УДК 519.85

СТОХАСТИЧНА ЗАДАЧА МАРШРУТИЗАЦІЇ ВИСОКОЇ РОЗМІРНОСТІ В УМОВАХ НЕТОЧНО ЗАДАНИХ ВИХІДНИХ ДАНИХ

Л. В. Сухомлин
Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського
вул. Першотравнева, 20, м. Кременчук, 39600, Україна. E-mail: larisavad@gmail.com

Для підвищення ефективності управлінських рішень, що приймаються менеджерами функціональних підрозділів промислових, автотранспортних підприємств при управлінні перевезеннями для максимального задоволення попиту споживачів наведено обчислювальну процедуру вирішення задачі комівояжера великої розмірності з використанням генетичного алгоритму. Для розв'язання задачі використано декомпозиційний алгоритм, що редукує вихідну складну задачу до послідовності істотно більш простих. Показано, що запропонована процедура забезпечує можливість вирішення задачі комівояжера високої розмірності. Розглянуто задачу стохастичної кластеризації об'єктів, відстані між якими – випадкові величини. Запропоновано ітераційну процедуру розв’язання задачі, а також процедуру розв’язання задачі комівояжера для випадку, коли відстані між пунктами – випадкові величини з відомою щільністю розподілу. Для вирішення запропоновано стохастичний аналог генетичного алгоритму розв'язання задачі комівояжера.

Ключові слова: управлінські рішення, задача маршрутизації, генетичний алгоритм, кластеризація, декомпозиція.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА МАРШРУТИЗАЦИИ ВЫСОКОЙ РАЗМЕРНОСТИ В УСЛОВИЯХ НЕТОЧНО ЗАДАННЫХ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Л. В. Сухомлин
Кременчугский национальный университет имени Михаила Остроградского
ул. Первомайская, 20, г. Кременчуг, 39600, Украина. E-mail: larisavad@gmail.com

Для повышения эффективности принимаемых управленческих решений менеджерами функциональных подразделений промышленных, автотранспортных предприятий по управлению перевозками для максимального удовлетворения спроса потребителей приведена вычислительная процедура решения задачи коммивояжера большой размерности с использованием генетического алгоритма. Для решения задачи использован декомпозиционный алгоритм, редуцирующий исходную сложную задачу к последовательности существенно более простых. Показано, что предложенная процедура обеспечивает возможность решения задачи коммивояжера высокой размерности. Рассмотрена задача стохастической кластеризации объектов, расстояния между которыми – случайные величины. Предложена итерационная процедура решения задачи, а также процедура решения задачи коммивояжера для случая, когда расстояния между пунктами – случайные величины с известными плотностями распределения. Для решения предложен стохастический аналог генетического алгоритма решения задачи коммивояжера.

Ключевые слова: управленческие решения, задача маршрутизации, генетический алгоритм, кластеризация, декомпозиция.

АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ. При побудові систем прийняття управлінських рішень менеджерами при організації транспортних потоків в умовах невизначеності [1] важливого значення набувають питання розробки принципів оптимізації, моделей та методів прийняття рішень. З точки зору управління організації процесу перевезень стохастична задача маршрутизації вважається однією з найбільш актуальних і водночас проблемних задач транспортної логістики. Слід зазначити, що відомі методи її розв’язання забезпечують отримання результату в прийнятний час тільки для задач невисокої розмірності (20–30 пунктів) [2–3], у той час як в реальних умовах організації управління постачанням промислової продукції ця розмірність на порядок-півтора вище. Для вирішення завдання маршрутизації такої розмірності потрібна розробка спеціальної методики. Складність завдання додатково зростає у зв'язку з необхідністю врахування випадкового попиту та вартостей перевезень продукції. Основний напрямок дослідження - вивчення можливості використання генетичних алгоритмів при організації управління транспортуванням продукції від підприємства-постачальника до багатьох споживачів [4–6].

Класична задача маршрутизації (комівояжера), як відомо, полягає у знаходженні замкнутого найкоротшого маршруту обходу без петель заданого числа пунктів. Формальна постановка задачі має вигляд: знайти булеву матрицю $X = \left(x_{ij}\right)$, що доставляє мінімум лінійній формі

$$L(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} ,$$

компоненти якої задовольняють обмеженням

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 ,\ j = 1,2,...,n ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 ,\ i = 1,2,...,n ,$$

$$u_i - u_j + n x_{ij} \le n-1 ,\ i = 1,2,...,n ,$$
$$j = 1,2,...,n .$$

де n – число пунктів, c_{ij} – відстань між пунктами (i, j), x_{ij} – індикатор, що дорівнює одиниці, якщо в маршруті маємо ланцюг, який безпосередньо об’єднує пункти (i, j), та дорівнює нулю в протилежному випадку.

Виконання наведених вище обмежень забезпечує отримання замкнутого маршруту без петель.

Це завдання належить до класу важких комбінаторних, так званих NP – повних задач. Відомі алгоритми вирішення цього завдання, наприклад, «гілок і меж» [3]. Проте ефективність цього алгоритму та багатьох інших [1, 6–8] незначна – успішне вирішення може бути отримано тільки для задач порівняно невеликої розмірності $(n < 20)$.

На практиці виникає необхідність вирішення цієї задачі набагато більш високої розмірності. Певний оптимізм викликає можливість використання для вирішення цього завдання генетичного алгоритму (ГА) [4–6]. У випадку, коли число пунктів не перевищує ста, генетичний алгоритм справляється із завданням відшукання найкоротшого маршруту. Однак, швидкість росту часу рішення задачі така, що для практично важливих випадків, коли число пунктів має порядок в кілька сотень, безпосереднє використання генетичного алгоритму стає неможливим. У зв'язку з цим розглянуто один з ефективних шляхів подолання «прокляття розмірності». З метою зниження тривалості розв'язання задачі та послаблення залежності цього часу від числа пунктів, досліджено можливість декомпозиції задачі [10]. Поставлено завдання розробки комплексної ієрархічної процедури, яка редуціює вихідну складну задачу до послідовності простіших. На рис. 3 продемонстровано випадкове розташування 50 пунктів-споживачів продукції, попит яких необхідно задовольнити, починаючи з першого і закінчуючи п'ятдесятим.

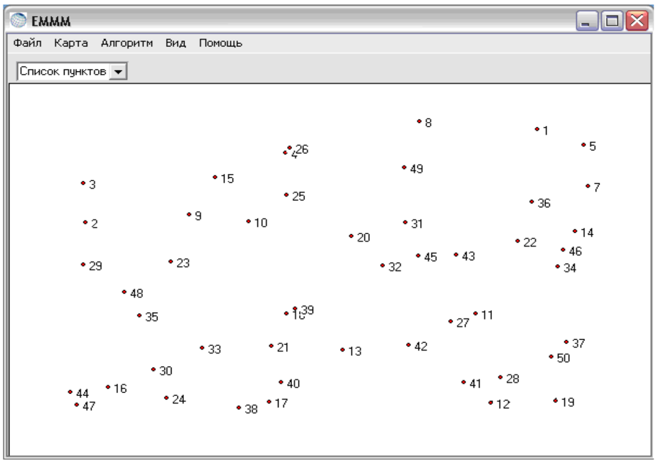

Рисунок 1 – Випадкове розташування 50 пунктів замовників

Для вирішення задачі пропонується наступна двоетапна процедура. На першому етапі вся безліч пунктів споживання розбивається на деяке число компактних груп шляхом вирішення задачі кластеризації [11–12].

Потім кожен з отриманих кластерів розглядається як точка, положення якої визначається центром ваги кластера. Для отриманої, таким чином, сукупності точок вирішується завдання комівояжера. У результаті першого етапу отриманий оптимальний маршрут обходу груп. На завершення цього етапу для кожного кластера відшукуються пункти входу та виходу, які є найближчими точками сусідніх кластерів.

На другому етапі ієрархічної процедури, використовуючи генетичний алгоритм, для кожної групи визначаємо найкоротший шлях, з урахуванням визначених на попередньому етапі пунктів початку та закінчення маршруту.

Об'єднуючи результати проведених етапів процедури, отримаємо оптимальний маршрут, який має вигляд, представлений на рис. 2.

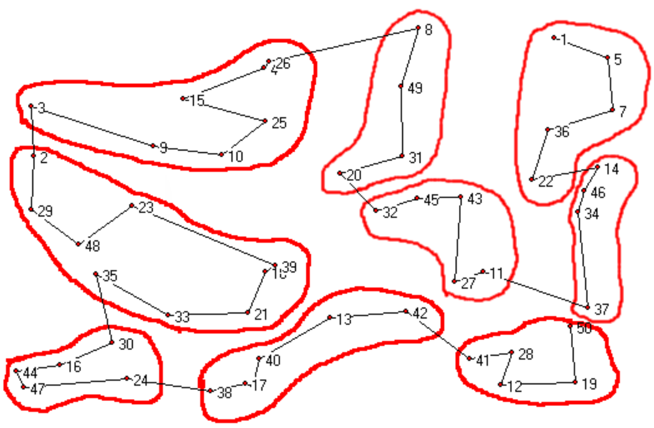

Рисунок 2 – Оптимальний маршрут

Визначення оптимального числа кластерів при організації цієї процедури є принципово необхідним питанням. Показано, що наближена оцінка цього числа визначається відповідним співвідношенням

$$x^* = n^{\frac{b}{2b-1}} \cdot \left(\frac{b-1}{b}\right)^{\frac{1}{2b-1}}.$$

Для $n = 50$, сформовано оптимальне число кластерів l

$$l = Ent\left[x^*\right] = Ent\left[50^{\frac{3.13}{5.26}} \cdot \left(\frac{2.13}{3.13}\right)^{\frac{1}{5.26}}\right] = 9.$$

При цьому отримання виграшу, що забезпечується процедурою декомпозиції, визначається як

$$\eta = n^{\frac{b(b-1)}{2b-1}} \Big/ \left(\frac{b-1}{b}\right)^{\frac{b}{2b-1}} \cdot \frac{2b-1}{b-1}.$$

Оскільки $b = 3{,}13$, то $\eta(n) \cong 0.46 \cdot n^{1.27}$.

Застосування кластеризації в генетичному алгоритмі дало можливість знизити тривалість пошуку оптимального маршруту для 50 пунктів с 230 одиниць до 1,73. Запропонована декомпозиційна процедура рішення задачі комівояжера високої розмірності істотно розширює можливості використання для вирішення цього завдання генетичних алгоритмів.

Мета роботи полягає в розробці принципу та методу вирішення задачі маршрутизації за схемою «від одного до багатьох» (задача комівояжера) високої розмірності з використанням генетичного алгоритму в умовах неточно заданих вихідних даних.

МАТЕРІАЛ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ. Нехай в задачі комівояжера задані щільності розподілу $\varphi_{ij}(R_{ij})$ випадкових значень «відстані» R_{ij} меж пунктами i і j, наприклад, у вигляді

$$\varphi_{ij}(R_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{ij}} \exp\left\{-\frac{(R_{ij}-m_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2}\right\},$$

$$i = 1,2,\dots,n,\ j = 1,2,\dots,n. \qquad (7)$$

З урахуванням стохастичної природи «відстаней» між пунктами введемо поняття «віддаленість одного пункту від іншого», яке кількісно оцінюване як ймовірність того, що випадкова «відстань» між пунктами виявиться більше деякого, певним чином обраного, порогового. При цьому будемо вважати, що віддаленість одного пункту від іншого тим більше, чим вище ця ймовірність. Відповідно до (7) віддаленість від пункту j до пункту i оцінюється за формулою

$$u_{ij} = \int_{R_l}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{ij}} \exp\left\{-\frac{(R_{ij}-m_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2}\right\} dR_{ij}, \qquad (8)$$

де R_l - певне обране порогове значення.

Зрозуміло, що введений показник може бути використаний для оцінки віддаленості не обов'язково суміжних на маршруті пунктів. З урахуванням цього показника сформулюємо задачу відшукання найкоротшого маршруту.

Вирішення задачі почато з кластеризації пунктів обходу з урахуванням їх віддаленості один від одного. Процедуру кластеризації описано спочатку для випадку, коли число кластерів p і центри групування задані (в якості кожного з центрів групування вибирається якийсь із пунктів). Процедура кластеризації є покроковою. Нехай до чергового $(l+1)$-му шагу l пунктів вже розподілені по кластерам, утворивши розбиття множини E всіх пунктів, які підлягають кластеризації, на дві підмножини: E_l^+ (розподілені) и E_l^- (не розподілені). Для кожного з підмножини E_l^- пункту $(n-p-l)$, що залишилися, наприклад, i-го, за формулою (8) розраховується віддаленість u_{ij} до кожного, наприклад, j-го центру групування. В наведеній формулі R_l – значення порогу, що розраховується до l-го шагу. Тепер на множині $\{u_{ij}\}$, $i \in E_l^+$, $j = 1,2,\dots,p$, вишукується пара (i_0, j_0) за правилом

$$(i_0, j_0) = \underset{\substack{i \in E_l^- \\ j}}{\arg\min}\{u_{ij}\}. \qquad (9)$$

При цьому пункт i_0 приєднується до кластера j_0 та розраховується нове значення порогу $R_{l+1} = m_{i_0 j_0}$. Крім того, коригується розбиття множини E на підмножини розподілених та нерозподілених пунктів:

$$E_{l+1}^+ = E_{l+1}^+ \cup i_0,\ E_{l+1}^- = E_{l+1}^- \setminus i_0.$$

Наступним шагом є повторення процедури до повного розподілу по кластерам.

У випадку, якщо центри групування точно не задані, то для обраного числа p кластерів відшукується p пунктів так, щоб мінімальна віддаленість між ними була максимальною.

В результаті розв'язання задачі кластеризації отримали p груп пунктів.

Приймемо E_k як множну номерів пунктів, які увійшли до k-й кластеру, $k = 1,2,\dots,p$. Далі в кожній групі розрахуємо положення центра ваги, використовуючи співвідношення

$$X_{ц.т.}^{(k)} = \frac{1}{n_k} \sum_{i \in E_k} x_{ki},\ Y_{ц.т.}^{(k)} = \frac{1}{n_k} \sum_{i \in E_k} y_{ki},$$

де x_{ki} - абсциса i-го пункту із k-й групи, y_{ki} - ордината i-го пункту із k-ої групи, n_k - число пунктів в k-ій групі.

Отримані координати p точок – центрів ваги кластерів використано з метою відшукування за допомогою звичайного ГА маршруту раціонального обходу цих кластерів. Після цього для кожної пари суміжних на отриманому маршруті кластерів знайдено найкоротшу відстань поєднання. З цією метою складено безліч пар пунктів, що належать різним кластерам із вибраної пари суміжних. Нехай n_1 – число пунктів першого з пари кластерів, а n_2 – число пунктів другого з них. За формулою (8) розрахуємо безліч значень $u_{i_1 i_2}$, $i_1 = 1,2,...,n_1$, $i_2 = 1,2,...,n_2$, з яких відшукаємо пару (i_{10}, i_{20}) найменш віддалених за правилом (9). При цьому в співвідношенні (8) в якості значення порога використовуємо половину відстані між центрами тяжіння вибраної пари кластерів. Припустили, що пункт i_{10} є пунктом виходу із першого кластера суміжної пари, а пункт i_{20} - пунктом входу до другої. Процедура повторюється для всіх суміжних пар кластерів.

Зміст наступного етапу загальної процедури полягає в тому, що в кожному кластері вирішується стохастична задача відшукання найкоротшого маршруту для заданих пунктів входу та виходу. З цією метою будуємо стохастичний аналог детермінованого генетичного алгоритму. Важливим елементом відповідної обчислювальної процедури є технологія розрахунку критерію якості осіб, які увійшли в популяцію, сформовану на черговому кроці ГА. Припустимо, що кластер містить S пунктів. Введемо індикатор

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо відповідний обраній особі маршрут пов'язує} \\ \quad \text{пункти } i \text{ и } j \text{ безпосередньо,} \\ 0 \quad \text{в іншому випадку, } \quad i = 1,2,...,s-1, \; j = 2,3,...,s. \end{cases}$$

У такому разі випадкова довжина маршруту, що з'єднує знайдені на попередньому етапі пункти входу та виходу розглянутого кластера, визначається співвідношенням

$$R_\Sigma = \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=2}^{s} R_{ij} w_{ij} .$$

С урахуванням (7) вважаємо, що щільність розподілу випадкової величини R_Σ матиме вигляд:

$$\varphi(R_\Sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\Sigma} \exp\left\{ -\frac{(R_\Sigma - m_\Sigma)^2}{2\sigma_\Sigma^2} \right\},$$

$$m_\Sigma = \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=2}^{s} m_{ij} w_{ij} , \; \sigma_\Sigma^2 = \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=2}^{s} \sigma_{ij}^2 w_{ij} .$$

При цьому ймовірність того, що випадкова величина R_Σ перевищить деякий поріг $R_П$, обчислюється за формулою:

$$P(R_\Sigma \ge R_П) = \int_{R_П}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\Sigma} \exp\left\{ -\frac{(R_\Sigma - m_\Sigma)^2}{2\sigma_\Sigma^2} \right\} dR_\Sigma = \int_{\frac{R_П - m_\Sigma}{\sigma_\Sigma}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du . \tag{10}$$

Поставимо тепер задачу відшукання маршруту $W = (w_{ij})$, який мінімізує (10). Зрозуміло, що ця задача еквівалентна максимізації

$$L(x) = \frac{R_П - m_\Sigma}{\sigma_\Sigma} = \frac{R_П - \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=2}^{s} m_{ij} w_{ij}}{\left(\sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=2}^{s} \sigma_{ij}^2 w_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}} . \tag{11}$$

В якості $R_П$ природно вибрати довжину найкоротшого маршруту, що зв'язує початкову та кінцеву точки кластера, що розраховується, з використанням звичайного ГА в припущенні, що відстані між пунктами детерміновані та визначаються набором $\{m_{ij}\}$.

Перетворимо вираз (11). Кількість ланцюгів у будь-якому зв'язному маршруті, що з'єднує s пунктів без петель, дорівнює $s-1$. Дійсно, оскільки необхідні умови, що визначають вимоги до маршруту, мають вигляд

$$\sum_{i=1}^{s-1} w_{ij} = 1 , \; j = 2,...,s ,$$

$$\sum_{j=2}^{s} w_{ij} = 1 , \; i = 1,2,...,s-1 ,$$

то

$$\sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=2}^{s} w_{ij} = s-1 .$$

Тоді

$$L(x) = \frac{\frac{R_П}{s-1} \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=2}^{s} w_{ij} - \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=2}^{s} m_{ij} w_{ij}}{\left(\sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=2}^{s} \sigma_{ij}^2 w_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=2}^{s} \left(\frac{R_П}{s-1} - w_{ij} \right) w_{ij}}{\left(\sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=2}^{s} \sigma_{ij}^2 w_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=2}^{s} r_{ij} w_{ij}}{\left(\sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=2}^{s} \sigma_{ij}^2 w_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}} \tag{12}$$

Отриманий вираз (12) для будь-якого припустимого маршруту визначає значення критерію його якості тим більше, чим менше ймовірність (10) перевищення довжиною цього маршруту заданого порогового значення.

У зв'язку з цим зрозуміло, що критерій (12) може бути використано при формуванні нової популяції ГА в результаті селекції після застосування стандартних процедур схрещування, мутації, рекомбінації. Описана модифікація ГА для кожного кластера забезпечує відшукання найкращого маршруту. Тепер, зв'язуючи індивідуальні маршрути кластерів «перемичками», знайденими раніше, одержимо шуканий маршрут, що є розв'язком задачі.

ВИСНОВКИ. Для підвищення ефективності управлінських рішень, що приймаються менеджерами функціональних підрозділів промислових, автотранспортних підприємств при управлінні перевезеннями для максимального задоволення попиту споживачів наведено обчислювальну процедуру вирішення задачі комівояжера великої розмірності з використанням генетичного алгоритму. Для розв'язання задачі використано декомпозиційний алгоритм, що редукує вихідну складну задачу до послідовності істотно більш простих. Показано, що запропонована процедура забезпечує можливість вирішення задачі комівояжера великої розмірності. Розглянуто задачу стохастичної кластеризації об'єктів, відстані між якими – випадкові величини. Запропоновано ітераційну процедуру розв'язання задачі. Запропонована процедура розв'язання задачі комівояжера для випадку, коли відстані між пунктами – випадкові величини з відомою щільністю розподілу. Для вирішення запропонований стохастичний аналог генетичного алгоритму розв'язання задачі комівояжера при управлінні транспортуванням продукції від підприємства-постачальника до багатьох споживачів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бачкір Л.В. Прийняття рішень щодо управління вантажопотоком в умовах невизначеності // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету імені Михайла Остроградського. – 2007. – ч. 2. – № 6 (47). – С. 50–52.
2. Flood M. M. The Traveling Salesman Problem.// Operations Research, 1958. № 6. - PP. 791-814.
3. Литтл Дж., Мурти К., Суини Д., Кэрел К. Алгоритм для решения задачи о коммивояжере.// Экономика и математические методы, 1965. - т. 1. - № 1 – С. 38-49.
4. Holland D. Adaptation in Natural and Artifical Systems. – N.Y.: MIT Press, 1992. - 340 c.
5. Лысенко Ю.Г., Иванов Н.Н., Минц А.Ю. Нейронные сети и генетические алгоритмы. – Донецк: Юго-Восток, 2003 – 230 с.
6. Goldberg D. Genethic Algorithms. – MA.: Addison Wesley, 1989. – 210 p.
7. Bock F. Mathematical Programming Solution of Traeling Salesman Examples. – N.Y.:McGqaw – Hill Book Co, 1963. - 386 p.
8. Groes G. Method for Solving Traveling Salesman Problem // Operations Research, 1958. - № 6. - PP. 791-814.
9. Dantzig G., Fulkerson D., Jonson S. Solution of a Large Scale Traveling Salesman Problem.// Operations Research, 1956. - № 24. - PP. 61-75.
10. Серая О. В., Зинченко И. В., Бачкир Л. В. Декомпозиционный генетический алгоритм решения задачи коммивояжера высокой размерности // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. – 2007. – №1. – С. 23-26.
11. Мандель Н.Д. Кластерный анализ. – М.: Финансы и статистика, 1988. – 176 с.
12. Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности / С.А. Айвазян, В.М. Бухштабер, И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 606 с.

STOCHASTIC ROUTING PROBLEM OF HIGH DIMENSION IN CONDITIONS INACCURATELY GIVEN BASIC DATA

L. Sukhomlyn

Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University

vul. Pershotravneva, 20, Kremenchuk, 39600, Ukraine. E-mail: larisavad@gmail.com

Purpose. The development of principles and methods for solving the problem of routing according to scheme «from one to many» (traveling salesman problem) of high dimension, using genetic algorithm in conditions of accurately defined initial data. **Methodology.** The paper contains the technique of the use of genetic algorithms to solve the traveling salesman problem on the basis of the solution decomposition procedure under the conditions of inaccurately defined initial data. **Results.** To improve the efficiency of management decisions by managers of functional departments of industrial, road transport companies to manage traffics at maximum satisfaction of consumers demand a computational procedure for solving the traveling salesman problem of large dimension with the use of genetic algorithm is shown. To solve the problem the use of decomposition algorithm of reducing the initial complex task to a sequence of substantially simpler ones is considered. It is shown that the proposed procedure allows solving the traveling salesman problem of higher dimension. A problem of stochastic clustering of objects, the distance between which presents random variables, is considered. An iterative procedure for solving the problem is offered. A procedure for solving the traveling salesman problem for the case when the distance between the points presents random variables with known density distribution is proposed. To solve this problem a stochastic analysis of genetic algorithm of solution of the traveling salesman problem in the management of the transportation of products from the plant supplier to many consumers is proposed. **Originality.** A method and information technology of using genetic algorithms for solving combinatorial problems of high dimensionality in a stochastic setting, reducing the dimension of the problem, are improved, which provides their practical application. **Practical value** of research results consists in the possibility of obtaining the optimal route for increase the efficiency management decisions organizing the transportation of products under the conditions of inaccurately defined initial data. Routing as an instrument of management allows successful integrate the processes of development of corporate, functional and innovative strategies.

Key words: management decisions, routing problem, genetic algorithm, clusterization, decomposition

REFERENCES

1. Bachkir, L. V. (2007), "Making decisions on goods traffic management in conditions of uncertainty", *Visnyk Kremenchutskoho derzhavnoho politekhnichnoho universytetu imeni Mykhayla Ostrohradskoho,*part 2 vol. 6, no. 47, pp. 50–52.

2. Flood, M.M. (1958), "The Traveling Salesman Problem", *Operations Research, no.* 6, pp.791–814.

3. Littl Dzh., Murti, K., Suini, D. and Kerel, K.(1965), "The algorithm for solving the traveling salesman problem", *Ekonomika i matematicheskie metody*, Vol. 1, no. 1, pp. 38–49.

4. Holland, D. (1992) *Adaptation in Natural and Artifical Systems*, MIT Press, N.Y., USA.

5. Lysenko, Yu.G., Ivanov, N.N. and Mints, A.Yu. (2003), *Neironnye seti i geneticheskie algoritmy* [Neural networks and genetic algorithms], South-East, Donetsk, Ukraine.

6. Goldberg, D. (1989), *Genetic Algorithms,* Addison Wesley, MA, USA.

7. Bock, F. (1963), *Mathematical Programming Solution of Traeling Salesman Examples*, Hill Book Co, McGqaw, N.Y. USA.

8. Groes, G. (1958), "Method for Solving Traveling Salesman Problem", *Operations Research*, no. 6, pp. 791–814.

9. Dantzig, G., Fulkerson, D. and Jonson, S. (1956) "Solution of a Large Scale Traveling Salesman Problem", *Operations Research*, no. 24, pp. 61–75.

10. Seraya, O.V., Zinchenko, I.V. and Bachkir, L.V. (2007), "Decomposition genetic algorithm for solving the traveling salesman problem of high dimensionality", *Informatsiyno-keruyuchi systemy na zaliznychnomu transporti*, no. 1, pp. 23–26.

11. Mandel, N.D. (1988), *Klasternyy analiz* [Cluster analysis], Finansy i statistika, Moscow, Russia.

12. Aivazyan, S.A., Bukhshtaber, V.M., Enyukov, I.S. and. Meshalkin, L.D (1989) Prikladnaya statistika. Klassifikatsiya i snizhenie razmernosti [Applied Statistics. Classification and dimension reduction], Finansy i statistika, Moscow, Russia.

Стаття надійшла 08.11.2015.