazheniy dvuhsvyaznyh i trehsvyaznyh oblastey* [Automatic construction of the conformal and quasi-conformal representations of the twice and three connected areas], Preprint / SA of Ukraine, The Institute of Mathematics, Kiev, Ukraine.
2. Vlasiuk, A.P. (1993), *Chislennoe reshenie zadachi rastvoreniya i vynosa solej fil'tracionnym potokom v osnovanii gidrotehnicheskikh sooruzhenij* [Numerical solution of the dissolving and take out process of the salts in soil bases of the hydro technical buildings], Manuscript in the SSTL of Ukraine, Rivne, Ukraine.
3. Lavryk, V.I., Milutin, A.F. (1978), *Analiticheskoe i chislunno-analiticheskoe reshenie dvumernyh kraevykh zadach konvektivnoj diffuzii rastvorimyh veshhestv pri fil'tracii podzemnykh vod* [Analytical and numerical-analytical solution of the two-dimensional boundary problems of the soluble substances' convective diffusion in the process of underground waters filtration], Preprint / SA of Ukraine, The Institute of Mathematics, Kiev, Ukraine.
4. Lavryk, V.I., Vlasiuk, A.P. (1980), *Issledovanie processov konvektivnogo massopereenosy pri dvumernoj fil'tracii podzemnykh vod* [Research on the processes of convective mass transferring in case of two-dimensional underground water filtration], Preprint / SA of Ukraine, The Institute of Mathematics, Kiev, Ukraine.
5. Lavryk, V.I., Vlasiuk, A.P. (1985), *Nekotorye zadachi fil'tracii i massopereenosy v neodnorodnykh anizotropnykh poristykh sredakh* [Some problems on filtration and mass transfer in heterogeneous anisotropic porous environments], Preprint / SA of USSR. The Institute of Mathematics, Kiev, Ukraine.
6. Lavryk, V.I., Milutin, A.F. (1980), "Numerical-analytical solution of the boundary problems of the convection diffusion of convection salts, which lie down in filtration streams in the form of inclusions", *Mathematical methods of physical fields research*, pp. 3–10.
7. Vlasiuk, A.P., Stepanchenko, O.M. (2010), "Numerical solution of one saline inclusion dilution problem", *Mathematical and computer modelling*, no. 4, pp. 70–84.
8. Vlasiuk, A.P., Stepanchenko, O.M. (2013), "Mathematical modelling of dissolving of the saline inclusions in the base of the hydro technical building in non-isothermal conditions", *Modern problems of mathematical modeling and calculating methods*, p. 44.
9. Bažant, Z.P., Steffens, A. (2000), "Mathematical model for kinetics of alkali-silica reaction in concrete", *Cement and Concrete Research*, vol. 30, pp.419–428.
10. Nakarai, K., Ishida, T., Maekawa, K. (2006), "Multi-scale physicochemical modelling of soil-cementitious material interaction", *Soils and Foundations*, vol. 46(5), pp.653–664.

Стаття надійшла 28.10.2015.