

УДК 536.2 (0.75)

## ВЛИЯНИЕ ТЕПЛОВОЙ АНИЗОТРОПИИ И ДВОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ НА ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ СПЛОШНОГО БЕСКОНЕЧНОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ЦИЛИНДРА

Е. П. Зайцев

Кировоградская летная академия национального авиационного университета  
ул. Добровольского, 1, г. Кировоград, 25005, Украина. E-mail: zaytsev-knu@mail.ru

На основе приближенного метода решения краевых задач дважды нелинейной нестационарной теплопроводности, рассмотрено влияние тепловой анизотропии, термочувствительности материала и зонального лучисто-конвективного теплообмена на распределение температурных полей по длине, в центре и поверхности цилиндра. Учёт зависимостей теплофизических характеристик материала от температуры, анизотропии и высокотемпературного теплообмена с окружающей средой приводит к большим математическим трудностям, что является причиной малого количества публикаций по приближенным аналитическим методам решения таких задач. На большом количестве числовых расчетов, графически показаны качественные изменения влияния термочувствительности, двойной нелинейности и тепловой анизотропии на распределение относительной температуры цилиндра в зависимости от времени, а также приведены приближенные значения времени, при которых процесс нагрева стабилизируется как по нелинейностям, так и анизотропиям.

**Ключевые слова:** теплопроводность, анизотропия, термочувствительность, суперпозиция, преобразования Гудмана и Кирхгофа, ряды Фурье.

## ВПЛИВ ТЕПЛОВОЇ АНІЗОТРОПІЇ ТА ПОДВІЙНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ НА ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ СУЦЬЛЬНОГО НЕСКІНЧЕННОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ЦИЛІНДРУ

Є. П. Зайцев

Кіровоградська льотна академія національного авіаційного університету  
вул. Добровольського, 1, м. Кіровоград, 25005, Україна. E-mail: zaytsev-knu@mail.ru

На основі наближеного методу розв'язання крайових задач двічі нелінійної нестационарної теплопровідності, розглянуто вплив теплової анизотропії, термочутливості матеріалу і зонального конвективно-променевого теплообміну на розподіл температурних полів за довжиною, в центрі та поверхні циліндра. Врахування залежності теплофізичних характеристик матеріалу від температури, анизотропії та високотемпературного теплообміну з навколишнім середовищем призводить до великих математичних труднощів, що є причиною малої кількості публікацій з наближених аналітичних методів розв'язання таких задач. На великій кількості числових розрахунків, графічно показані якісні зміни впливу термочутливості, подвійної нелінійності і теплової анизотропії на розподіл відносної температури циліндра в залежності від часу, а також наведені наближені значення часу, за якими процес нагріву стабілізується як за нелінійностями, так і анизотропіями.

**Ключові слова:** теплопровідність, анизотропія, термочутливість, суперпозиція, перетворення Гудмана і Кірхгофа, ряди Фур'є.

**АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ.** Среди расширенной номенклатуры конструкционных материалов, успешно функционирующих в условиях высокотемпературного теплообмена, наряду с изотропными, широкое применение находят анизотропные материалы. В связи с этим возрастает роль приближенных аналитических методов решения краевых задач нестационарной теплопроводности в дважды нелинейной постановке [1], с учетом анизотропии материала. Это позволяет получить более точное решение удобное для оценки теплового режима твердого тела, выделить преобладающие факторы теплообмена и использовать полученные результаты для последующего анализа термонапряженного состояния тела. При решении задач теплопроводности анизотропных и изотропных тел, различные типы нелинейностей учитывались в работах [2–11], однако, среди них незначительная часть работ решалась в дважды нелинейной постановке, с последующим анализом влияния нелинейностей и анизотропии на распределение относительной температуры.

Актуальность решаемой задачи состоит в том, что, разработка приближенного аналитического метода, позволяет наиболее полно и адекватно учиты-

вать свойства материала, анизотропию и высокотемпературный теплообмен с окружающей средой.

Целью исследования является установление количественного и качественного влияния двойной нелинейности и анизотропии на характер распределения температурных полей в цилиндре при различных значениях критерия Фурье.

**МАТЕРИАЛ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ.** Рассмотрим сплошной трансверсально-изотропный бесконечный цилиндр радиуса  $R$ , имеющий нулевую начальную температуру, ось которого совмещена с осью цилиндрической системы координат  $(r, \varphi, z)$ . По поверхности  $(r = R)$ , цилиндр осесимметрично и зонально нагревается лучисто-конвективной средой, с постоянной температурой  $T_c$ , двумя способами:

$$I. \psi_1(z, t) = T_c H(t) H(d - |z|); \quad H(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0, \\ 0, & \xi < 0, \end{cases}$$

$$II. \psi_2(z, t) = T_c H(t) \{ H(d - |z|) +$$

$$+ \sum_{i=1}^N (H(g_i + d_i - |z|) - H(g_i - d_i - |z|)) \},$$

где  $H$  – функция Хевисайда по времени и по оси,  $d$  – половина длины центральной зоны,  $d_i$  – половина длины зоны, отстоящей от начала координат на расстоянии  $g_i$ .

Нестационарное температурное поле в цилиндре может быть определено из решения следующей краевой задачи, записанной в размерном виде:

$$\begin{aligned} \circ C_v(T)T_{,t} &= (\lambda_r(T)T_{,r})_{,r} + \lambda_r(T)T_{,r}/r + (\lambda_z(T)T_{,z})_{,z}, \\ (0 < r < R, \quad |z| < \infty, \quad t > 0); \\ T(r, z, t)|_{r=0} &= 0; T_{,r}|_{r=0} = 0; T_{,z}|_{z=0} = 0; \\ T, T_{,z} &\rightarrow 0, |z| \rightarrow \infty; \lambda_r(T)T_{,r}|_{r=R} = \\ &= (\alpha(\psi_i(z, t) - T) + \sigma_{\bar{a}}(\psi_i^4(z, t) - T^4))|_{r=R}, (i = 1, 2) \bullet (1) \end{aligned}$$

где  $\circ$  и  $\bullet$  начало и конец группы соотношений;  $\sigma_{\bar{a}} = \varepsilon\sigma_0$  – приведенный коэффициент теплообмена излучением;  $\varepsilon$  – степень черноты;  $\sigma_0$  – постоянная Стефана-Больцмана;  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи.

Преобразуем поставленную задачу (1) к следующему безразмерному виду относительно  $\theta(\rho, \eta, Fo) = T(r, z, t)/T_c$ :

$$\begin{aligned} \circ C_v^*(\theta)\theta_{,Fo} &= (\lambda_r^*(\theta)\theta_{,\rho})_{,\rho} + \lambda_r^*(\theta)\theta_{,\rho}/\rho + \\ &+ \kappa^2(\lambda_z^*(\theta)\theta_{,\eta})_{,\eta}, (0 < \rho < 1, \quad |\eta| < \infty, \quad Fo > 0); \\ \theta(\rho, \eta, Fo)|_{Fo=0} &= 0; \theta_{,\rho}|_{\rho=0} = 0; \theta_{,\eta}|_{\eta=0} = 0; \\ \theta, \theta_{,\eta} &\rightarrow 0, |\eta| \rightarrow \infty; \lambda_r^*(\theta)\theta_{,\rho}|_{\rho=1} = \\ &= (Bi(\chi_i(\eta, Fo) - \theta) + Sk(\chi_i^4(\eta, Fo) - \theta^4))|_{\rho=1}, \bullet (2) \end{aligned}$$

где теплофизические характеристики представлены в виде произведения двух множителей

$$\lambda_r(T) = \lambda_{r0}\lambda_r^*(\theta), \lambda_z(T) = \lambda_{z0}\lambda_z^*(\theta), C_v(T) = C_{v0}C_v^*(\theta)$$

из которых первый с индексом «нуль» имеет размерность и не изменяется, а второй, обозначенный звездочкой, безразмерный и является функцией относительной температуры  $\theta$ ;

$$\begin{aligned} \rho &= r/R; \eta = z/R; a = \lambda_{r0}/C_{v0}; Fo = at/R^2; \\ Bi &= \alpha R/\lambda_{r0}; \kappa^2 = \lambda_{z0}/\lambda_{r0}; Sk = \sigma_{\bar{a}}RT_c^3/\lambda_{r0}; \\ \chi_1(\eta, Fo) &= H(Fo)H(\beta - |\eta|); \beta = d/R; \beta_i = d_i/R; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_i &= g_i/R; \chi_2(\eta, Fo) = H(Fo)\{H(\beta - |\eta|) + \\ &+ \sum_{i=1}^N (H(\delta_i + \beta_i - |\eta|) - H(\delta_i - \beta_i - |\eta|))\}. \end{aligned}$$

Вводя в (2) преобразования Гудмэна и Кирхгофа [1; 2]

$$\begin{aligned} \circ A(\theta) &= \int_0^{\theta} C_v^*(\theta')d\theta', B_r(\theta) = \int_0^{\theta} \lambda_r^*(\theta')d\theta' \\ B_z(\theta) &= \int_0^{\theta} \lambda_z^*(\theta')d\theta' \bullet (3) \end{aligned}$$

с помощью равенств  $A(\theta)_{,Fo} = C_v^*(\theta)\theta_{,Fo}$ ,  $B_r(\theta)_{,\rho} = \lambda_r^*(\theta)\theta_{,\rho}$ ,  $B_z(\theta)_{,\eta} = \lambda_z^*(\theta)\theta_{,\eta}$  преобразуем (2) к следующему эквивалентному виду:

$$\begin{aligned} \circ A(\theta)_{,Fo} &= B_r(\theta)_{,\rho} + \rho^{-1}B_r(\theta)_{,\rho} + \kappa^2B_z(\theta)_{,\eta}; \\ \theta(\rho, \eta, Fo)|_{Fo=0} &= 0; \theta_{,\rho}|_{\rho=0} = 0; \theta_{,\eta}|_{\eta=0} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta, \theta_{,\eta} &\rightarrow 0, |\eta| \rightarrow \infty; (B_r(\theta)_{,\rho} + (Bi \cdot \theta + Sk \cdot \theta^4))|_{\rho=1} = \\ &= Bi \cdot \chi_i(\eta, Fo) + Sk \cdot \chi_i^4(\eta, Fo) \bullet (4) \end{aligned}$$

В (4) функции (3) и  $\theta^{(m)}$  ( $m = \overline{1, 4}$ ) непрерывны и удовлетворяют условиям Дирихле [1; 2] на априорно выбранном интервале  $(0, \theta_p)$  ( $\theta_p$  – пока неопределенная постоянная), а, следовательно, их можно представить в виде следующих сходящихся рядов Фурье по синусам:

$$\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(1)} \sin(k\pi\theta/\theta_p) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta^{(k)}; (5)$$

$$\begin{aligned} (A(\theta), B_r(\theta), B_z(\theta), \theta^{(m)}) &= \\ = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k/\alpha_k^{(1)}, b_{rk}/\alpha_k^{(1)}, b_{zk}/\alpha_k^{(1)}, \alpha_k^{(m)}/\alpha_k^{(1)})\theta^{(k)}, (6) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} (a_k, b_{rk}, b_{zk}, \alpha_k^{(m)}) &= \\ = \frac{2}{\theta_p} \int_0^{\theta_p} (A(\theta), B_r(\theta), B_z(\theta), \theta^m) \sin \frac{k\pi\theta}{\theta_p} d\theta, (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \circ \alpha_k^{(1)} &= \frac{2\theta_p(-1)^{k+1}}{k\pi}, \alpha_k^{(3)} = \frac{2\theta_p^3(-1)^{k+1}[(k\pi)^2 - 6]}{(k\pi)^3}, \\ \alpha_k^{(2)} &= 2\theta_p^2\{(-1)^{k+1}(k\pi)^2 - 2[(-1)^{k+1} + 1]\}/(k\pi)^3, \\ \alpha_k^{(4)} &= \frac{2\theta_p^4\{(-1)^{k+1}[(k\pi)^4 - 12(k\pi)^2 + 24] + 24\}}{(k\pi)^5} \bullet (8) \end{aligned}$$

С учетом (5), (6) и разложения экспоненты  $e^x$  в ряд Маклорена при  $x=1$ , т. е.  $1 = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-1}/(k-1)!$ , (4)

перепишем в виде:

$$\begin{aligned} \circ \left( \sum_{k=1}^{\infty} (a_k/\alpha_k^{(1)})\theta^{(k)} \right)_{,Fo} &= \left( \sum_{k=1}^{\infty} (b_{rk}/\alpha_k^{(1)})\theta^{(k)} \right)_{,\rho\rho} + \\ &+ \rho^{-1} \left( \sum_{k=1}^{\infty} (b_{rk}/\alpha_k^{(1)})\theta^{(k)} \right)_{,\rho} + \kappa^2 \left( \sum_{k=1}^{\infty} (b_{zk}/\alpha_k^{(1)})\theta^{(k)} \right)_{,\eta\eta}; \\ \sum_{k=1}^{\infty} \theta^{(k)}|_{Fo=0} &= 0; \left( \sum_{k=1}^{\infty} \theta^{(k)} \right)_{,\rho}|_{\rho=0} = 0; \left( \sum_{k=1}^{\infty} \theta^{(k)} \right)_{,\eta}|_{\eta=0} = 0; \\ \sum_{k=1}^{\infty} \theta^{(k)}, \left( \sum_{k=1}^{\infty} \theta^{(k)} \right)_{,\eta} &\rightarrow 0, |\eta| \rightarrow \infty; \\ \left\{ \left( \sum_{k=1}^{\infty} (b_{rk}/\alpha_k^{(1)})\theta^{(k)} \right)_{,\rho} + Bi \sum_{k=1}^{\infty} \theta^{(k)} + Sk \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^{(4)}/\alpha_k^{(1)})\theta^{(k)} \right\}_{\rho=1} &= \\ = (Bi \cdot \chi_i(\eta, Fo) + Sk \cdot \chi_i^4(\eta, Fo)) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-1}/(k-1)! \bullet (9) \end{aligned}$$

Применяя к (9) обобщенный принцип суперпозиции [1], получим совокупность следующих линейаризованных задач теплопроводности относительно  $\theta^{(k)}$ :

$$\begin{aligned} \circ \theta_{,Fo}^{(k)} &= \theta_{,\rho\rho}^{(k)} + \rho^{-1}\theta_{,\rho}^{(k)} + \kappa^2\theta_{,\eta\eta}^{(k)}; \theta^{(k)}(\rho, \eta, Fo_k)|_{Fo_k=0} = 0; \\ \theta_{,\rho}^{(k)}|_{\rho=0} &= 0; \theta_{,\eta}^{(k)}|_{\eta=0} = 0; \theta^{(k)}, \theta_{,\eta}^{(k)} \rightarrow 0, |\eta| \rightarrow \infty; \\ (\theta_{,\rho}^{(k)} + Bi_k\theta^{(k)})|_{\rho=1} &= M_k, (k = 1, 2, \dots) \bullet (10) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \circ Fo_k &= \alpha_k Fo, \quad \alpha_k = b_{rk}/a_k, \quad \kappa_k^2 = (b_{zk}/b_{rk}) \cdot \kappa^2, \\ M_k &= (Bi \cdot \chi_i(\eta, Fo) + Sk \cdot \chi_i^4(\eta, Fo)) \alpha_k^{(1)} / (e \cdot b_{rk} \cdot (k-1)!), \\ Bi_k &= (Bi \cdot \alpha_k^{(1)} + Sk \cdot \alpha_k^{(4)}) / b_{rk}, \quad (k=1, 2, \dots). \bullet \quad (11) \end{aligned}$$

Решая (10) аналогично [2], получим окончательные решения для случаев тепловых воздействий I, II и частного случая II при  $N=1$ :

$$\begin{aligned} \theta(\rho, \eta, Fo) &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} D_k \int_0^{\infty} \frac{\sin p\beta \cdot \cos p\eta}{p} \left\{ \frac{I_0(\kappa_k p \rho)}{U_k(p)} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} \frac{J_0(\mu_{kn} \rho)}{(\mu_{kn}^2 + \kappa_k^2 p^2)} e^{-(\mu_{kn}^2 + \kappa_k^2 p^2) Fo_k} \right\} dp = \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} D_k \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\sin p\beta \cdot \cos p\eta}{p} \frac{I_0(\kappa_k p \rho)}{U_k(p)} dp - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} J_0(\mu_{kn} \rho) \int_0^{\infty} \frac{\sin p\beta \cos p\eta}{p} \frac{e^{-(\mu_{kn}^2 + \kappa_k^2 p^2) Fo_k}}{(\mu_{kn}^2 + \kappa_k^2 p^2)} dp \right\}; \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} D_k \int_0^{\infty} \left( \sin p\beta + 2 \sum_{i=1}^N \sin p\beta_i \cos p\delta_i \right) p^{-1} \cos p\eta \times \\ &\times \left\{ \frac{I_0(\kappa_k p \rho)}{U_k(p)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{kn} \cdot J_0(\mu_{kn} \rho)}{(\mu_{kn}^2 + \kappa_k^2 p^2)} e^{-(\mu_{kn}^2 + \kappa_k^2 p^2) Fo_k} \right\} dp; \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} D_k \int_0^{\infty} (\sin p\beta + 2 \sin p\beta \cdot \cos p\delta) p^{-1} \cos p\eta \times \\ &\times \left\{ \frac{I_0(\kappa_k p \rho)}{U_k(p)} - \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} \frac{J_0(\mu_{kn} \rho)}{(\mu_{kn}^2 + \kappa_k^2 p^2)} e^{-(\mu_{kn}^2 + \kappa_k^2 p^2) Fo_k} \right\} dp = \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} D_k \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\sin p\beta \cdot \cos p\eta}{p} \frac{I_0(\kappa_k p \rho)}{U_k(p)} dp + \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin p\beta \cos p\delta \cos p\eta}{p} \frac{I_0(\kappa_k p \rho)}{U_k(p)} dp - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} J_0(\mu_{kn} \rho) \int_0^{\infty} \frac{\sin p\beta \cos p\eta}{p} \frac{e^{-(\mu_{kn}^2 + \kappa_k^2 p^2) Fo_k}}{(\mu_{kn}^2 + \kappa_k^2 p^2)} dp - \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} J_0(\mu_{kn} \rho) \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^{\infty} \frac{\sin p\beta \cos p\delta \cos p\eta}{p} \frac{e^{-(\mu_{kn}^2 + \kappa_k^2 p^2) Fo_k}}{(\mu_{kn}^2 + \kappa_k^2 p^2)} dp \right\}, \quad (14) \end{aligned}$$

где  $D_k = (Bi + Sk) \alpha_k^{(1)} / (e \cdot b_{rk} \cdot (k-1)!)$ ,  
 $U_k(p) = \kappa_k p I_1(\kappa_k p) + Bi_k I_0(\kappa_k p)$ ,  
 $A_{kn} = 2\mu_{kn}^2 / ((\mu_{kn}^2 + Bi_k^2) J_0(\mu_{kn}))$ ,  
 $\mu_{kn}$  – корни характеристического уравнения

$$\mu_k J_1(\mu_k) - Bi_k J_0(\mu_k) = 0.$$

Значение  $\theta_p$  определяется из условия, что относительная температура цилиндра, полученная из решения задачи, при заданных значениях  $\rho$ ,  $\eta$  и  $Fo \rightarrow \infty$ , принимает значение  $\theta_p$ . Поэтому  $\theta_p$  определяется из уравнений

$$\theta_p = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} D_k \int_0^{\infty} \frac{\sin p\beta \cdot \cos p\eta}{p} \frac{I_0(\kappa_k p \rho)}{U_k(p)} dp; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \theta_p &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} D_k \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\sin p\beta \cdot \cos p\eta}{p} \frac{I_0(\kappa_k p \rho)}{U_k(p)} dp + \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin p\beta \cos p\delta \cos p\eta}{p} \frac{I_0(\kappa_k p \rho)}{U_k(p)} dp \right\}. \quad (16) \end{aligned}$$

В дальнейшем числовые расчеты проделаны для решений (12) и (14) в среде MATLAB [12], с использованием алгоритма [2].

Результаты вычислений по определению температурного поля трансверсально-изотропного цилиндра, изготовленного из графита, проанализированы для случаев I и II ( $N=1$ ), с тремя случаями зависимости теплофизических характеристик материала от температуры:  $A, B$  – трансверсально-изотропный цилиндр;  $C$  – изотропный цилиндр, и значениями входных числовых параметров:

$$\begin{aligned} A. \lambda_r(T) &= \lambda_{r0} + \delta_{r1} \cdot T + \delta_{r2} \cdot T^2, \text{ где } \lambda_{r0} = 261,35, \\ \delta_{r1} &= -0,3452, \quad \delta_{r2} = 0,0001727; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_z(T) &= \lambda_{z0} + \delta_{z1} \cdot T + \delta_{z2} \cdot T^2, \text{ где } \lambda_{z0} = 342,41, \\ \delta_{z1} &= -0,48267, \quad \delta_{z2} = 0,0002454, \quad K = 1,145; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B. \lambda_r(T) &= \lambda_{r0} + \delta_{r1} \cdot T + \delta_{r2} \cdot T^2, \text{ где } \lambda_{r0} = 342,41, \\ \delta_{r1} &= -0,48267, \quad \delta_{r2} = 0,0002454; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_z(T) &= \lambda_{z0} + \delta_{z1} \cdot T + \delta_{z2} \cdot T^2, \text{ где } \lambda_{z0} = 261,35, \\ \delta_{z1} &= -0,3452, \quad \delta_{z2} = 0,0001727, \quad K = 0,874; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C. \lambda_r(T) &= \lambda_{r0} + \delta_{r1} \cdot T + \delta_{r2} \cdot T^2, \text{ где } \lambda_{r0} = 261,35, \\ \delta_{r1} &= -0,3452, \quad \delta_{r2} = 0,0001727; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_z(T) &= \lambda_{z0} + \delta_{z1} \cdot T + \delta_{z2} \cdot T^2, \text{ где } \lambda_{z0} = 261,35, \\ \delta_{z1} &= -0,3452, \quad \delta_{z2} = 0,0001727; \quad K = 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_v(T) &= C_{v0} + \delta_{c1} T + \delta_{c2} T^2, \text{ где } C_{v0} = 1647002, \\ \delta_{c1} &= 5333,6, \quad \delta_{c2} = -2,5538; \\ R &= 0,3 \text{ i}; \quad \beta = 0,5; \quad \delta = 1,5; \quad \varepsilon = 0,85. \end{aligned}$$

Было выбрано максимальное значение коэффициента теплоотдачи в газе  $\alpha = 500$  при вынужденной конвекции, для которого критерии Био имеют значения:  $Bi_A = Bi_C = 0,574$ ;  $Bi_B = 0,438$ , а также

температура среды  $T_c = 1880^\circ \text{C}$ , для которой критерии Старка имеют значения:  $Sk_A = Sk_C = 0,3676$ ;  $Sk_B = 0,2806$ . Для расчета изменения относительной температуры во времени в секундах, было выбрано три значения, для которых приведены соответствующие критерии Фурье:

$$T1 = 60, \quad Fo_A = Fo_C = 0,106, \quad Fo_B = 0,14;$$

$$T2 = 480, \quad Fo_A = Fo_C = 0,85, \quad Fo_B = 1,11;$$

$$T3 = 3600, \quad Fo_A = Fo_C = 6,37, \quad Fo_B = 8,316.$$

На приведених нижче графиках введені такі обозначения для параметров и линий:  $\theta \div TET$ ;  $\rho \div Ro$ ;  $\eta \div \text{eta}$ ; 1 – пунктирная линия обозначает линейное решение; 2 – штрихпунктирная, обозначает нелинейность 1-го рода; 3 – сплошная, обозначает решение с двойной нелинейностью.

На рис. 1, 2, 3 и 4 показаны осевые влияния линейности, нелинейности 1-го рода, двойной нелинейности, анизотропии и изотропии на распределение относительной температуры при  $\rho = 0$  и  $\rho = 1$ , в зависимости от времени. Влияние нелинейностей и анизотропий для двойной нелинейности, анализируются в зоне нагрева по направлению снизу вверх.

На рисунке 1 видно, что при  $\rho = 0$  влияние нелинейностей, для всех анизотропий, идет по направлению (3 – 2 – 1), а влияние анизотропий для двойной нелинейности незначительно.

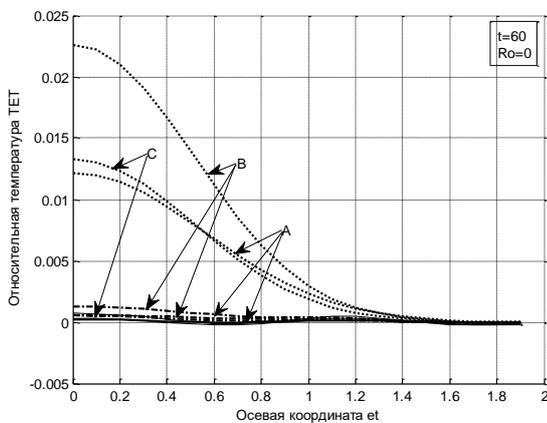


Рисунок 1 – Зависимость относительной температуры по длине, в центре трансверсально-изотропного цилиндра при значении  $T1$

На рис. 2 показаны также графики рис. 1 при  $\rho = 0$  в масштабе рис. 2. При  $\rho = 1$  влияние нелинейностей идет по направлению (2 – 1 – 3), т. е. качественно меняется по сравнению с осью цилиндра, а анизотропий – (A – C – B).

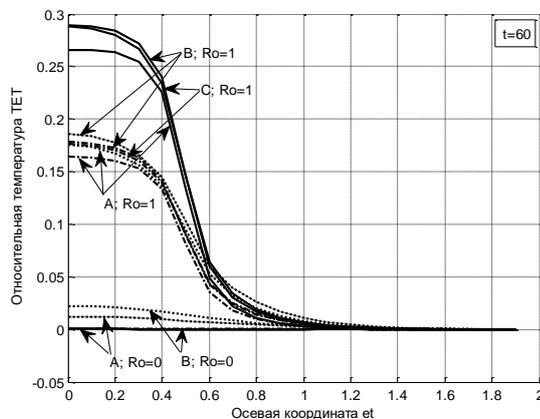


Рисунок 2 – Зависимость относительной температуры по длине, в центре и поверхности трансверсально-изотропного цилиндра при значении  $T1$

На рис. 3 при  $\rho = 0$  влияние нелинейностей идет по направлению (2 – 3 – 1), анизотропий – (A – C – B), а при  $\rho = 1$  влияние нелинейностей – (1 – 2 – 3), анизотропий – (B – A – C). В этом случае имеет место качественный переход нагрева от оси к поверхности цилиндра как по нелинейностям, так и анизотропиям.

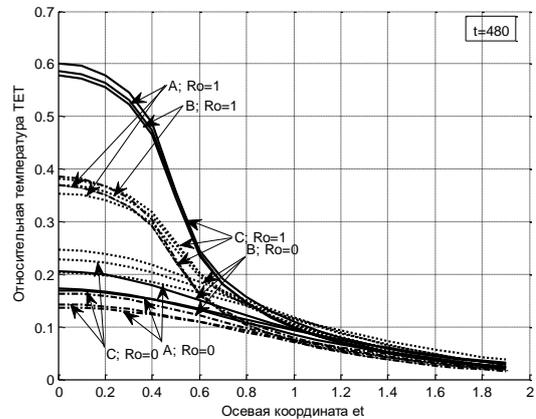


Рисунок 3 – Зависимость относительной температуры по длине, в центре и поверхности трансверсально-изотропного цилиндра при значении  $T2$

На рис. 4 при  $\rho = 0$  влияние нелинейностей идет по направлению (1 – 2 – 3), анизотропий – (A – C – B). При  $\rho = 1$  будет такое же влияние нелинейностей и анизотропий, т. е. процесс нагрева стабилизируется.

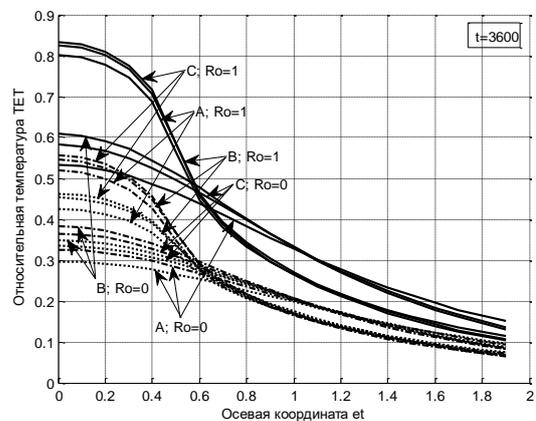


Рисунок 4 – Зависимость относительной температуры по длине, в центре и поверхности трансверсально-изотропного цилиндра при значении  $T3$

Из анализа рис. 3 и 4 можно сделать вывод, что существует такое значение времени, начиная с которого процесс нагрева стабилизируется и для  $\rho = 0$ . В результате численного анализа, начиная с времени  $t = 1725$  сек. происходит качественное изменение нагрева оси цилиндра, как показано на рис. 5.

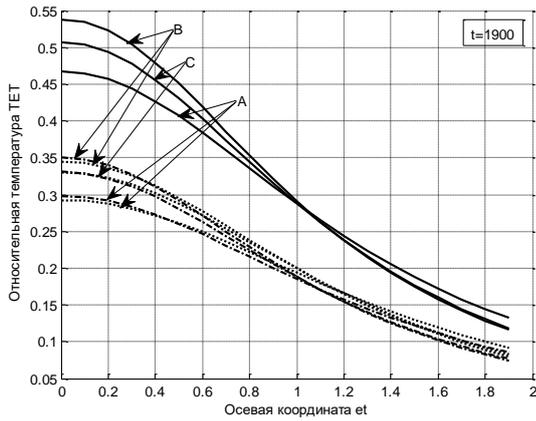


Рисунок 5 – Качественное изменение относительной температуры нагрева оси цилиндра в зависимости от времени при  $\beta = 0,5$  и  $\delta = 1,5$

На рис. 6 и 7, для случая II при  $N = 1$  ( $\beta = 0,5$ ;  $\delta = 1,5$ ), показаны осевые влияния линейности, нелинейности 1-го рода, двойной нелинейности, анизотропии и изотропии на распределение относительной температуры при  $\rho = 0$  и  $\rho = 1$ , в зависимости от времени.

На рис. 6 видно, что при  $\rho = 0$  влияние нелинейностей, для всех анизотропий, идет по направлению (2–3–1), а влияние анизотропий для двойной нелинейности (A–C–B). При  $\rho = 1$  влияние нелинейностей – (2–1–3), а анизотропий – (B–A–C), т. е. процесс нагрева качественно меняется как по нелинейностям, так и по анизотропиям.

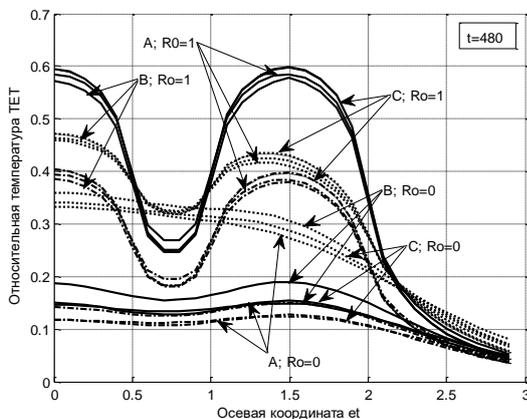


Рисунок 6 – Зависимость относительной температуры по длине, в центре и поверхности трансверсально-изотропного цилиндра, для нагрева II при значении  $T_2$

На рис. 7 видно, что процесс нагрева стабилизируется и имеет одинаковое влияние на оси и поверхности цилиндра как по нелинейностям, так и анизотропиям, т. е. (1–2–3) и (A–C–B). Приближенное значение времени  $t = 3400$  и соответствующие графики, при котором процесс нагрева стабилизируется как на оси, так и в центре цилиндра, показаны на рис. 8.

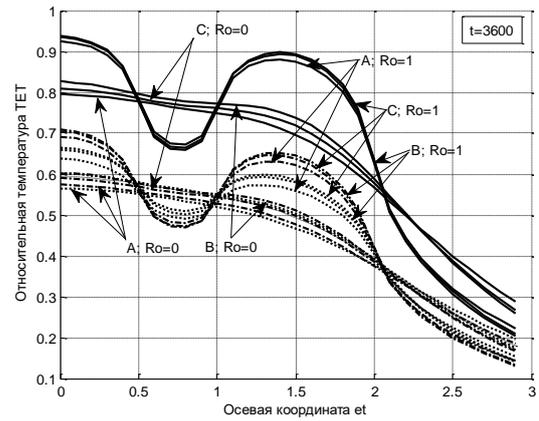


Рисунок 7 – Зависимость относительной температуры по длине, в центре и поверхности трансверсально-изотропного цилиндра, для нагрева II при значении  $T_3$

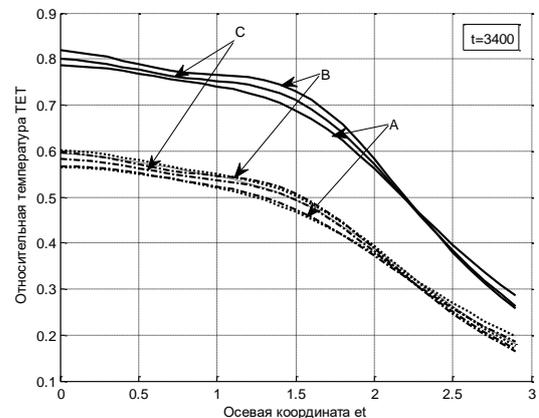


Рисунок 8 – Качественное изменение относительной температуры нагрева оси цилиндра в зависимости от времени, для нагрева II

**ВЫВОДЫ.** 1. Для времени  $T_1$ , одной центральной зоны нагрева и  $\rho = 0$ , влияние анизотропий на распределение относительной температуры  $\theta$  для двойной нелинейности незначительно. При переходе от  $\rho = 0$  к  $\rho = 1$  качественно меняется влияние нелинейностей с (3–2–1) на (2–1–3), а влияние анизотропий сохраняется неизменным (A–C–B).

2. При возрастании времени до  $T_2$  качественно меняется влияние как нелинейностей от центра (2–3–1) до поверхности (1–2–3) цилиндра, так и анизотропий от (A–C–B) (A и C в центре теплового воздействия почти совпадают) до (B–A–C).

3. При возрастании времени до  $T_3$  процесс нагрева стабилизируется как по нелинейностям (1–2–3), так и по анизотропиям (A–C–B), причем, стабилизация нагрева происходит приблизительно при  $t = 1900$ .

4. Для случая температурного воздействия II при  $N = 1$  и времени  $T_2$ , качественно меняется влияние нагрева как по нелинейностям с (2–3–1) в центре на (2–1–3) поверхности цилиндра, так и анизотропиям с (A–C–B) в центре на (B–A–C) поверхности цилиндра.

5. При изменении  $\eta$  в рассматриваемом диапазоне, максимальная амплитуда колебаний  $\theta$  для  $\rho = 0$  незначительна, а при  $\rho = 1$ , для всех анизотропий, существенно увеличивается и приближенно составляет 0,35 для двойной нелинейности.

6. При дальнейшем увеличении времени до  $T_3$  процесс нагрева стабилизируется как по нелинейностям (1–2–3), так и анизотропиям (A–C–B), причем, стабилизация нагрева происходит приближенно при  $t = 3400$ . Максимальная амплитуда колебаний относительной температуры  $\theta$  поверхности цилиндра при  $T_3$  приближенно составляет 0,26 для двойной нелинейности.

Дальнейшие исследования будут направлены на исследования влияния нелинейностей и анизотропий для полубесконечного сплошного цилиндра при зональном высокотемпературном теплообмене.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Зайцев Е.П. Суперпозиция уравнений трехмерной нелинейной нестационарной теплопроводности анизотропных термочувствительных тел // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук: КрНУ, 2010. – Вип. 5(64), част. 1. – С. 44–48.
2. Зайцев Е.П. Влияние термочувствительности и зонального высокотемпературного теплообмена на температурное поле бесконечного цилиндра // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук: КрНУ, 2016. – Вип. 3 (98), част. 1. – С. 33–40.
3. Зайцев Е.П. Температурное поле трансверсально-изотропного элемента конструкции летательного аппарата в условиях лучисто-конвективного теплообмена и с источником тепла. Матеріали 4-ої міжнародної науково-технічної конференції «Управління високошвидкісними рухомими об'єктами та професійна підготовка операторів складних систем», 25-26 листопада 2015 р., Кировоград. – С. 228–231.
4. Моделирование та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під ред. Я.Й. Бурака, Р.М. Кушніра, В.С. Поповича: Термопружність термочувливих тіл. – Львів: СПОЛОМ, 2009. – 409 с.
5. Термопружний стан безмежного кругового термочувливого циліндра за умови конвективно – променевого теплообміну з довкіллям / В. Попович, Г. Гарматій, Р. Кушнір // Вісник Донецького університету. Сер. А. Природничі науки. – 2008. – Вип.1. – С. 113–120.
6. Кузнецова Е.Л. Моделирование теплопереноса в нелинейном анизотропном пространстве на основе аналитического решения // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 1. – С. 46–54.
7. Формалев В.Ф. Теплопроводность анизотропных тел. Аналитические методы решения задач – М.: Физматлит, 2015. – 312 с.
8. Янковский А.П. Асимптотический анализ решения нелинейной задачи нестационарной теплопроводности слоистых анизотропных неоднородных оболочек при граничных условиях первого рода на лицевых поверхностях / Вестник Самарского государственного технического университета: Серия Физ.-мат. науки. – Вып. 1(34), 2014. – С. 168–185.
9. Вплив конвективно-променевого теплообміну на температурне поле півбезмежного термочувливого трискладового тіла за дії джерела тепла. Математические проблемы механики неоднородных структур / Под общ. ред. И.А. Луковского, Г.С. Кита, Р.М. Кушніра. Борис Процюк, Олег Горун. – Львов: Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача НАН Украины. –2014. – С. 148–150.
10. Noda N., Hetnarski R.V. and Tanigawa Y. (2003), Thermal Stresses, 2<sup>nd</sup> edition. Taylor and Francis, New York. – 508 p.
11. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел – М: Высшая школа, 2001. – 550 с.
12. MATLAB 7: программирование, численные методы / Ю.Л. Кетков, А.Ю. Кетков, М.М. Шульц. – СПб.: БХВ – Петербург, 2005. – 752 с.

#### INFLUENCE OF THE THERMAL ANISOTROPY AND DOUBLE NONLINEARITY ON A TEMPERATURE FIELD OF THE SOLID INFINITE TRANSVERSALY ISOTROPIC CYLINDER

Y. Zaytsev

Kirovohrad Flight Academy of National Aviation University

vul. Dobrovolsky, 1, Kirovohrad, 25005, Ukraine. E-mail: zaytsev-knu@mail.ru

**Purpose.** Among the expanded nomenclature of compositional materials that effectively work in conditions of high-temperature heat exchange, non-isotropic materials that work in a wide spectrum of temperatures are extensively used along with isotropic materials. In this regard, the role of approximate analytical methods for solving boundary value problems of the transient heat conduction in a double nonlinear arrangement, with account of the material anisotropy, is increasing. This allows obtaining more precise solution, convenient for a solid body temperature regime assessment, and deducing heat exchange prevailing factors. **Methodology.** Initially to the original problem, transformed to the dimensionless form, Goodman and Kirchhoff transformation should be applied, then, the relative temperature and its functions are expanded according the sines on the priori interval. Further on, the principle of superposition is applied, following which the initial setting is transformed in totality of linearized problems. Linear problems can be solved by

integral transformation method, after which they are summarized. The upper boundary of priori interval is defined according to the condition, that the relative temperature, derived from the problem solution, at the problem values  $\rho$ ,  $\eta$  and  $F0 \rightarrow \infty$ , possesses value of the priori interval upper boundary. **Originality.** Thermal anisotropy, material thermosensitivity and double nonlinearity quality effects on the relative temperature distribution along the axis in the center and on the cylinder's surface have been ascertained based on a large amount of numerical computations, for two cases of zonal heat effect, in a wide range of Fourier's criteria. **Practical value.** The developed method allows more complete and adequate accounting for anisotropy, material properties and high-temperature heat exchange with the environment when determining temperature fields of the structural elements that work in a wide spectrum of temperatures. In addition, this method allows utilizing it in the function of finding trial solutions during complex structural elements computations. References 12, figures 8.

**Key words:** heat conduction, anisotropy, thermosensitivity, superimposition, Goodman and Kirchhoff transformations, Fourier series.

## REFERENCES

- Zaytsev, Y.P. (2010), "Superimposition of 3-dimensional nonlinear transient heat conduction levels of anisotropic thermosensitive bodies", *Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University*, iss. 5 (64), part 1, pp. 44 – 48.
- Zaytsev, Y.P. (2016), "Influence of the double nonlinearity on the infinite cylinder temperature field at zonal high-temperature heat exchange", *Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University*, iss. 3 (98), part 1, pp. 33 – 40.
- Zaytsev, Y.P. (2015), "Temperature field of an air vehicle transversal-isotropic structural element in the conditions of radiant-convection heat exchange and with the source of heat", The materials of the third international scientific and technical conference "High-speed moving objects control and professional preparation of the complex system operators", KFA of NAU, Kirovohrad, pp. 228–231.
- Kushnir, R.M., Popovych, V.S. (2009), *Modelyuvannya ta optymizatsiya v termomehanitsi elektroprovodnykh neodnorodnykh til. Termoprujnist termoshytluvuh til* [Modelling and optimization in thermomechanics of electrically conductive heterogeneous bodies. Thermoelasticity of temperature-dependent bodies], Lviv, Ukraine.
- Popovych, V., Harmatiy, H., Kushnir, R. (2008), "Thermoelastic state of infinite thermosensitive circular cylinder conditioned upon the convective-radial heat exchange with surrounding air", *Newsletter of Donetsk university. Natural sciences*, iss. 1, pp. 113–120.
- Kuznetsova, E.L. (2012), "Simulation of heat transfer in nonlinear anisotropic space based on the analytical solution", *Mathematical modeling*, iss. 24, no. 1, pp. 46–54.
- Formalev, V.F. (2015), *Teploprovodnost anizotropnykh tel. Analiticheskie metody resheniya zadach* [Anisotropic bodies heat conductivity. Analytical methods for problems solutions], Fizmatlit, Moscow, Russia.
- Yankovskii, A.P. (2014), "Asymptotic analysis of solutions of a nonlinear problem of unsteady heat conduction of layered anisotropic inhomogeneous shells under boundary conditions of the first kind on the front surfaces", *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, iss 1(34), pp. 168–185.
- Protsyuk, V., Horun, O. (2014), "The influence of a convective-radiant heat exchange on the temperature field of half-infinite thermosensitive three-layer body under the action of a heat source", *Mathematical Problems of Mechanics of Nonhomogeneous Structures, Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NAS*, pp. 148–150.
- Noda, N., Hetnarski, R.B. and Tanigawa, Y. (2003), *Thermal Stresses, 2<sup>nd</sup> edition*, Taylor and Francis, New York, USA.
- Kartashov, E.M. (2012), *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel* [Analytical methods in solid bodies thermal conduction theory], Higher school, Moscow, Russia.
- Ketkov, Y.L., Ketkov, A.Y., Shults, M.M. (2005), *MATLAB 7: programmirovaniye, chislennyye metody* [MATLAB 7: programming, numerical methods], Science, Sankt-Petersburg, Russia.

Стаття надійшла 25.08.2016.