УДК 504.064.45

ІНТЕГРО-АПРОКСИМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ АНАЛІЗУ МОДЕЛЕЙ ЗАБРУДНЕННЯ ГРУНТОВИХ ВОД У СКЛАДНИХ ГІДРОГЕОЛОГІЧНИХ УМОВАХ

В. І. Біленко
Фізико-математичний інститут Національного педагогічного університету ім. Михайла Драгоманова
вул. Пирогова, 9, м. Київ, Україна. E-mail: bilenko@voliacable.com
В. П. Ляшенко, А. В. Пасенко
Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського
вул. Першотравнева, 20, м. Кременчук, 39600, Україна. E-mail: conon-v@yandex.ru, pasenko2000@ukr.net
О. Б. Стеля
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
просп. Глушкова, 4-д, м. Київ, 39600, Україна. E-mail: oleg.stelya@gmail.com
О. Б. Сьомик
Управління освіти виконкому Кременчуцької міської ради
вул. Карла Маркса, 3, м. Кременчук, 39600, Україна. E-mail: info@kr-osvita.gov.ua

Розроблено та обґрунтовано інтегро-апроксимаційний алгоритм аналізу і моделювання динамічних процесів у неоднорідних середовищах. Основна увага приділяється моделюванню потоку антропогенно забруднених ґрунтових вод у складних гідрогеологічних умовах. Математичними моделями таких процесів є нелінійні параболічні рівняння з розривними коефіцієнтами. Алгоритм розв’язку задач ґрунтується на апроксимаційному методі В.К. Дзядика розв’язування лінійних диференціальних та інтегральних рівнянь та узагальнює цей метод на параболічні рівняння з нелінійностями у вигляді поліномів. Одержано оцінки похибок наближених розв’язків у рівномірній та квадратичній метриках, а також метриці простору Соболєва. Показано, що переваги вказаних алгоритмів над існуючими полягають у властивостях ненасиченості та оптимальності у сенсі найкращих наближень. Для чисельної реалізації запропонованого алгоритму, у залежності від області, використовуються класичні ортогональні многочлени Чебишева, Лежандра, Якобі, Лаггера та ін. Алгоритми апробовані на тестовій задачі шляхом комп’ютерної реалізації, яка показала високу ефективність алгоритму як в сенсі точності, так і інформаційної складності. Проведено порівняльний аналіз одержаних результатів з іншими відомими сучасними алгоритмами.

Ключові слова: неоднорідне середовище, гідрогеологічні умови, математичні моделі, інтегро-апроксимаційні технології, соболєвська метрика, найкращі наближення.

ИНТЕГРО-АПРОКСИМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ АНАЛИЗА МОДЕЛЕЙ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ГРУНТОВЫХ ВОД В СЛОЖНЫХ ГИДРОГЕОЛОГИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ

В. И. Биленко
Физико-математический институт Национального педагогического университета им. Михаила Драгоманова
ул. Пирогова, 9, г. Киев, Украина. E-mail: bilenko@voliacable.com
В. П. Ляшенко, А. В. Пасенко
Кременчугский национальный университет имени Михаила Остроградского
ул. Первомайская, 20, г. Кременчуг, 39600, Украина. E-mail: conon-v@yandex.ru, pasenko2000@ukr.net
О. Б. Стеля
Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко
пр. Глушкова, 4-д, г. Киев, 39600, Украина. E-mail: oleg.stelya@gmail.com
Е. Б. Сёмик
Управление образования исполкома Кременчугского городского совета
ул. Карла Маркса, 3, г. Кременчуг, 39600, Украина. E-mail: info@kr-osvita.gov.ua

Предложен и обоснован интегро-апроксимационный алгоритм анализа и моделирования динамических процессов в неоднородных средах. Основное внимание уделяется моделированию потока антропогенно загрязненных грунтовых вод в сложных гидрогеологичеких условиях. Математическими моделями таких процессов являются нелинейные параболические уравнения с разрывными коэффициентами. Алгоритм базируется на апроксимационном методе В.К. Дзядика для решения линейных дифференциальных и интегральных уравнений и обобщает этот метод на параболические уравнения с полиномиальными нелинейностями. Полученные оценки отклонений приближенных решений в равномерной и квадратичной метриках, а также метрике пространства Соболева. Показано, что предложенные алгоритмы имеют преимущества перед существующими в том, что обладают такими двумя свойствами, как ненасыщенность и оптимальность в смысле наилучших приближений. Для численной реализации предложенного алгоритма в зависимости от области применяются классические ортогональные многочлены Чебишева, Лежандра, Якоби, Лаггера и др. Алгоритмы апробированы путем компьютерной реализации на тестовых задачах, которые показали высокую эффективность алгоритма как в смысле точности, так и информационной сложности. Проведен сравнительный анализ полученных результатов с другими известными современными алгоритмами.

Ключевые слова: неоднородная среда, гидрогеологические условия, математические модели, интегро-апроксимационные технологии, соболевская метрика, наилучшие приближения.

АКТУАЛЬНІСТЬ РОБОТИ. Оцінка стану ґрунтових вод у вертикальному перерізі товщі ґрунту є необхідним компонентом багатьох геотехнічних, гідрогеологічних та т.п. досліджень. Такі дослідження проводяться для аналізу стану різноманітних гідротехнічних об'єктів, до яких відносяться: фільтруючі дамби, земляні греблі, дренажні системи, зокрема, відкритого типу, для оцінки фільтраційних режимів поблизу каналів, водосховищ та відстійників різних типів. У такому випадку моделювання здійснюється одночасно в зонах повного і неповного насичення без їх явного виділення. Основними моделями є зв'язані двовимірні рівняння дифузії. Такі моделі дозволяють враховувати шаруватість ґрунтів (зокрема, наявність тонких слабкопроникних прошарків), перетік між шарами ґрунту, різноманітні гідрогеологічні умови, що змінюються у часі та просторі, точкові та розподілені джерела забруднення, складну форму границі області.

Актуальність теми роботи обумовлена зростаючими вимогами до математичного моделювання різноманітних динамічних процесів в неоднорідних середовищах. Основними вимогами до обчислювальних алгоритмів є порядок апроксимації, стійкість, та порядок збіжності [1–3, 16]. Крім того до основних вимог можна віднести точність побудови чисельних алгоритмів у вигляді явних та неявних різницевих схем, яка тісно пов'язана із порядком апроксимації та порядком збіжності різницевих схем.

У роботі основна увага приділяється підвищенню точності побудованих алгоритмів, їх оптимальності та ненасичуваності. Важливими властивостями та перевагами над іншими методами та алгоритмами [1, 2] є їх оптимальність в сенсі найкращих наближень і ненасиченість (алгоритм без насичення точності або алгоритм інтелектуального моделювання в термінах [4]). Це особливо важливо при необхідності уникнення явища вибуху похибок при розв'язуванні задач в неоднорідних середовищах на великих, та необмежених областях. У значній мірі цим вимогам задовольняє апроксимаційний метод В.К. Дзядика, що відображено в багатьох його роботах та роботах його учнів-послідовників у галузі обчислювальної та прикладної математики [5–11, 15–17].

Метою роботи є конструювання та теоретичне обґрунтування високоточних чисельно-аналітичних алгоритмів аналізу моделей нестаціонарного потоку ґрунтових вод у складних гідрогеологічних умовах шляхом розв'язування початково-крайових задач у неоднорідних середовищах.

МАТЕРІАЛ І РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ.

Постановка задачі та моделі.

За певних припущень стосовно гідрофізичних параметрів процесу, можна вважати, що коефіцієнти задачі

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(x,t)u + f(x,t,u), \qquad (1)$$

де $A(x,t)u = \sum_{i,k=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \left(a_k(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^{2} b_i(x,t,u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}$,

$a_k, b_i, f(x,t,u)$ – є кусково-поліноміальні функції відповідного числа змінних, $x(t) \in D\mathrm{x}[0,T]$.

Математичну модель нестаціонарної дифузії рідини в області $(x,t) \in Q_T$ розглянемо у вигляді початково-крайових задач для двомірних рівнянь параболічного типу

$$\frac{\partial \theta(x,t,u)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1(x,u)\frac{\partial \theta}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2(x,u)\frac{\partial \theta}{\partial x_2}\right) + f_1(x,u,t) \qquad (2)$$

де x_i, $i = 1,2$ – вертикальна та горизонтальна координати, $x = (x_1, x_2)$; t – час; $u(x,t)$ – гідравлічний напір; $f_1(x,u,t)$ – розподілені або зосереджені джерела чи стоки в області; $\theta(x,t,u)$ – об'ємна вологість ґрунту; $k_1(x,u)$, $k_2(x,u)$ – коефіцієнти вологопровідності у напрямі координатних осей.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_3(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_4(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + f_2(x,u,t), \qquad (3)$$

де $f_2(x,u,t)$, $k_3(x,u), k_4(x,u)$ – параметри аналогічного змісту, як і у рівнянні (1).

Рівняння (3) є рівняння нестаціонарної дифузії, що визначає зміну гідравлічного напору в області $(x,t) \in Q_T$.

Крайові умови $u(x,t) = \varphi_1(t)$,

$$\theta(x,t,u) = \varphi_2(t, \varphi_1(t)), \; x \in \Gamma \qquad (4)$$

Початкові умови $u(x,0) = \psi_1(x)$,.

$$\theta(x,t,u) = \psi_2(x, \psi_1(x)), \; x \in G \qquad (5)$$

де $G \in R^2$, – однозв'язна обмежена область, $I = [0,T]$, $Q_T = G \times I$; $\Gamma = \partial G \times I$.

Задача (2)–(5) враховує як зміни об'ємної вологості ненасиченої зони, так і фільтрацію у ній (для більшості випадків у насиченій зоні можна вважати функції $\theta(x,u)$ і $k_i(x,u)$, $i = 1 \div 4$ кусково-сталими) [7].

З метою запобігання громіздких викладок, розглянемо аналогічно [7] спрощену модель у вигляді початково-крайової задачі для параболічного рівняння в області $(x,t) \in Q_T$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x,t,u), \qquad (6)$$

де $x(t) \in D\mathrm{x}[0,T]$.

Крайові умови

$$u(x,t) = \varphi(x). \qquad (7)$$

Початкові умови

$$u(x,0)=\psi(x),\ x\in D. \tag{8}$$

Узагальненим розв'язком початково-крайової задачі (6)–(8) називається функція $u(x,t)\in H$, яка для кожного $\nu(x)\in H_0$ задовольняє наступним тотожностям:

$$\int_0^l \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \nu(x)}{\partial x}dx+\int_0^l k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \nu}{\partial x}dx+\frac{[u]\cdot[\nu]}{R_1+R_2}+$$
$$+\alpha\cdot u(l,t)\cdot\nu(l)=\int_0^l f(x,t,u)\cdot\nu(x)\cdot dx+$$
$$+\frac{R_2\cdot\delta-\Delta}{R_1+R_2}\cdot[\nu]-\delta\cdot\nu'+\beta\cdot\nu(l), \tag{9}$$

де $\forall t\in(0,T)$.

$$\int_0^l u(x,0)\cdot\nu(x)\cdot dx=\int_0^l u_0(x)\cdot\nu(x)dx. \tag{10}$$

$$H_0=\left\{\nu(x):\nu\in W_2^1(\Omega_i),i=1,2\right\},$$

де $W_2^1(\Omega_i)$ – простір функцій Соболєва, визначений на області Ω_i.

Алгоритм.

Запропонований алгоритм узагальнює алгоритми, що були побудовані у роботах [5–9, 18, 19].

Введемо наближений узагальнений розв'язок.

Розглянемо лінійну множину H_0 функцій $\nu(x)$ з базисом $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$. Наближений розв'язок шукаємо у вигляді

$$u_{mn}(x,t)=\sum_{i=0}^m\sum_{j=0}^n\alpha_i(t)\cdot\varphi_i(x)+\psi(x,t), \tag{11}$$

де ψ – деяка відома функції із H_0.

Наближеним узагальненим розв'язком початково-крайової задачі (6)–(8) називається функція $u_{mn}(x,t)$, яка для $\forall\nu(x)\in H_0$ задовольняє тотожностям

$$\int_0^l \frac{\partial u_{mn}}{\partial x}\frac{\nu(x)}{\partial x}dx+\int_0^l k(x,t)\frac{\partial u_{mn}}{\partial x}\frac{\partial \nu}{\partial x}dx+\frac{[u_{mn}]\cdot[\nu]}{R_1+R_2}+$$
$$+\alpha\cdot u_{mn}(l,t)\cdot\nu(l)=\int_0^l f(x,t,u)\nu(x)dx+$$
$$+\frac{R_2\cdot\delta-\Delta}{R_1+R_2}\cdot[\nu]-\delta\cdot\nu'+\beta\cdot\nu(l)+\varepsilon_{mn}(x,t), \tag{12}$$

де $\forall t\in(0,T)$.

$$\varepsilon_{mn}(x,t)=\sum_{(k,j)\in\Gamma}\delta_{kj}\tau_{kj}T_i\left(2\frac{x}{h}-1\right)T_j\left(2\frac{t}{T}-1\right), \tag{13}$$

де

1) $\delta_{00}=\frac{1}{4}$, $\delta_{0j}=\delta_{k0}=\frac{1}{2}$, якщо $k\geq 1$ і $j\geq 1$, та $\delta_{kj}=1$, якщо $kj>0$;

2) $T_i(s):=T_i(2s-1)$ – зміщені на $[0,1]$ многочлени Чебишева, а $T_i\left(2\frac{x}{h}-1\right)$ та $T_j\left(2\frac{t}{T}-1\right)$ – зміщені многочлени Чебишева, «пересаджені» відповідно на сегменти $[0,h]$ і $[0,T]$;

3) через $\Gamma(m,n,j_1,j_2)$ позначена у координатній площині XOY фігура, яка є різницею двох прямокутників: $\Gamma=[0,m+j_1]\text{x}[0,n+j_2]\setminus[0,m]\text{x}[0,n]$ $\Gamma\{(m+1,0),...,(m+j_1,0),...,(m+1,n),...$ $...,(m+j_1,n),(0,n+1),...,(m+j_1,n+1),...$ $...,(0,n+j_2),...,(m+j_1,n+j_2)\}$, та τ_{kj} – невідомі коефіцієнти.

Алгоритм побудови наближених розв'язків у вигляді многочленів $u_{mn}(x,t)$ операторного рівняння (12) подібний випадку звичайних лінійних диференціальних рівнянь з коефіцієнтами у вигляді многочленів (ЛДРМК). Він ґрунтується на апроксимаційному методі В.К. Дзядика та алгоритмах, розроблених і апробованих комп'ютерною реалізацією.

У рівняння (12) підставляємо значення $u_{mn}(x,t)$ та $\varepsilon_{mn}(x,t)$ у вигляді сум (11) і (13) з невизначеними коефіцієнтами c_{ij} і τ_{kl}. Потім, після виконання операцій множення та інтегрування, прирівнюємо коефіцієнти при однакових членах x^it^j і в отриманій, таким чином, системі лінійних рівнянь визначаємо усі невідомі коефіцієнти c_{ij} через τ_{kl}, а потім ці останні обчислюємо з отриманої для них системи лінійних рівнянь.

Теоретичне обґрунтування алгоритму.

Мають місце справедливі наступні твердження:

Теорема 1.

Існують скінчені числа $h_i^0\in(0,H_i]$, $i=1,2$ і $B=B(h_1^0,h_2^0)=const$ такі, що $\forall h_i\in(0,h_i^0]$ і довільних натуральних m і n таких, що

$$\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}<\frac{B}{h_1^0h_2^0},$$

справедливі твердження:

а) операторне рівняння (12) має розв'язок;

б) у прямокутнику $\pi=[0,h_1^0]\text{x}[0,h_2^0]$ мають місце оцінки

$$\left|u(x,t)-u_{mn}(x,t)\right|\leq A\sqrt{m+n}E_{m,n}(u)_{C(\pi)},$$
$$A=A(h_1^0,h_2^0)=const>0. \tag{14}$$

Теорема 2.

Якщо при деяких $h_i\in(0,H_i]$, $i=1,2$ і $m\geq m_1$, $n\geq n_1$ операторне рівняння (12) має розв'язок, то на $[0,h_1]\text{x}[0,h_2]$ при вказаних m і n справедливі оцінки:

а) $\| u(x,t) - u_{mn}(x,t) \| \le K \sum_{(k,l)\in r} \delta_{kl} |\tau_{kl}|$,

де $K = K(h_1, h_2) = const$;

б) $\overline{\lim_{m,n\to\infty}} \dfrac{\| u(x,y) - u_{mn}(x,y) \|_{L^2_{g(h_1,h_2)}}}{E^{h_1h_2}_{m,n}(u)_{L^2_g}} \le 2$;

в) $\overline{\lim_{m,n\to\infty}} \dfrac{\| u(x,y) - u_{mn}(x,y) \|_{L^2_{g(h_1,h_2)}}}{E^{h_1h_2}_{m,n}(u)_{L^2_g}} = 1$,

де $g(h_1, h_2)$ – чебишевська вага така, що

$$\| \varphi(x,t) \|_{L^2_{g(h_1h_2)}} := \left\{ \int_0^{h_1}\int_0^{h_2} \frac{\varphi^2(x,t)}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{h_1}-1\right)^2}\sqrt{1-\left(\frac{2t}{h_2}-1\right)^2}} \text{ x} \right.$$

$$\text{x } dxdt \Big\}^{\frac{1}{2}}.$$

Результати обчислювальних експериментів.

1. Нехай у області $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $(\Omega_1 = (-1,0), \Omega_2 = (0,1))$ задано рівняння параболічного типу (2), а на кінцях відрізка $[-1,1]$ задані умови Діріхле

$$u(-1,t) = e^{-1} + c^2,\quad u(1,t) = 5 + t^2,$$

де $k(x,t) = \begin{cases} 1, & x \in [-1,0] \\ 2, & x \in [0,1] \end{cases}$,

$$f(x,t) = \begin{cases} -e^x + 2t, & x \in [-1,0] \\ -40x^3 + 2t, & x \in [0,1],\ t \in [0,1] \end{cases}.$$

У точці $x = \psi = 0$ неоднорідні умови спряження мають вигляд (9), де $R_1 = 0,5$, $R_2 = 0,25$, $\Omega = 3$, $\delta = 0,5$.

Початкова умова має вигляд

$$u_0(x) = \begin{cases} e^x, & x \in [-1,0] \\ x^5 + 2x + 2, & x \in [0,1] \end{cases}.$$

Класичний точний розв'язок задачі, що розглядається, має вигляд

$$u(x,t) = \begin{cases} e^x + t^2, & x \in [-1,0] \\ x^5 + 2x + 2 + t^2, & x \in [0,1], t \in [0,1] \end{cases}.$$

Ця початково-крайова задача була розв'язана чисельно за допомогою запропонованого вище алгоритму.

Тут використані, для кожного $t \in [0,1]$, значення $h = 0,125$, $\tau = 0,1$. У роботі [7] використовувався метод кінцевих елементів та різницева схема Кранка-Ніколсона [12–14].

Відносна похибка на кожному часовому шарі не перевищувала 10^{-4} %, де u_T і u_n – відповідно точний і наближений розв'язок.

2. Розв'язується операторне рівняння при $m = n = 2$ на квадраті $D = [0,1/2]^2$. Знаходимо наближений поліноміальний розв'язок

$$u_{2,2}(x,t) = 0,000289 - 0,005290(x+t) -$$
$$-0,952230 x\cdot t + 0,518436(x^2 + t^2) - \| u(x,t) -$$
$$-u_{2,2}(x,t) \|_{C[D]} < 0,0043,$$

де $u(x,t) = csh(x-t) - 1$.

ВИСНОВКИ.

1. На основі апроксимаційного метода Дзядика В.К. сконструйовано та теоретично обґрунтовано високоточний алгоритм без насичення точності для аналізу моделей забруднення ґрунтових вод в складних гідрогеологічних умовах.
2. Доведені теореми про існування розв'язків відповідних задач на основі запропонованого алгоритму у рівномірній квадратичній та соболєвській метриках. Одержані оцінки похибок розв'язків в рівномірній і квадратичній метриках.
3. Проведені обчислювальні експерименти на тестових задачах, які добре проілюстрували теоретично прогнозовані властивості ненасичуваності та оптимальності в сенсі найкращих наближень побудованого алгоритму.
4. Дослідження були застосовані для побудови реальних математичних моделей забруднення ґрунтових вод в складних гідрогеологічних умовах акваторії Дніпровського басейну. Математична модель дозволить також визначити переважаючі напрями руху ґрунтових вод та об'єми можливого виносу забруднень із відстійників у р. Дніпро.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бабенко К.И. О явлении насыщения в численном анализе // Докл. АН СССР. – 1978. – Т. 241, № 3. – С. 505–508.
2. Гаврилюк И.П., Макаров В.Л. Сильно позитивные операторы и численные алгоритмы без насыщения точности. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 2004. – 500 с.
3. Самарский А.А., Вабишевич П.Н. Вычислительная теплопередача.– М.: Эдиториал УРСС, 2003 – 784 с.
4. Интеллектуальное моделирование физических проблем / С.Л. Гладкий, Н.А. Степанов, Л.Н. Ясницкий; под ред. Л.Н. Ясницкого. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная динамика», 2006. – 200 с.
5. Дзядык В.К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Наукова думка, 1988. – 387 с.
6. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – 2-е изд., испр.– М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 320 с.
7. Дейнека В.С., Сергієнко І.В. Аналіз багатокомпонентних розподілених систем та оптимальне керування. – К.: Наукова думка, 2007. – 794 с.

8. Стеля О.Б. Моделирующий комплекс для расчета потока грунтовых вод в сложных гидрогеологических условиях // Математическое моделирование. – 2011. – Т. 23, № 4, – С. 120–130.

9. Кусково-поліноміальні наближення розв'язків жорстких задач на основі апроксимаційного методу В.К. Дзядика / В.І. Біленко, А.І. Дерієнко, Н.Г. Кирилаха // Журн. обчисл. та приклад. математики. – 2013. – № 2. – С. 68–77.

10. Алгоритми без насичення точності для розрахунку потоку ґрунтових вод / В.І. Біленко, А.В. Пасенко, Л.І. Підоріна, О.Б. Стеля // Матеріали VIII міжнар. наук. конференції ім. акад. І. І. Ляшка «Обчислювальна та прикладна математика». – К.: КНУ ім. Т. Шевченка, 2015. – С. 24.

11. Інформаційно-математичне моделювання та прогнозування екологічного стану грунтових вод / В. І. Біленко, В. В. Воробйов, А. В. Пасенко, Л. І. Підоріна, О. Б. Стеля, О. Б. Сьомик, І. В. Шевченко // Техногенно-екологічна безпека та цивільний захист. – Київ-Кременчук : СП ТОВ Видавництво «Християнська зоря». – 2015. – Вип. 8. – С. 49–54.

12. Ляшенко В. П., Кобильська О. Б. Розв’язання однієї оберненої задачі Стефана // Вісник Львівського університету, Серія «Прикладна математика. Інформатика», 2009. – Вип. 15. – С. 251–257.

13. Lyashenko V., Hryhorova T. Generalized mathematical model of thermal diffusion in powder metallurgy. – AIP Conference Proceeding, 2014. – PP. 85–93.

14. Проектирование электромагнитных систем шкивных сепараторов. Часть 1. Постановка задачи. Решение уравнения магнитной цепи / В. М. Загирняк, В. М. Усатюк, А. П. Оксанич, В. П. Ляшенко, А. В. Никитина // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук: КрНУ, – 2015. – Вип. 2(91). Част. 1. – С. 35–42.

15. Линейные и квазинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

16. Richtmyer R.D. Difference methods for initial value problems, Intercience, New York; 1957. –377 p.

17. Васильков Ю. В., Василькова Н. Н. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании Васильков – Москва: Наука, 1999. – 256 с.

18. Bilenko V. I. Integro-approxmational method for the modelling of certain class of nonlinear dynamic object // Proc. of the int. SYMP. on Comp math. modelling and scientific computations/ – Sofia: Bulg. Acad. Sciences. – 1992 – PP. 146–158.

19. Bilenko V., Kirilaha N. Adaptive integro-polynomial method for solving of parabolic problems with algebraic-nonlinearities // Матеріали X міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука. – 13–15 травня 2004. – Київ.: Задруга. – С. 34.

INTEGRAL-APPROXIMATION TECHNOLOGIES OF THE ANALYSIS OF MODELS OF GROUNDWATER CONTAMINATION IN COMPLEX HYDROGEOLOGICAL CONDITIONS

V. Bilenko
Drahomanov National pedagogical University,the institute of physics and mathematics
vul. Pirogova, 9, Kyiv, 01030, Ukraine. E-mail: bilenko@voliacable.com
V. Lyashenko, A. Pasenko
Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University
vul. Pershotravneva, 20, Kremenchug, 39600, Ukraine. E-mail: conon-v@yandex.ru, pasenko2000@mail.ru
O. Stelya
Kyiv National Taras Shevchenko University
prosp. Glushkova, 4-D, Kyiv, 03187, Ukraine. E-mail: oleg.stelya@gmail.com
O. Syomik
Education department management of Kremenchug city council
vul. Karl Marxa, 3, Kremenchug, 39600, Ukraine. E-mail: info@kr-osvita.gov.ua

The author of the article developed and proved an integral-approximation algorithm for the analysis and modeling of dynamic processes in heterogeneous environments. The focus is made on the modeling of the flow of anthropogenically polluted groundwater under complex geological conditions. Mathematical models of these processes are non-linear parabolic equations with discontinuous coefficients. The algorithm for the solution of the problem is based on the approximation method of V. K. Dzyadyk that deals with the solution of differential and integral equations and generalizes this method for parabolic equations with nonlinearities in the form of polynomials. The author obtained estimations of errors of approximate solutions for quadratic and uniform metrics and space metric of Sobolev. It is shown that the advantages of these algorithms over the existing ones can be explained by the properties of unsaturation and the optimal in terms of the best approximations. For the numerical implementation of the algorithm, depending on the region, the author uses classical orthogonal polynomials of Chebyshev, Legendre, Jacobi, Laguerre, etc. The algorithms were tested on the test implementation tasks via computer realization, which showed high efficiency of the algorithm in terms of both accuracy and complexity of information. In addition, the author has done a comparative analysis of the results with other famous modern algorithms. References 19.

Key words: heterogeneous environment, hydrogeological conditions, mathematical models, integral-approximation technology, metric of Sobolev, best approximations.

REFERENCES

1. Babenko, K.I. (1978), "On the phenomenon of saturation in numerical analysis", *Report. USSR Academy of Sciences*, vol. 241, no. 3, pp. 505–508.

2. Gavrilyuk, I.P., Makarov, V.L., (2004), *Silno pozitivnyie operatoryi i chislennyie algoritmyi bez nasyischeniya tochnosti* [Strongly positive operators and numerical algorithms without saturation accuracy], Institute of Mathematics National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine.

3. Samarsky, A.A., Vasheabevih, P.N. (2003), *Vyichislitelnaya teploperedacha* [Computational heat transfer], Editorial URSS, Moscow, Russia.

4. Gladkiy, S.L., Stepanov, N.A., Yasnitsky, L.N. (2006), *Intellektualnoe modelirovanie fizicheskih problem* [Intelligent modeling of physical problems], Scient. center "Regular and chaotic dynamics", Moscow-Izhevsk, Russia.

5. Dzyadyk, V.K. (1988), *Approksimatsionnyie metodyi resheniya differentsialnyih i integralnyih uravneniy* [Approximate methods for solving differential and integral equations], Naukova Dumka, Kyiv, Ukraine.

6. Samarsky, A.A., Mikhailov, A.P. (2001), *Matematicheskoe modelirovanie: Idei. Metodyi. Primeryi.* [Mathematic modeling. Ideas. Methods. Examples], *Nauka*, PHISMATLIT, Moscow, Russia.

7. Deineka, V.S. and Sergienko, I.V. (2001), *AnalIz bagatokomponentnih rozpodIlenih sistem ta optimalne keruvannya* [Multicomponent analysis of distributed systems and optimal control], Naukova Dumka, Kyiv, Ukraine.

8. Stelya, O.B. (2011), "Modeling complex of calculation of groundwater flow in complicated hydrogeological conditions", *Mathematical modeling*, vol. 23, no. 4, pp.120–130.

9. Bilenko, V.I., Deriyenko, A.I. and Kirilakha, N.G. (2013), "Piece and polynomial approximating of solving rigid tasks on the basis of approximating method of V. Dzyaduk", *Journal of computation and applied mathematics*, no. 2, pp. 68–77.

10. Bilenko, V.I., Pasenko, A.V., Pidorina, L.I., Stelya, O.B. (2015), "Algorithms without saturation accuracy to calculate groundwater flow", *MaterIali VIII mIzhnar. nauk. konferentsIYi Im. akad. I. I. Lyashka «Obchislyuvalna ta prikladna matemati-ka»* [Materials VIII Intern. Science. Conference them. Acad. I. Lyashko "Computational and Applied Mathematics"], KNU Shevchenko, Kyiv, pp. 24.

11. Bilenko, V.I., Vorobyov, V.V., Pasenko, A.V., Pidorina, L.I., Stelya, O.B., Syomyk, O.B., Shevchenko, I.V. (2015), "Information and mathematic modeling and the broadcast of ecological state of underground waters", *Technogenic ecological safety and civil defence*, vol. 8, pp. 49–54.

12. Lyashenko, V.P., Kobylskaya, O.B. (2009), "Solved one inverse Stefan problem", *Bulletin of Lviv University, Series "Applied Mathematics. Informatics"*, vol 15, pp. 251–257.

13. Lyashenko, V.P., Hryhorova, T.A. (2014), "Generalized mathematical model of thermal diffusion in powder metallurgy", *AIP Conference Proceeding*, pp. 85–93.

14. Zagirnyak, V.M., Usatyuk, V.M., Oksanych, A.P., Lyashenko, V.P. and Nikitina, A.V. (2015), "The design of electromagnetic systems pulley separators. Part 1. Problem Statement. The solution of the equation of the magnetic circuit", *Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University*, vol. 2, no. 91, pp. 35–42.

15. Ladyzhenskaya, O.A., Solonnikov, V.A., Ural'tseva, N.N. (1967), *Lineynyie i kvazineynyie uravneniya parabolicheskogo tipa* [Linear and kvazineynye parabolic equation], Nauka, Moscow, Russia.

16. Richtmyer, R.D. (1957), *Kompyuternyie tehnologii vyichisleniy v matematicheskom modelirovanii* [Difference methods for initial value problems], Intercience, New York, USA.

17. Vasil'kov, Y.V., Vasil'kova, N.N. (1999), *Raschetyi kompyuternyih tehnologiy v matematicheskom modelirovanii* [Computer Technology calculations in mathematical modeling], Nauka, Moscow, Russia.

18. Bilenko, V.I. (1992), "Integro-approxmational method for the modelling of certain class of nonlinear dynamic object", *Proc. of the int. SYMP. on Comp math. modelling and scientific computations*, Bulg. Acad. Sciences, Sofia, pp. 146–158.

19. Bilenko, V.I. and Kirilakha, N.G. (2004), "Adaptive integro-polynomial method for solving of parabolic problems with algebraic-nonlinearities", *Materiali X mizhnarodnoyi naukovoyi konferentsiyi im. akad. M. Kravchuka* [Materials X Intern. Science. Conference them. Acad. M. Kravchuka], Zadruga, Kyiv, pp. 34.

Стаття надійшла 04.04.2016.