

УДК 536.2 (0.75)

ВЛИЯНИЕ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ И ЗОНАЛЬНОГО ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОГО ТЕПЛООБМЕНА НА ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ БЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА**Е. П. Зайцев**Кировоградская летная академия Национального авиационного университета
ул. Добровольского, 1, г. Кировоград, 25005, Украина. E-mail: zaytsev-knu@mail.ru

Рассмотрено решение краевой задачи нестационарной теплопроводности для сплошного изотропного термочувствительного цилиндра, подверженного воздействию зонального лучисто-конвективного теплообмена. На основе приближенного аналитического метода задача в дважды нелинейной постановке приводится к суперпозиции линеаризованных задач, решаемых с помощью интегральных преобразований с последующим их суммированием. На большом количестве числовых расчетов для тонких и массивных цилиндров, графически показаны осевые изменения относительной температуры в центре и поверхности цилиндра для различных значений критерия Фурье. Установлен диапазон изменения критерия Фурье, в котором качественно меняется влияние нелинейности 1-го рода и двойной нелинейности на характер распределения относительной температуры, для двух случаев ширины теплового воздействия.

Ключевые слова: теплопроводность, термочувствительность, суперпозиция, преобразования Гудмана и Кирхгофа, ряды Фурье.

ВПЛИВ ТЕРМОЧУТЛИВОСТІ І ЗОНАЛЬНОГО ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНОГО ТЕПЛООБМІНУ НА ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ НЕСКІНЧЕНОГО ЦИЛІНДРУ**Є. П. Зайцев**Кіровоградська льотна академія Національного авіаційного університету
вул. Добровольського, 1, м. Кіровоград, Україна, 25005. E-mail: zaytsev-knu@mail.ru

Розглянуто рішення крайової задачі нестационарної теплопровідності для суцільного ізотропного термочувствительного циліндра, з урахуванням впливу зонального променисто-конвективного теплообміну. На основі наближеного аналітичного методу, задача в двічі нелінійній постановці наводиться до суперпозиції лінеаризованих задач, які вирішуються за допомогою інтегральних перетворень з подальшим їх підсумовуванням. За допомогою великої кількості числових розрахунків для тонких і масивних циліндрів, графічно показані осьові зміни відносної температури в центрі і поверхні циліндра для різних значень критерію Фур'є. Встановлено діапазон зміни критерію Фур'є, в якому якісно змінюється вплив нелінійності 1-го роду і подвійної нелінійності на характер розподілу відносної температури, для двох випадків ширини теплового впливу.

Ключові слова: теплопровідність, термочутливість, суперпозиція, перетворення Гудмана і Кірхгофа, ряди Фур'є.

АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ. Решения задач теплопроводности представляют существенный теоретический и практический интерес в связи с повышением требований к точности определения температур и тепловых потоков, при расчетах многих технологических процессов, встречающихся в теплоэнергетике, машиностроении, металлургической теплотехнике, атомной энергетике, космической отрасли и. т. д. В связи с этим возрастает роль приближенных аналитических методов решения краевых задач нестационарной теплопроводности в дважды нелинейной постановке [1], что в ряде случаев позволяет представить решение в виде, удобном для оценки теплового режима твердого тела, выделения преобладающих факторов теплообмена и использования полученных решений для последующего расчета термонапряженного состояния тела. Различные типы нелинейностей учитывались при решении задач теплопроводности в работах [2–9], однако, среди них незначительная часть работ рассматривает задачи в дважды нелинейной постановке.

Актуальность поставленной задачи состоит в том, что вопросы нелинейной теплопроводности приобретают все большее значение в инженерных исследованиях, где элементы конструкций работают в широком диапазоне температур.

Целью исследования является установление количественного и качественного влияния двойной

нелинейности на характер распределения температурных полей в цилиндре при различных значениях критерия Фурье.

МАТЕРИАЛ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ. Рассмотрим сплошной изотропный бесконечный цилиндр радиуса R , имеющий нулевую начальную температуру, ось которого совмещена с осью цилиндрической системы координат (r, φ, z) . По боковой поверхности $(r = R)$ цилиндр осесимметрично и зонально подвергается воздействию лучисто-конвективного теплообмена от среды, с постоянной температурой T_c , двумя способами:

$$I. \psi_1(z, t) = T_c H(t) H(d - |z|); \quad H(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0, \\ 0, & \xi < 0, \end{cases}$$

$$II. \psi_2(z, t) = T_c H(t) \left\{ H(d - |z|) + \sum_{i=1}^N \left(H(g_i + d_i - |z|) - H(g_i - d_i - |z|) \right) \right\},$$

где H – функция Хевисайда по времени и по оси, d – половина длины центральной зоны, d_i – половина длины зоны, отстоящей от начала координат на расстоянии g_i .

Нестационарное температурное поле в цилиндре может быть определено из решения следующей краевой задачи, записанной в размерном виде:

$$\begin{aligned} \circ C_v(T)T_{,t} &= (\lambda(T)T_{,r})_{,r} + \lambda(T)T_{,r}/r + (\lambda(T)T_{,z})_{,z}; \\ (0 < r < R, \quad |z| < \infty, \quad t > 0) \\ T(r, z, t)|_{t=0} &= 0; \quad T_{,r}|_{r=0} = 0; \quad T_{,z}|_{z=0} = 0; \\ T, T_{,z} &\rightarrow 0, \quad |z| \rightarrow \infty; \quad \lambda(T)T_{,r}|_{r=R} = \\ &= (\alpha(\psi_i(z, t) - T) + \sigma_{\text{a}}(\psi_i^4(z, t) - T^4))|_{r=R}, (i = 1, 2) \bullet (1) \end{aligned}$$

где \circ и \bullet начало и конец группы соотношений; $\sigma_{\text{B}} = \varepsilon\sigma_0$ – приведенный коэффициент теплообмена излучением; ε – степень черноты; σ_0 – постоянная Стефана-Больцмана, [5, 67 · 10⁻⁸ W/(i² · C⁴)]; α – коэффициент теплоотдачи, [W/(i² · C)].

Преобразуем поставленную задачу (1) к следующему безразмерному виду относительно $\theta(\rho, \eta, Fo) = T(r, z, t)/T_c$:

$$\begin{aligned} \circ C_v^*(\theta)\theta_{,Fo} &= (\lambda^*(\theta)\theta_{,\rho})_{,\rho} + \lambda^*(\theta)\theta_{,\rho}/\rho + (\lambda^*(\theta)\theta_{,\eta})_{,\eta}, \\ (0 < \rho < 1, \quad |\eta| < \infty, \quad Fo > 0); \\ \theta(\rho, \eta, Fo)|_{Fo=0} &= 0; \quad \theta_{,\rho}|_{\rho=0} = 0; \quad \theta_{,\eta}|_{\eta=0} = 0; \\ \theta, \theta_{,\eta} &\rightarrow 0, \quad |\eta| \rightarrow \infty; \quad \lambda^*(\theta)\theta_{,\rho}|_{\rho=1} = \\ &= (Bi(\chi_i(\eta, Fo) - \theta) + Sk(\chi_i^4(\eta, Fo) - \theta^4))|_{\rho=1}, \bullet (2) \end{aligned}$$

где теплофизические характеристики материала представлены в виде произведения двух множителей $\lambda(T) = \lambda_0\lambda^*(\theta)$, $C_v(T) = C_{v0}C_v^*(\theta)$ из которых первый с индексом «нуль» имеет размерность и не изменяется, а второй, обозначенный звездочкой, безразмерный и является функцией относительной температуры θ ; $\rho = r/R$; $\eta = z/R$; $a = \lambda_0/C_{v0}$; $Fo = at/R^2$; $Bi = \alpha R/\lambda_0$; $Sk = \sigma_{\text{a}}RT_c^3/\lambda_0$; $\chi_i(\eta, Fo) = H(Fo)H(\beta - |\eta|)$; $\beta = d/R$; $\beta_i = d_i/R$;

$$\begin{aligned} \delta_i &= g_i/R; \quad \chi_2(\eta, Fo) = H(Fo)\{H(\beta - |\eta|) + \\ &+ \sum_{i=1}^N (H(\delta_i + \beta_i - |\eta|) - H(\delta_i - \beta_i - |\eta|))\}. \end{aligned}$$

Вводя в систему (2) преобразования Гудмэна и Кирхгофа [1]

$$A(\theta) = \int_0^\theta C_v^*(\theta')d\theta', \quad B(\theta) = \int_0^\theta \lambda^*(\theta')d\theta' \quad (3)$$

с помощью дифференциальных соотношений $A(\theta)_{,Fo} = C_v^*(\theta)\theta_{,Fo}$, $B(\theta)_{,\rho} = \lambda^*(\theta)\theta_{,\rho}$,

преобразуем (2) к следующему эквивалентному виду:

$$\begin{aligned} \circ A(\theta)_{,Fo} &= B(\theta)_{,\rho\rho} + \rho^{-1}B(\theta)_{,\rho} + B(\theta)_{,\eta\eta}; \\ \theta(\rho, Fo)|_{Fo=0} &= 0; \quad \theta_{,\rho}|_{\rho=0} = 0; \quad \theta_{,\eta}|_{\eta=0} = 0; \\ \theta, \theta_{,\eta} &\rightarrow 0, \quad |\eta| \rightarrow \infty; \quad (B(\theta)_{,\rho} + (Bi \cdot \theta + Sk \cdot \theta^4))|_{\rho=1} = \\ &= Bi \cdot \chi_i(\eta, Fo) + Sk \cdot \chi_i^4(\eta, Fo). \bullet (4) \end{aligned}$$

В полученной системе (4) функции (3) и $\theta^{(m)}$ ($m = \overline{1, 4}$) непрерывны и удовлетворяют условиям Дирихле [1; 10] на некотором априорно выбранном интервале $(0, \theta_p)$ (θ_p – пока неопределенная посто-

янная), а, следовательно, их можно представить в виде следующих сходящихся рядов Фурье по синусам:

$$\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(1)} \sin(k\pi\theta/\theta_p) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta^{(k)}; \quad (5)$$

$$(A(\theta), B(\theta), \theta^{(m)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{\alpha_k^{(1)}}, \frac{b_k}{\alpha_k^{(1)}}, \frac{\alpha_k^{(m)}}{\alpha_k^{(1)}} \right) \theta^{(k)} \quad (6)$$

где

$$(a_k, b_k, \alpha_k^{(m)}) = \frac{2}{\theta_i} \int_0^{\theta_i} (A(\theta), B(\theta), \theta^m) \sin \frac{k\pi\theta}{\theta_p} d\theta, \quad (7)$$

$$\circ \alpha_k^{(1)} = \frac{2\theta_p(-1)^{k+1}}{k\pi}, \quad \alpha_k^{(3)} = \frac{2\theta_p^3(-1)^{k+1}[(k\pi)^2 - 6]}{(k\pi)^3},$$

$$\alpha_k^{(2)} = \frac{2\theta_p^2\{(-1)^{k+1}(k\pi)^2 - 2[(-1)^{k+1} + 1]\}}{(k\pi)^3},$$

$$\alpha_k^{(4)} = \frac{2\theta_p^4\{(-1)^{k+1}[(k\pi)^4 - 12(k\pi)^2 + 24] + 24\}}{(k\pi)^5}. \bullet (8)$$

С учетом (5), (6) и разложения экспоненты e^x в ряд Маклорена при $x=1$, т. е. $1 = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-1}/(k-1)!$,

систему (4) перепишем в виде:

$$\begin{aligned} \circ \left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k/\alpha_k^{(1)})\theta^{(k)} \right)_{,Fo} &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} (b_k/\alpha_k^{(1)})\theta^{(k)} \right)_{,\rho\rho} + \\ &+ \rho^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (b_k/\alpha_k^{(1)})\theta^{(k)} \right)_{,\rho} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (b_k/\alpha_k^{(1)})\theta^{(k)} \right)_{,\eta\eta}; \\ \sum_{k=1}^{\infty} \theta^{(k)}|_{Fo=0} &= 0; \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} \theta^{(k)} \right)_{,\rho}|_{\rho=0} = 0; \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} \theta^{(k)} \right)_{,\eta}|_{\eta=0} = 0; \\ \sum_{k=1}^{\infty} \theta^{(k)}, \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} \theta^{(k)} \right)_{,\eta} &\rightarrow 0, \quad |\eta| \rightarrow \infty; \\ \left\{ \left(\sum_{k=1}^{\infty} (b_k/\alpha_k^{(1)})\theta^{(k)} \right)_{,\rho} + Bi \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \theta^{(k)} + Sk \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^{(4)}/\alpha_k^{(1)})\theta^{(k)} \right\}_{\rho=1} &= \\ = (Bi \cdot \chi_i(\eta, Fo) + Sk \cdot \chi_i^4(\eta, Fo)) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-1}/(k-1)!. \bullet (9) \end{aligned}$$

Согласно обобщенному принципу суперпозиции [1; 10], решение общей краевой задачи можно представить в виде совокупности следующих линейризованных задач теплопроводности относительно $\theta^{(k)}$:

$$\begin{aligned} \circ \theta^{(k)}_{,Fo_k} &= \theta^{(k)}_{,\rho\rho} + \rho^{-1}\theta^{(k)}_{,\rho} + \theta^{(k)}_{,\eta\eta}; \quad \theta^{(k)}(\rho, \eta, Fo_k)|_{Fo_k=0} = 0; \\ \theta^{(k)}|_{\rho=0} &= 0; \quad \theta^{(k)}|_{\eta=0} = 0; \quad \theta^{(k)}, \theta^{(k)}_{,\eta} \rightarrow 0, \quad |\eta| \rightarrow \infty; \\ (\theta^{(k)} + Bi_k \theta^{(k)})|_{\rho=1} &= M_k, \quad (k = 1, 2, \dots), \bullet (10) \end{aligned}$$

где

$$\circ Fo_k = \alpha_k Fo, \quad \alpha_k = b_k/a_k,$$

$$\begin{aligned} M_k &= (Bi \cdot \chi_i(\eta, Fo) + Sk \cdot \chi_i^4(\eta, Fo)) \alpha_k^{(1)} / (e \cdot b_k \cdot (k-1)!), \\ Bi_k &= (Bi \cdot \alpha_k^{(1)} + Sk \cdot \alpha_k^{(4)}) / b_k, \quad (k = 1, 2, \dots). \bullet (11) \end{aligned}$$

Вначале применим к системе (10) косинус-преобразование Фурье по переменной η [11]

$$\bar{\theta}^{(k)}(\rho, p, Fo_k) = \int_0^{\infty} \theta^{(k)}(\rho, \eta, Fo_k) \cdot \cos p\eta d\eta. \quad (12)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \circ \quad & \bar{\theta}_{,F\alpha_k}^{(k)} = \bar{\theta}_{,p\rho}^{(k)} + \rho^{-1}\bar{\theta}_{,\rho}^{(k)} - p^2\bar{\theta}^{(k)}; \quad \bar{\theta}^{(k)}|_{F\alpha_k=0} = 0; \\ & \bar{\theta}_{,\rho}^{(k)}|_{\rho=0} = 0; \quad (\bar{\theta}_{,\rho}^{(k)} + Bi_k\bar{\theta}^{(k)})|_{\rho=1} = \bar{M}_k, \\ & (k=1,2,\dots). \end{aligned} \quad \bullet \quad (13)$$

Применяя к (13) преобразование Лапласа [11]

$$\tilde{\theta}^{(k)}(\rho, p, s_k) = \int_0^\infty \bar{\theta}^{(k)}(\rho, p, F\alpha_k) \cdot e^{-s_k F\alpha_k} dF\alpha_k, \quad (14)$$

получим следующую краевую задачу с обыкновенным модифицированным дифференциальным уравнением Бесселя:

$$\begin{aligned} \circ \quad & \frac{d^2\tilde{\theta}^{(k)}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\tilde{\theta}^{(k)}}{d\rho} - (p^2 + s_k) \cdot \tilde{\theta}^{(k)} = 0; \\ & \left. \frac{d\tilde{\theta}^{(k)}(\rho, p, s_k)}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 0; \end{aligned}$$

$$\left\{ \frac{d\tilde{\theta}^{(k)}(\rho, p, s_k)}{d\rho} + Bi_k \cdot \tilde{\theta}^{(k)}(\rho, p, s_k) \right\}_{\rho=1} = \tilde{M}_k, \quad \bullet \quad (15)$$

Выполним преобразования (12) и (14) над выражением M_k , с учетом функций I и II и обозначения

$$D_k = (Bi + Sk)\alpha_k^{(1)} / (e \cdot b_k \cdot (k-1)!):$$

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \bar{M}_k = D_k \cdot H(F\alpha) \cdot \sin p\beta / p, \\ & \tilde{M}_k = D_k \cdot \sin p\beta / (s_k \cdot p); \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \text{II.} \quad & \bar{M}_k = D_k H(F\alpha) \left\{ \int_0^\beta \cos p\eta d\eta + \sum_{i=1}^N \int_{\delta_i - \beta_i}^{\delta_i + \beta_i} \cos p\eta d\eta \right\} = \\ & = \frac{D_k H(F\alpha) \left(\sin p\beta + 2 \sum_{i=1}^N \sin p\beta_i \cdot \cos p\delta_i \right)}{p}, \\ & \tilde{M}_k = \frac{D_k \left(\sin p\beta + 2 \sum_{i=1}^N \sin p\beta_i \cdot \cos p\delta_i \right)}{s_k \cdot p}. \end{aligned} \quad (17)$$

В частности, если $N=1$, то формула (17) при $\beta_1 = \beta$ и $\delta_1 = \delta$ имеет вид

$$\tilde{M}_k = \frac{D_k (\sin p\beta + 2 \sin p\beta \cdot \cos p\delta)}{s_k \cdot p}. \quad (18)$$

Общее решение уравнения (15) будет таким [11]:

$$\tilde{\theta}^{(k)} = C_1 I_0(\rho\sqrt{p^2 + s_k}) + C_2 K_0(\rho\sqrt{p^2 + s_k}), \quad (19)$$

где I_0, K_0 – модифицированные функции Бесселя нулевого порядка, первого и второго рода соответственно. С учетом граничного условия (15), в (19)

$$C_2 = 0, \text{ так как } K_0(\rho\sqrt{p^2 + s_k}) \rightarrow \infty \text{ при } \rho \rightarrow 0.$$

Следовательно,

$$\tilde{\theta}^{(k)}(\rho, p, s_k) = C_1 I_0(\rho\sqrt{p^2 + s_k}). \quad (20)$$

Постоянную C_1 найдем из второго граничного условия (15). С учетом обозначения $\gamma_k = \sqrt{p^2 + s_k}$ и равенства $I_0'(\rho\gamma_k) = \gamma_k I_1(\rho\gamma_k)$, получим

$$C_1 = \tilde{M}_k / (\gamma_k I_1(\gamma_k) + Bi_k I_0(\gamma_k)).$$

Подставляя C_1 в (20), имеем

$$\tilde{\theta}^{(k)} = \tilde{M}_k \cdot I_0(\rho\gamma_k) / (\gamma_k I_1(\gamma_k) + Bi_k I_0(\gamma_k)), \quad (21)$$

где \tilde{M}_k определяется по одной из формул (16), (17)

или (18). Пусть вначале \tilde{M}_k определяется по формуле (16). Тогда (21) можно записать

$$\tilde{\theta}^{(k)} = D_k \cdot \frac{\sin p\beta}{p} \cdot \frac{I_0(\rho\gamma_k)}{s_k (\gamma_k I_1(\gamma_k) + Bi_k I_0(\gamma_k))}, \quad (22)$$

Так как вторая дробь (22) является отношением двух обобщенных полиномов относительно s_k

$\hat{O}(s_k) = I_0(\rho\gamma_k)$, $\psi(s_k) = s_k (\gamma_k I_1(\gamma_k) + Bi_k I_0(\gamma_k))$, причем полином знаменателя не содержит постоянной, то для ее перехода от изображения к оригиналу можно воспользоваться теоремой разложения

$$L^{-1} \left[\frac{\hat{O}(s_k)}{\psi(s_k)} \right] = \frac{\hat{O}(0)}{\psi'(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{O}(s_{kn})}{\psi'(s_{kn})} e^{s_{kn} F\alpha_k}. \quad (23)$$

Для этого, найдем корни $\psi(s_k) = s_k \varphi(s_k) = 0$, где

$$\varphi(s_k) = \gamma_k I_1(\gamma_k) + Bi_k I_0(\gamma_k).$$

Первый корень $s_{k0} = 0$, а бесконечное множество других корней, определяются из трансцендентного уравнения $\gamma_k I_1(\gamma_k) + Bi_k I_0(\gamma_k) = 0$. Осуществим переход в этом уравнении к функциям Бесселя первого рода, используя известные соотношения

$$I_0(\gamma_k) = J_0(i\gamma_k) = J_0(\mu_k), \quad \mu_k = i\gamma_k,$$

$$I_1(\gamma_k) = -iJ_1(i\gamma_k) = -iJ_1(\mu_k), \quad \mu_k = i\sqrt{p^2 + s_k},$$

$$s_k = -(p^2 + \mu_k^2).$$

Имеем характеристическое уравнение

$$\mu_k J_1(\mu_k) - Bi_k J_0(\mu_k) = 0, \quad (24)$$

из которого определяются корни μ_{kn} , $n=1,2,\dots$

Найдем величины правой части (23). Имеем

$$\hat{O}(0) = I_0(p\rho), \quad \psi'(s_k) = \varphi(s_k) + s_k \cdot \varphi'(s_k),$$

$$\psi'(0) = \varphi(0) = pI_1(p) + Bi_k I_0(p),$$

$$\hat{O}(s_{kn}) = J_0(\mu_{kn}\rho), \quad \psi'(s_{kn}) = s_{kn} \varphi'(s_{kn}) =$$

$$= s_{kn} \left\{ \frac{1}{2} J_0(\mu_{kn}) + Bi_k \frac{1}{2\mu_{kn}} J_1(\mu_{kn}) \right\}.$$

С учетом равенства $J_1(\mu_{kn}) = Bi_k J_0(\mu_{kn}) / \mu_{kn}$, полученного из характеристического уравнения (24), выражение $\psi'(s_{kn})$ имеет вид

$$\psi'(s_{kn}) = -(\mu_{kn}^2 + p^2)(\mu_{kn}^2 + Bi_k^2) J_0(\mu_{kn}) / (2\mu_{kn}^2).$$

Подставляя найденные выражения в (23), получим

$$L^{-1} \left[\frac{\hat{O}(s_k)}{\psi(s_k)} \right] = \frac{I_0(p\rho)}{pI_1(p) + Bi_k I_0(p)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\mu_{kn}^2 J_0(\mu_{kn}\rho)}{(\mu_{kn}^2 + p^2)(\mu_{kn}^2 + Bi_k^2) J_0(\mu_{kn})} e^{-(\mu_{kn}^2 + p^2)Fo_k}. \quad (25)$$

Вводя обозначения $U(p) = pI_1(p) + Bi_k I_0(p)$,

$$A_{kn} = \frac{2\mu_{kn}^2}{(\mu_{kn}^2 + Bi_k^2) J_0(\mu_{kn})}, \quad (25) \text{ можно переписать}$$

$$L^{-1} \left[\frac{\hat{O}(s_k)}{\psi(s_k)} \right] = \frac{I_0(p\rho)}{U(p)} - \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} \frac{J_0(\mu_{kn}\rho)}{(\mu_{kn}^2 + p^2)} e^{-(\mu_{kn}^2 + p^2)Fo_k}.$$

Таким образом, после применения к (22) обратного преобразования Лапласа, получим

$$\bar{\theta}^{(k)}(\rho, p, Fo_k) = D_k \frac{\sin p\beta}{p} \left\{ \frac{I_0(p\rho)}{U(p)} - \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} \frac{J_0(\mu_{kn}\rho)}{(\mu_{kn}^2 + p^2)} e^{-(\mu_{kn}^2 + p^2)Fo_k} \right\}. \quad (26)$$

Применяя к (26) обратное косинус-преобразование Фурье

$$\theta^{(k)}(\rho, \eta, Fo_k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{\theta}^{(k)}(\rho, p, Fo_k) \cos p\eta \, dp, \text{ получим}$$

$$\theta^{(k)}(\rho, \eta, Fo_k) = \frac{2}{\pi} D_k \int_0^{\infty} \frac{\sin p\beta \cdot \cos p\eta}{p} \left\{ \frac{I_0(p\rho)}{U(p)} - \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} \frac{J_0(\mu_{kn}\rho)}{(\mu_{kn}^2 + p^2)} e^{-(\mu_{kn}^2 + p^2)Fo_k} \right\} dp. \quad (27)$$

Для случая II теплового воздействия, решение системы (10) имеет вид

$$\theta^{(k)} = \frac{2}{\pi} D_k \int_0^{\infty} \left(\sin p\beta + 2 \sum_{i=1}^N \sin p\beta_i \cdot \cos p\delta_i \right) p^{-1} \cos p\eta \times \left\{ \frac{I_0(p\rho)}{U(p)} - \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} \frac{J_0(\mu_{kn}\rho)}{(\mu_{kn}^2 + p^2)} e^{-(\mu_{kn}^2 + p^2)Fo_k} \right\} dp. \quad (28)$$

Для случая II теплового воздействия, когда $N = 1$, формула (28) принимает вид

$$\theta^{(k)} = \frac{2}{\pi} D_k \int_0^{\infty} (\sin p\beta + 2 \sin p\beta \cdot \cos p\delta) p^{-1} \cos p\eta \times \left\{ \frac{I_0(p\rho)}{U(p)} - \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} \frac{J_0(\mu_{kn}\rho)}{(\mu_{kn}^2 + p^2)} e^{-(\mu_{kn}^2 + p^2)Fo_k} \right\} dp. \quad (29)$$

Суммируя (27), (28) и (29) по k , согласно (5), окончательно получим приближенное аналитическое решение (2) в безразмерном виде:

$$\theta(\rho, \eta, Fo) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} D_k \int_0^{\infty} \frac{\sin p\beta \cdot \cos p\eta}{p} \left\{ \frac{I_0(p\rho)}{U(p)} - \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} \frac{J_0(\mu_{kn}\rho)}{(\mu_{kn}^2 + p^2)} e^{-(\mu_{kn}^2 + p^2)Fo_k} \right\} dp = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} D_k \int_0^{\infty} \frac{\sin p\beta \cdot \cos p\eta}{p} \frac{I_0(p\rho)}{U(p)} dp -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} J_0(\mu_{kn}\rho) \int_0^{\infty} \frac{\sin p\beta \cos p\eta}{p} \frac{e^{-(\mu_{kn}^2 + p^2)Fo_k}}{(\mu_{kn}^2 + p^2)} dp \Bigg\}; \quad (30)$$

$$\theta = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} D_k \int_0^{\infty} \left(\sin p\beta + 2 \sum_{i=1}^N \sin p\beta_i \cos p\delta_i \right) p^{-1} \cos p\eta \times \left\{ \frac{I_0(p\rho)}{U(p)} - \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} \frac{J_0(\mu_{kn}\rho)}{(\mu_{kn}^2 + p^2)} e^{-(\mu_{kn}^2 + p^2)Fo_k} \right\} dp; \quad (31)$$

$$\theta = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} D_k \int_0^{\infty} (\sin p\beta + 2 \sin p\beta \cdot \cos p\delta) p^{-1} \cos p\eta \times \left\{ \frac{I_0(p\rho)}{U(p)} - \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} \frac{J_0(\mu_{kn}\rho)}{(\mu_{kn}^2 + p^2)} e^{-(\mu_{kn}^2 + p^2)Fo_k} \right\} dp = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} D_k \int_0^{\infty} \frac{\sin p\beta \cdot \cos p\eta}{p} \frac{I_0(p\rho)}{U(p)} dp + 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin p\beta \cos p\delta \cos p\eta}{p} \frac{I_0(p\rho)}{U(p)} dp - \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} J_0(\mu_{kn}\rho) \int_0^{\infty} \frac{\sin p\beta \cos p\eta}{p} \frac{e^{-(\mu_{kn}^2 + p^2)Fo_k}}{(\mu_{kn}^2 + p^2)} dp - 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} J_0(\mu_{kn}\rho) \int_0^{\infty} \frac{\sin p\beta \cos p\delta \cos p\eta}{p} \frac{e^{-(\mu_{kn}^2 + p^2)Fo_k}}{(\mu_{kn}^2 + p^2)} dp \Bigg\}. \quad (32)$$

Значение θ_p определяется из условия, что относительная температура цилиндра, полученная из решения задачи, при заданных значениях ρ , η и $Fo \rightarrow \infty$, принимает значение θ_p . Поэтому θ_p определяется из уравнений

$$\theta_p = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} D_k \int_0^{\infty} \frac{\sin p\beta \cdot \cos p\eta}{p} \frac{I_0(p\rho)}{U(p)} dp; \quad (33)$$

$$\theta_p = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} D_k \int_0^{\infty} \frac{\sin p\beta \cdot \cos p\eta}{p} \frac{I_0(p\rho)}{U(p)} dp + 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin p\beta \cos p\delta \cos p\eta}{p} \frac{I_0(p\rho)}{U(p)} dp \Bigg\}. \quad (34)$$

В дальнейшем числовые расчеты проделаны для решений (30) и (32) в среде MATLAB [12]. Эти уравнения решаются методом итераций с точностью $\Delta = 10^{-6}$. Все интегралы в формулах (30) и (32) вычисляются по численному методу Лобатто, причем слабо сходящиеся интегралы

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin p\beta \cdot \cos p\eta}{p} \frac{I_0(p\rho)}{U(p)} dp, \int_0^{\infty} \frac{\sin p\beta \cos p\delta \cos p\eta}{p} \frac{I_0(p\rho)}{U(p)} dp,$$

вычисляются с помощью удвоения отрезка интегрирования до тех пор, пока разность последующего и предыдущего значений интеграла по абсолютной величине будет меньше $\Delta = 10^{-4}$.

Результаты вычислений по определению температурного поля цилиндра, изготовленного из низкоуглеродистой стали, проанализированы для случаев I и II ($N=1$), с такими зависимостями теплофизических характеристик материала от температуры и значениями входных числовых параметров:

$$\lambda(T) = \lambda_0 - \delta_2 T = 50,24 - 0,0293 \cdot T, \quad W / (\dot{i} \cdot C);$$

$$C_v(T) = C_{v0} + \delta_c T = 3392840 + 3882,8T;$$

$$R = 0,1 \dot{i}; \quad \beta = 0,5; \quad \delta = 1,5; \quad \varepsilon = 0,8.$$

Было выбрано два максимальных значения коэффициента теплоотдачи в газах: $\alpha = 30$ для свободной конвекции; $\alpha = 500$ для вынужденной конвекции, а также два значения температуры среды $T_c = 1100^\circ C$ и $T_c = 1420^\circ C$. Для расчета изменения относительной температуры во времени, было выбрано три значения времени $t = 67,522; 675,22; 6752,2$ с., что соответствует трем значения критерия Фурье $Fo = 0,1; 1; 10$.

На приведенных ниже графиках введены такие обозначения для параметров и линий: $\theta \div TET$; $\rho \div Ro$; $\eta \div eta$; сплошная обозначает решение с двойной нелинейностью; штрихпунктирная – нелинейность 1-го рода; пунктирная – линейное решение.

На рис. 1 для одной центральной зоны нагрева ($\beta = 0,5$), показаны временные зависимости ($Fo = 0,1; 1; 10$) относительной температуры по длине, в центре и поверхности цилиндра, для малых значений критериев Био и Старка, что соответствует тонким телам. Для больших значений критериев Био и Старка, что соответствует массивным телам, при тех же исходных данных, зависимости относительной температуры показаны на рис. 2.

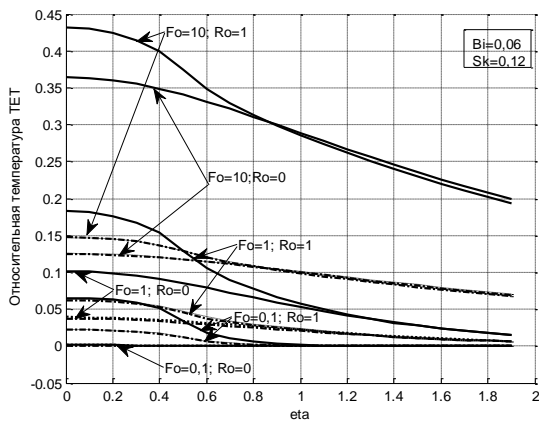


Рисунок 1 – Зависимость относительной температуры по длине и времени, в центре и поверхности цилиндра при значениях $T_c = 1100^\circ C$, $\alpha = 30$

На рис. 1 видно, что нелинейность 1-го рода не оказывает влияние на распределение относительной температуры по сравнению с линейным решением как в центре так и поверхности цилиндра. Однако двойная нелинейность оказывает существенное влияние, которое увеличивается с увеличением критерия Фурье и достигает максимального значения в центре теплового воздействия. При выходе из зоны нагрева влияние двойной нелинейности также существенно по сравнению с линейным решением.

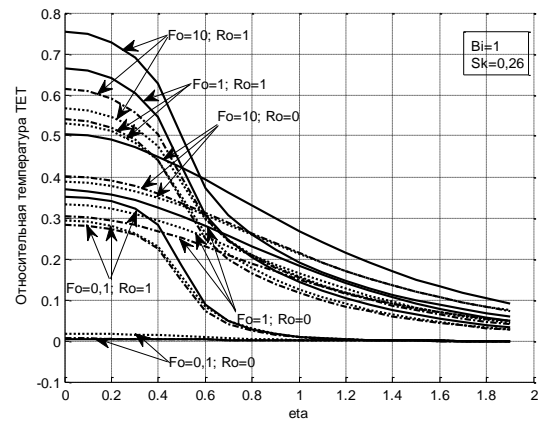


Рисунок 2 – Зависимость относительной температуры по длине и времени, в центре и поверхности цилиндра при значениях

$$T_c = 1420^\circ C, \quad \alpha = 500$$

На рис. 2 видно, что нелинейность 1-го рода уже оказывает влияние на распределение относительной температуры по сравнению с линейным решением как в центре так и поверхности цилиндра, которое возрастает с увеличением критерия Фурье и достигает максимального значения в центре нагрева. При увеличении η и выходе его за пределы зоны нагрева такое влияние становится незначительным. Двойная нелинейность оказывает меньшее влияние на распределение θ по сравнению с нелинейностью 1-го рода и линейным решением, чем в предыдущем случае. Причем, как видно из графика, за границей теплового воздействия, при $Fo = 1$ и выше, ось цилиндра нагревается интенсивнее его поверхности, начиная с $\eta \approx 0,6$.

На рис. 3 и 4, для случая II при $N = 1$ показаны временные зависимости ($Fo = 0,1; 1; 10$) относительной температуры по длине, в центре и поверхности цилиндра, для малых (рис. 3) и больших (рис. 4) значений критериев Био и Старка.

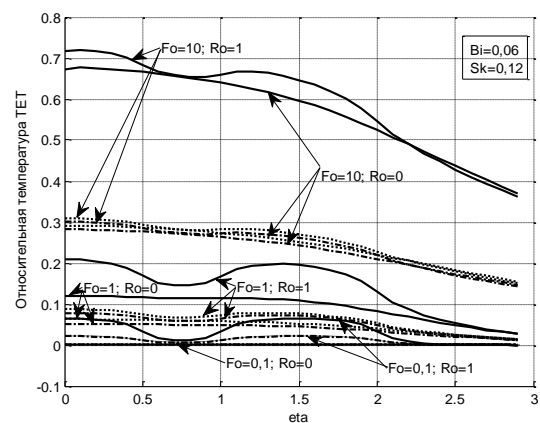


Рисунок 3 – Зависимость относительной температуры по длине и времени, в центре и поверхности цилиндра для случая II и $N = 1$

$$\text{нагрева при } T_c = 1100^\circ C, \quad \alpha = 30$$

На рис. 3 видно, що нелінійність 1-го роду оказує незначительне впливання на розподілення відносительної температури по сравнению з лінійним рішенням як в центрі так і поверхні циліндра, що об'яснюється наявністю сусідньої зони нагріву. За межами зон нагріву таке впливання практично зникає. Однак подвійна нелінійність також оказує суттєве впливання на таке розподілення, яке збільшується з збільшенням критерію Фур'є і досягає максимальних значень в зонах теплових впливань. За межами зон нагріву впливання подвійної нелінійності також значительно по сравнению з лінійним рішенням. При зміні η в розглядаємому діапазоні, амплітуда коливань θ для нелінійності 1-го роду і лінійного рішення мінімальна як по осі, так і поверхні циліндра. Для подвійної нелінійності при $\rho = 1$, максимальна амплітуда коливань θ по довжині циліндра складає 0,5.

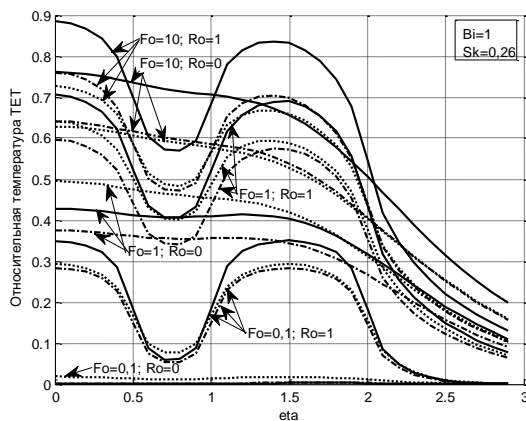


Рисунок 4 – Залежність відносительної температури по довжині і часу, в центрі і поверхні циліндра для випадку II і $N = 1$ нагріву при $T_c = 1420^\circ C$, $\alpha = 500$

На рис. 4 видно, що нелінійність 1-го роду уже оказує впливання на розподілення відносительної температури по сравнению з лінійним рішенням як в центрі так і поверхні циліндра, причому максимальний розброс графіків спостерігається на осі циліндра при $Fo = 1$. При збільшенні η розброс графіків зберігається між зонами нагріву і помітно зменшується після виходу η за межі другої зони нагріву. Подвійна нелінійність оказує менше впливання на розподілення θ по сравнению з нелінійністю 1-го роду і лінійним рішенням, ніж в попередньому випадку. Крім того, за межами теплових впливань, при $Fo = 1$ і вище, вісь циліндра нагрівається інтенсивніше його поверхні. При зміні η в розглядаємому діапазоні, амплітуда коливань θ для всіх нелінійностей і лінійного рішення суттєва для $\rho = 1$ і досягає максимуму 1,5 при розглянутих критеріях Фур'є. Из графіка також видно, що до значень $Fo = 1; Ro = 0$ спостерігається одне зміння відносительної температури в залежності от

времени, т. е. знизу вгору йде штрихпунктирна, потім суцільна і пунктирна лінії. Приймаючи увагу графіки $Fo = 10; Ro = 0$, можна зробити висновок, що починаючи з деякого значення Fo розташування графіків буде якісно змінюватися. Так, на рис. 5 видно, що якісне розташування графіків, на всьому проміжку зміння η , змінюється в діапазоні зміння критерію Фур'є от 1,25 до 1,75.

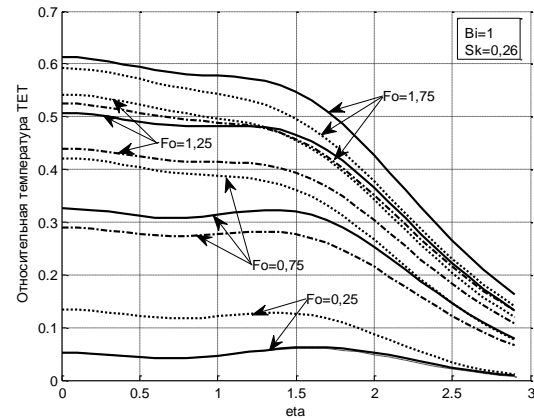


Рисунок 5 – Якісне зміння відносительної температури осі циліндра в залежності от критерію Фур'є при $\beta = 0,5$

С зменшенням ширини зони нагріву β і збереженні того ж значення δ , якісне зміння відносительної температури осі циліндра в залежності от критерію Фур'є, як показано на рис. 6, також змінюється і відбувається на проміжку зміння критерію Фур'є от 0,75 до 1. Це об'яснюється зменшенням взаємодіяння нагріву сусідніх зон, ввиду збільшення відстані між зонами нагріву.

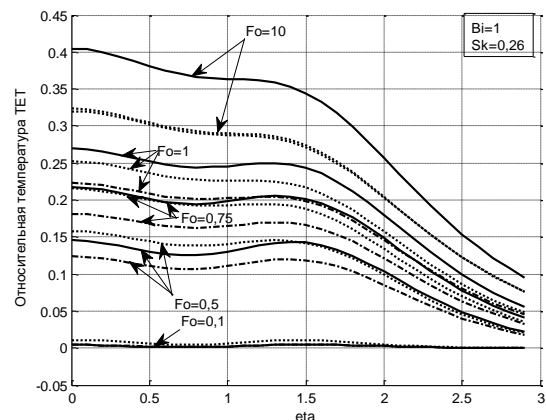


Рисунок 6 – Якісне зміння відносительної температури осі циліндра в залежності от критерію Фур'є при $\beta = 0,25$

ВИСНОВКИ. 1. Нелінійність 1-го роду для тонкого циліндра не оказує впливання на розподілення відносительної температури θ по сравнению з лінійним рішенням як в центрі так і поверхні циліндра.

2. Двойная нелинейность для тонкого цилиндра оказывает существенное влияние на распределение θ , которое увеличивается с увеличением критерия Фурье Fo и достигает максимального значения в центре теплового воздействия. Причем, при выходе из зоны теплового воздействия влияние двойной нелинейности также существенно.

3. Нелинейность 1-го рода для массивного цилиндра оказывает влияние на распределение θ по сравнению с линейным решением как в центре так и поверхности цилиндра, которое возрастает с увеличением критерия Фурье и достигает максимального значения в центре нагрева. Причем, при увеличении η и выходе его за пределы зоны нагрева такое влияние становится незначительным.

4. Двойная нелинейность для массивного цилиндра оказывает меньшее влияние на распределение относительной температуры по сравнению с нелинейностью 1-го рода и линейным решением, чем для тонкого цилиндра.

5. Нелинейность 1-го рода для тонкого цилиндра при нагреве Π и $N=1$ оказывает незначительное влияние на распределение относительной температуры по сравнению с линейным решением как в центре так и поверхности цилиндра, что объясняется наличием соседней зоны нагрева. За пределами зон нагрева такое влияние практически исчезает.

6. При изменении η в рассматриваемом диапазоне для тонкого цилиндра, амплитуда колебаний θ для нелинейности 1-го рода и линейного решения минимальна как по оси, так и поверхности цилиндра. Для двойной нелинейности при $\rho=1$, максимальная амплитуда колебаний θ по длине цилиндра составляет 0,5.

7. Двойная нелинейность для массивного цилиндра оказывает меньшее влияние на распределение относительной температуры по сравнению с нелинейностью 1-го рода и линейным решением, чем для тонкого тела. Причем за границей теплового воздействия, при $Fo=1$ и выше, ось цилиндра нагревается интенсивнее его поверхности.

8. Для массивного цилиндра до значений $Fo=1; Ro=0$ наблюдается одно изменение θ в зависимости от времени, а в диапазоне критерия Фурье от 1,25 до 1,75 расположение графиков качественно меняется.

9. С уменьшением ширины зоны нагрева β и сохранении того же значения δ , качественное изменение θ оси цилиндра в зависимости от Fo также меняется и происходит на промежутке изменения критерия Фурье от 0,75 до 1.

Дальнейшие исследования будут направлены на аналогичные исследования для трансверсально-изотропного цилиндра, сделанного из графита.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зайцев Е.П. Суперпозиция уравнений трехмерной нелинейной нестационарной теплопроводности анизотропных термочувствительных тел /

Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук: КрНУ, – 2010. – Вип. 5(64). Част. 1. – С. 44–48.

2. Зайцев Е.П. Нестационарное температурное поле элементов конструкций летательных аппаратов в условиях зонального высокотемпературного теплообмена. Матеріали 4-ої міжнародної науково-технічної конференції «Управління високошвидкісними рухомими об'єктами та професійна підготовка операторів складних систем», 26–27 листопада 2015 р., Кіровоград. – С. 225–227.

3. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під ред. Я.Й. Бурака, Р.М. Кушніра: Термопружність термочутливих тіл / Р.М. Кушнір, В.С. Попович. – Львів: СПОЛОМ, 2009. – 409 с.

4. Термопружний стан безмежного кругового термочутливого циліндра за умови конвективно – променевого теплообміну з довкіллям / В. Попович, Г. Гарматій, Р. Кушнір // Вісник Донецького університету. Сер. А. Природничі науки. – 2008. – Вип. 1. – С. 113–120.

5. Анализ нелинейного теплопереноса на основе определения фронта температурного возмущения / В.А. Кудинов, Б.В. Аверин, Е.В. Стефанюк, С.А. Назаренко // Теплофизика высоких температур. – 2005. – № 4 – С. 1–9.

6. Янковский А.П. Асимптотический анализ решения нелинейной задачи нестационарной теплопроводности слоистых анизотропных неоднородных оболочек при граничных условиях первого рода на лицевых поверхностях / Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физ.-мат. науки, 2014. – Вып. 1(34). – С. 168–185.

7. Казаков А.Л., Спевак Л.Ф. Численное и аналитическое исследование некоторых процессов, описываемых нелинейным уравнением теплопроводности / Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2015. – Т. 157, кн. 4. – С. 42–48.

8. Процюк Б., Горун О. Вплив конвективно-променевого теплообміну на температурне поле півбезмежного термочутливого трискладового тіла за дії джерела тепла. Математические проблемы механики неоднородных структур / Под общ. ред. И.А. Луковского, Г.С. Кита, Р.М. Кушніра. – Львов: Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача НАН Украины. – 2014. – С. 148–150.

9. Кудинов В., Кудинов И. Методы решения параболических и гиперболических уравнений теплопроводности. – М.: Либроком, 2015. – 280 с.

10. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Издательство МГУ, 1999. – 799 с.

11. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высшая школа, 2001. – 550 с.

12. MATLAB 7: программирование, численные методы / Ю.Л. Кетков, А.Ю. Кетков, М.М. Шульц. – СПб.: БХВ – Петербург, 2005. – 752с.

INFLUENCE OF THE DOUBLE NONLINEARITY ON THE INFINITE CYLINDER TEMPERATURE FIELD AT ZONAL HIGH-TEMPERATURE HEAT EXCHANGE

Y. Zaytsev

Kirovohrad Flight Academy of National Aviation University

vul. Dobrovolsky, 1, Kirovohrad, Ukraine, 25005. E-mail: zaytsev-knu@mail.ru

Purpose. The problems of nonlinear unsteady-state conduction in doubly nonlinear setting are actual in engineering researches, since the solutions of analogous problems in rectilinear setting cause a significant errors, and sometimes incorrect qualitative results. **Methodology.** Initially to the original problem, transformed to the dimensionless form, Goodman and Kirchhoff transformation should be applied, then, the relative temperature and its functions are expanded according to the sines on the priori interval. Further on, the principle of superposition is applied, following which the initial setting is transformed in totality of linearized problems. Linear problems can be solved by integral transformation method, after which they are summarized. The upper boundary of priori interval is defined according to the condition, that the relative temperature, derived from the problem solution, at the problem values ρ , η and $F0 \rightarrow \infty$, possesses value of the priori interval upper boundary. **Originality (Evidences).** The calculations in Matlab circumference are carried out for thin and solid cylinders, made of low-carbon steel and affected by two types of zonal radiant-convective heat exchange. The influence of nonlinearity of the first kind and double nonlinearity on the axis and cylinder surface is shown at the graphs at different values of Fourier criterion. **Practical value (Conclusions).** The Fourier criterion changing range is set, in which the influence of nonlinearity of the first kind and double nonlinearity fundamentally changes for relative temperature distribution character for two cases of thermal effect width. References 12, figures 6.

Key words: thermal conduction, thermosensitivity, superimposition, Goodman and Kirchhoff transformations, Fourier series.

REFERENCES

1. Zaytsev, Y.P. (2010), "Superimposition of 3-dimensional nonlinear transient heat conduction levels of anisotropic thermosensitive bodies", *Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University*, iss. 5 (64), part 1, pp. 44–48.
2. Zaytsev, Y.P. (2015), "Nonstationary temperature field of aircrafts construction elements under the conditions of zonal high-temperature heat exchange", *The materials of the third international scientific and technical conference "High-speed moving objects control and professional preparation of the complex system operators"*, KFA of NAU, Kirovohrad, pp. 225–227.
3. Kushnir, R.M., Popovych, V.S. (2009), *Modelyuvannya ta optymizatsiya v termomehanitsi elektroprovodnykh neodnorodnykh til. Termoprujniy termoshyluvuh til* [Modelling and optimization in thermomechanics of electrically conductive heterogeneous bodies. Thermoelasticity of temperature-dependent bodies], Lviv, Ukraine.
4. Popovych, V., Harmatiy, H, Kushnir, R. (2008), "Thermoelastic state of infinite thermosensitive circular cylinder conditioned upon the convective-radial heat exchange with surrounding air", *Newsletter of Donetsk university. Natural sciences*, iss. 1, pp. 113–120.
5. Kudinov, V.A., Averin, B.V., Stephanyuk, E.V. (2005), "Nonlinear heat transfer analysis conditioned upon the temperature perturbation edge detection", *High temperatures thermal physics*, no. 4, pp. 1–9.
6. Yankovskii, A.P. (2014), "Asymptotic analysis of solutions of a nonlinear problem of unsteady heat conduction of layered anisotropic inhomogeneous shells under boundary conditions of the first kind on the front surfaces", *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, iss. 1(34), pp. 168–185.
7. Kazakov, A.L., Spevak, L.F. (2015), "Numerical and analytic treatment of some processes, described by nonlinear equation of thermal conductivity", *Scholarly notes of Kazansky university, Physical and Mathematical Sciences*, iss.4 (157), pp. 42–48.
8. Protsyuk, V., Horun, O. (2014), "The influence of a convective-radiant heat exchange on the temperature field of half-infinite thermosensitive three-layer body under the action of a heat source", *Mathematical Problems of Mechanics of Nonhomogeneous Structures, Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS*, pp. 148–150.
9. Kudinov, V., Kudinov, I. (2015), *Metody resheniya parabolicheskikh i hiperbolicheskikh uravneniy teploprovodnosti* [Solution method of parabolic and hyperbolic heat conduction equations], Librokom, Moscow, Russia.
10. Tihonov, A.N., Samarskiy, A.A. (1999), *Uravneniy matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics], Publ. MSU, Moscow, Russia.
11. Kartashov, E.M. (2012), *Analiticheskaya metoda v teorii teploprovodnosti tverdyh tel* [Analytical methods in solid bodies thermal conduction theory], Higher school, Moscow, Russia.
12. Ketkov, Y.L., Ketkov, A.Y, Shults, M.M. (2005), *MATLAB 7: programmirovaniye, chislennyye metody* [MATLAB 7: programming, numerical methods], Science, Sankt-Petersburg, Russia.

Стаття надійшла 01.06.2016.