

УДК 539.377

СУПЕРПОЗИЦІЯ ОСНОВНИХ УРАВНЕНИЙ КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ТЕЛ

Е. П. Зайцев

Кировоградская летная академия Национального авиационного университета
ул. Добровольского, 1, г. Кропивницкий, 25005, Украина. E-mail: zaytsev-knu@mail.ru

Рассмотрено применение разработанного приближенного аналитического метода решения задач нелинейной нестационарной теплопроводности анизотропных термочувствительных тел на суперпозицию основных уравнений квазистатической термоупругости тел, подверженных воздействию высокотемпературного теплообмена. На основе этого метода получены замкнутые решения определения температурных полей, напряжений и перемещений в бесконечном сплошном изотропном цилиндре, подверженном воздействию лучисто-конвективного теплообмена. На большом количестве числовых расчетов определены качественные влияния нелинейности первого рода и двойной нелинейности в задаче теплопроводности на характер распределения температур, напряжений и перемещений в центре и поверхности цилиндра для случая изменения коэффициента теплоотдачи при фиксированной температуре среды, а также для случая изменения температуры среды в широком диапазоне, при фиксированном значении коэффициента теплоотдачи.

Ключевые слова: теплопроводность, термоупругость, термочувствительность, суперпозиция, высокотемпературный теплообмен.

СУПЕРПОЗИЦІЯ ОСНОВНИХ РІВНЯНЬ КВАЗИСТАТИЧНОЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ АНИЗОТРОПНИХ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ТІЛ

Є. П. Зайцев

Кіровоградська льотна академія Національного авіаційного університету
вул. Добровольського, 1, м. Кропивницький, 25005, Україна. E-mail: zaytsev-knu@mail.ru

Розглянуто застосування розробленого наближеного аналітичного методу розв'язання задач нелінійної нестационарної теплопровідності анізотропних термочутливих тіл на суперпозицію основних рівнянь квазистатичної термopружності тіл, які піддаються впливу високотемпературного теплообміну. На основі цього методу отримано замкнені рішення визначення температурних полів, напружень і переміщень в нескінченному суцільному ізотропному циліндрі, який знаходиться під впливом конвективно-променевого теплообміну. На великій кількості числових розрахунків, визначені якісні впливи не лінійності першого роду і подвійної не лінійності в задачі теплопровідності, на характер розподілу температур, напружень і переміщень в центрі і поверхні циліндра для випадку зміни коефіцієнта тепловіддачі при фіксованій температурі середовища, а також для випадку зміни температури середовища в широкому діапазоні, при фіксованому значенні коефіцієнта тепловіддачі.

Ключові слова: теплопровідність, термopружність, термочутливість, суперпозиція, високотемпературний теплообмін.

АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ. Применение конструкционных материалов, успешно функционирующих в условиях высокотемпературного теплообмена (терморadiационного, аэродинамического, комбинированного лучисто-конвективного и др.), наряду с изотропными, широкое применение находят анизотропные материалы (графиты, армированные композиционные материалы). Возникающие при этом большие градиенты температуры приводят к появлению значительных температурных напряжений, проблема достоверного определения которых имеет исключительно большое значение в общем комплексе инженерных расчетов. От успешного решения таких задач зависят возможности повышения прочности, надежности, долговечности и эффективности работы таких особо важных объектов, как ядерные реакторы, космические и воздушные летательные аппараты, паровые и газовые турбины, реактивные и ракетные двигатели, в которых температурные напряжения играют значительную, а иногда и доминирующую роль.

При строгом подходе к исследованию термонапряженного состояния элементов конструкций, необходимо учитывать зависимость физико-механических характеристик материала от температуры и нелинейный характер теплообмена с окружающей средой, что позволяет вскрыть дополнительные

резервы для интенсификации различных технологических режимов. При решении задач термоупругости в квазистатической постановке, где первым независимым этапом является решение задачи теплопроводности, различные типы нелинейностей учитывались в работах [1–8], однако, среди них незначительная часть работ рассматривает влияние двойной нелинейности в задаче теплопроводности на характер распределений температуры, напряжений и перемещений в рассматриваемом теле.

Поэтому важным и актуальным является создание новых и совершенствование существующих методов расчета, наиболее полно и адекватно учитывающих свойства реальных материалов и условий их теплообмена с окружающей средой.

Целью исследования является разработка и апробация нового подхода к решению задач квазистатической термоупругости анизотропных тел, с учетом термочувствительности материала и высокотемпературного теплообмена с окружающей средой.

МАТЕРИАЛ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ. В работе [1], рассмотрено обобщение разработанного метода решения задач нелинейной нестационарной теплопроводности анизотропных термочувствительных тел на случай трехмерного пространства с анализом тестовых задач для некоторых типов нелинейностей. Применим этот подход для

суперпозиции основных уравнений квазистатической термоупругости термочувствительных тел, с учетом воздействия высокотемпературного теплообмена.

Пусть в прямоугольной нумерованной системе координат x_i ($i = 1, 2, 3$) трехмерного евклидова пространства E_3 тело, занимающее область G , ограниченное поверхностью S , имеет температуру естественного состояния $T_0 = \text{const}$. Вследствие механических и тепловых воздействий в теле возникают поля перемещений u_i , деформаций ε_{ij} и напряжений σ_{ij} , а также температурное поле T . Предположим, что приращение температуры $\vartheta = T - T_0$ вызывает чисто тепловую деформацию

$$F_{ij}(\vartheta) = \int_0^{\vartheta} \alpha'_{ij}(\vartheta') d\vartheta',$$

где α'_{ii} , α'_{ij} – температурные коэффициенты линейного расширения и сдвига анизотропного тела.

Согласно общей схемы решения несвязанной квазистатической задачи термоупругости, определим вначале температурное поле тела G из решения следующей краевой задачи относительно $\vartheta = T - T_0$:

$$\begin{aligned} \circ C_v(\vartheta)\vartheta_{,i} &= \{\lambda_{ij}(\vartheta)\vartheta_{,j}\}_{,i} + w_i(\vartheta), \quad (M \in G, t > 0); \\ \vartheta(M, t) &= 0, \quad (M \in \bar{G} = G + S, t = 0); \\ n_i \lambda_{ij}(\vartheta)\vartheta_{,j} &= Q(M, t) - (\alpha + 4T_0^3 \sigma_a)\vartheta - \\ &- \sigma_a(\vartheta^4 + 4\vartheta^3 T_0 + 6\vartheta^2 T_0^2), \quad (M \in S), \bullet \end{aligned} \quad (1)$$

где \circ и \bullet начало, и конец группы соотношений; применяется правило суммирования по повторяющимся индексам i и j ; $Q(M, t) = \alpha(T_c(M, t) - T_0) + \sigma_a(T_c^4(M, t) - T_0^4)$; $\lambda_{ij}(\vartheta)$, ($i, j = 1, 2, 3$) – компоненты симметричного тензора теплопроводности; $w_i(\vartheta)$ – плотность внутренних источников тепла; α – коэффициент теплоотдачи с поверхности S тела; $\sigma_a = \varepsilon\sigma_0$ – видимый коэффициент теплообмена излучением; n_i – компоненты вектора внешней нормали \bar{n} к этой поверхности; $|\bar{n}| = 1$.

Для решения системы (1) введем в нее преобразования Гудмэна и Кирхгофа [1]

$$A(\vartheta) = \int_0^{\vartheta} C_v(\vartheta') d\vartheta', \quad D_{ij}(\vartheta) = \int_0^{\vartheta} \lambda_{ij}(\vartheta') d\vartheta', \quad (2)$$

где $D_{ij}(\vartheta)$ являются компонентами симметричного тензора. Используя дифференциальные соотношения для перехода к новым функциям $A(\vartheta)_{,i} = C_v(\vartheta)\vartheta_{,i}$, $D_{ij}(\vartheta)_{,j} = \lambda_{ij}(\vartheta)\vartheta_{,j}$, полученным из (2) при их дифференцировании по соответствующим координатам, систему (1) представим в следующей эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} \circ A(\vartheta)_{,i} &= D_{ij}(\vartheta)_{,ij} + w_i(\vartheta), \quad \vartheta(M, t) = 0, \\ n_i D_{ij}(\vartheta)_{,j} &= Q(M, t) - (\alpha + 4T_0^3 \sigma_a)\vartheta - \\ &- \sigma_a(\vartheta^4 + 4\vartheta^3 T_0 + 6\vartheta^2 T_0^2). \bullet \end{aligned} \quad (3)$$

В системе (3) функции (2) и ϑ^m ($m = \overline{1, 4}$) удовлетворяют условиям Дирихле [9] на некотором априорно выбранном интервале $(0, \vartheta_p)$ (ϑ_p – пока неопределенная постоянная), а, следовательно, их можно представить в виде следующих сходящихся рядов Фурье по синусам:

$$\vartheta = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{(1)} \sin\left(\frac{k\pi\vartheta}{\vartheta_p}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta^{(k)}; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (A(\vartheta), D_{ij}(\vartheta)_{,j}, w_i(\vartheta), \vartheta^m) &= \sum_{k=1}^{\infty} (a_k/\beta_k^{(1)}, d_{ij}^{(k)}/\beta_k^{(1)}, \\ &g_k/\beta_k^{(1)}, \alpha_k^{(m)}/\beta_k^{(1)}) \vartheta^{(k)}, \quad (m = \overline{1, 4}), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\vartheta^{(k)} = \beta_k^{(1)} \sin(k\pi\vartheta/\vartheta_p),$$

$$\begin{aligned} (a_k, d_{ij}^{(k)}, g_k, \beta_k^{(m)}) &= \frac{2}{\vartheta_p} \int_0^{\vartheta_p} (A(\vartheta), D_{ij}(\vartheta)_{,j}, w_i(\vartheta), \vartheta^m) \times \\ &\times \sin(k\pi\vartheta/\vartheta_p) d\vartheta. \end{aligned} \quad (6)$$

С учетом (4), (5) и разложения экспоненты e^x в ряд Маклорена при $x = 1$, систему (3) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \circ \left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k/\beta_k^{(1)}) \vartheta^{(k)} \right)_{,i} &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} (d_{ij}^{(k)}/\beta_k^{(1)}) \vartheta^{(k)} \right)_{,ij} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (g_k/\beta_k^{(1)}) \vartheta^{(k)}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta^{(k)}(M, t) = 0, \\ n_i \left(\sum_{k=1}^{\infty} (d_{ij}^{(k)}/\beta_k^{(1)}) \vartheta^{(k)} \right)_{,j} &= Q(M, t) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-1}/(k-1)! - \\ &- (\alpha + 4T_0^3 \sigma_a) \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta^{(k)} - \sigma_a \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k^{(4)}/\beta_k^{(1)}) \vartheta^{(k)} + \right. \\ &+ 4T_0 \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k^{(3)}/\beta_k^{(1)}) \vartheta^{(k)} + 6T_0^2 \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k^{(2)}/\beta_k^{(1)}) \vartheta^{(k)} \left. \right). \bullet \end{aligned} \quad (7)$$

Используя обобщенный принцип суперпозиции [9], систему (7) можно преобразовать к совокупности линеаризованных задач теплопроводности относительно $\vartheta^{(k)}$ с приведенными теплофизическими характеристиками исследуемого материала:

$$\begin{aligned} \circ \vartheta_{,i}^{(k)} &= d_{ij}^{(k)} a_k^{-1} \vartheta_{,j}^{(k)} + g_k a_k^{-1} \vartheta^{(k)}, \quad \vartheta^{(k)}(M, t) = 0, \\ n_i d_{ij}^{(k)} \vartheta_{,j}^{(k)} + B_i \vartheta^{(k)} &= M_k, \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \bullet \end{aligned} \quad (8)$$

где $M_k = Q(M, t) \beta_k^{(1)} e^{-1}/(k-1)!$,

$$B_i = (\alpha + 4T_0^3 \sigma_a) \beta_k^{(1)} + \sigma_a (\beta_k^{(4)} + 4T_0 \beta_k^{(3)} + 6T_0^2 \beta_k^{(2)}).$$

Решение линеаризованной системы (8) символически запишем в виде

$$\vartheta^{(k)}(M, t) = R^{(k)}(M, t). \quad (9)$$

После суммирования (9) по k , согласно (4), окончательно получим решение исходной задачи

$$\vartheta(M, t) = \sum_{k=1}^{\infty} R^{(k)}(M, t), \quad (10)$$

Значение ϑ_p определяется из условия, что при $t \rightarrow \infty$, температура ϑ (10), в фиксированной точке поверхности тела $M_1 \in S$, стремится к ϑ_p , т. е.

$$\vartheta_p = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} R^{(k)}(M_1, t). \quad (11)$$

Вычисляя по значению ϑ_p коэффициенты рядов Фурье (6), M_k и B_i^k , получим решение задачи теплопроводности, являющейся первым этапом решения поставленной задачи.

Вторым этапом решения, является определение термонапряженного состояния тела, вызванного механическими воздействиями X_i и известным температурным полем (10). Математически такой процесс описывается системой уравнений [10, 11]:

$$\begin{aligned} \circ \quad & \sigma_{ij,j} + X_i = 0; \quad \varepsilon_{ij} = s_{ijml}(\vartheta) \cdot \sigma_{ml} + F_{ij}(\vartheta); \\ & \varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2; \quad \sigma_{ij} n_j = p_i(M), \quad (M \in S_\sigma); \\ & u_i = U_i(M), \quad (M \in S_u), \bullet \end{aligned} \quad (12)$$

где $s_{ijml}(\vartheta)$ – модули упругой податливости, удовлетворяющие условиям симметрии и имеющие 21 независимую компоненту, $i, j, m, l = 1, 2, 3$, X_i – компоненты вектора объемных сил; $p_i(M)$ – компоненты заданной поверхностной силы; $U_i(M)$ – заданные на поверхности S_u функции; $S = S_\sigma + S_u$.

Предполагая, что на интервале $(0, \vartheta_p)$, функции $s_{ijml}(\vartheta)$, $F_{ij}(\vartheta)$ удовлетворяют условиям Дирихле, представим единицу и $s_{ijml}(\vartheta)$ в виде разложений в ряд Фурье-Бесселя 1-го типа, а $F_{ij}(\vartheta)$ в виде разложений в ряд Фурье по синусам:

$$\begin{aligned} \circ \quad & 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(0)} J_n \left(\frac{v_k \vartheta}{\vartheta_p} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k; \quad V_k = \alpha_k^{(0)} J_n \left(\frac{v_k \vartheta}{\vartheta_p} \right); \\ & s_{ijml}(\vartheta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{ijml}^{(k)}}{\alpha_k^{(0)}} V_k; \quad F_{ij}(\vartheta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_{ij}^{(k)}}{\beta_k^{(1)}} \vartheta^{(k)}, \bullet \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \text{где} \quad & (\alpha_k^{(0)}, a_{ijml}^{(k)}) = \\ & = 2\vartheta_p^{-2} J_{n+1}^{-2}(v_k) \int_0^{\vartheta_p} \vartheta (1, s_{ijml}(\vartheta)) J_n \left(\frac{v_k \vartheta}{\vartheta_p} \right) d\vartheta, \\ & f_{ij}^{(k)} = \frac{2}{\vartheta_p} \int_0^{\vartheta_p} F_{ij}(\vartheta) \cdot \sin(k\pi\vartheta/\vartheta_p) d\vartheta. \end{aligned}$$

где v_k ($k = 1, 2, \dots$) – корни уравнения $J_n(v) = 0$.

Используя (13) и $1 = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-1}/(k-1)!$, систему (12)

можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \circ \quad & \left(\sigma_{ij} \sum_{k=1}^{\infty} V_k \right)_{,j} + X_i \cdot \sum_{k=1}^{\infty} e^{-1}/(k-1)! = 0; \\ & \varepsilon_{ij} \sum_{k=1}^{\infty} V_k = \sigma_{ml} \sum_{k=1}^{\infty} (a_{ijml}^{(k)}/\alpha_k^{(0)}) V_k + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{ij}^{(k)}/\beta_k^{(1)}) \vartheta^{(k)}; \\ & \varepsilon_{ij} \sum_{k=1}^{\infty} V_k = \left\{ \left(u_i \sum_{k=1}^{\infty} V_k \right)_{,j} + \left(u_j \sum_{k=1}^{\infty} V_k \right)_{,i} \right\} / 2; \\ & \sigma_{ij} n_j \sum_{k=1}^{\infty} V_k = p_i(M) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-1}/(k-1)!, \quad (M \in S_\sigma); \\ & u_i \sum_{k=1}^{\infty} V_k = U_i(M) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-1}/(k-1)!, \quad (M \in S_u). \bullet \end{aligned} \quad (14)$$

Вводя не зависящие от k компоненты напряжений σ_{ij} , деформаций ε_{ij} , перемещений u_i , объемных X_i и поверхностных p_i сил, функций U_i под знаки сумм в системе (14), используя обозначения $(\sigma_{ij}^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}, u_i^{(k)}) = (\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_i) V_k$, $s_{ijml}^{(k)} = a_{ijml}^{(k)}/\alpha_k^{(0)}$, $(X_i^{(k)}, p_i^{(k)}, U_i^{(k)}) = (X_i, p_i, U_i) \frac{e^{-1}}{(k-1)!}$, $\beta_{ij}^{(k)} = \frac{f_{ij}^{(k)}}{\beta_k^{(1)}}$,

и применяя к системе обобщенный принцип суперпозиции, получим совокупность краевых задач линейной термоупругости с постоянными приведенными термоупругими характеристиками $s_{ijml}^{(k)}$, $\beta_{ij}^{(k)}$:

$$\begin{aligned} \circ \quad & \sigma_{ij,j}^{(k)} + X_i^{(k)} = 0; \quad \varepsilon_{ij}^{(k)} = s_{ijml}^{(k)} \cdot \sigma_{ml}^{(k)} + \beta_{ij}^{(k)} \vartheta^{(k)}; \\ & \varepsilon_{ij}^{(k)} = (u_{i,j}^{(k)} + u_{j,i}^{(k)})/2; \quad \sigma_{ij}^{(k)} n_j = p_i^{(k)}(M), \quad (M \in S_\sigma); \\ & u_i^{(k)} = U_i^{(k)}(M), \quad (M \in S_u). \bullet \end{aligned} \quad (15)$$

Определяя k -е компоненты решений системы (15), а затем, суммируя их по k , получим приближенное аналитическое решение поставленной задачи.

Рассмотрим применение такого подхода на решении задачи термоупругости для свободного от внешней нагрузки бесконечного сплошного изотропного термочувствительного цилиндра радиуса R , имеющего начальную температуру T_0 , и находящегося в условиях лучисто-конвективного теплообмена со средой постоянной температуры T_c .

Предположим также, что общее нормальное усилие в поперечном сечении цилиндра равно нулю.

Вначале решим соответствующую дважды нелинейную краевую задачу нестационарной теплопроводности, записанную в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \circ \quad & C_v^*(\theta) \theta_{,Fo} = (\lambda^*(\theta) \theta_{,r})_{,r} + \lambda^*(\theta) \theta_{,r} / \rho, \quad (0 < \rho < 1, \\ & Fo > 0); \quad \theta(\rho, Fo)|_{Fo=0} = 0; \quad \theta_{,r}|_{\rho=0} = 0; \quad \lambda^*(\theta) \theta_{,r}|_{\rho=1} = \end{aligned}$$

$$= Q - (G\theta + Sk(\theta^4 + 4\theta^3 S + 6\theta^2 S^2))|_{\rho=1}, \bullet \quad (16)$$

где $\theta = \vartheta/T_z$, $T_z = T_c - T_0$, $S = T_0/T_z$, $a = \lambda_0/C_{v0}$,

$$Q = Bi + SkP, \quad G = Bi + 4Sk \cdot S^3, \quad \sigma_B = \varepsilon\sigma_0, \\ \rho = r/R, \quad P = (T_c^4 - T_0^4)/T_z^4, \quad \lambda(T) = \lambda_0 \lambda^*(\theta), \\ Bi = \alpha R / \lambda_0,$$

$$C_v(T) = C_{v0} C_v^*(\theta), \quad Sk = \sigma_\lambda RT_z^3 / \lambda_0, \quad Fo = at/R^2.$$

Вводя в (16) преобразования Гудмэна и Кирхгофа

$$A(\theta) = \int_0^\theta C_v^*(\theta') d\theta', \quad B(\theta) = \int_0^\theta \lambda^*(\theta') d\theta' \quad (17)$$

с помощью дифференциальных соотношений

$$A(\theta)_{,Fo} = C_v^*(\theta) \theta_{,Fo}, \quad B(\theta)_{,\rho} = \lambda^*(\theta) \theta_{,\rho},$$

преобразуем (16) к эквивалентному виду:

$$\circ A(\theta)_{,Fo} = B(\theta)_{,\rho\rho} + \rho^{-1} B(\theta)_{,\rho}; \quad \theta|_{Fo=0} = 0; \quad \theta_{,\rho}|_{\rho=0} = 0; \\ \left\{ B(\theta)_{,\rho} = Q - (G\theta + Sk(\theta^4 + 4\theta^3 S + 6\theta^2 S^2)) \right\}_{\rho=1} \bullet \quad (18)$$

В (18) функции (17) и $\theta^{(m)}$ ($m = \overline{1, 4}$) удовлетворяют условиям Дирихле [9] на априорно выбранном интервале $(0, \theta_p)$ (θ_p – пока неопределенная постоянная), а, следовательно, их можно представить в виде следующих рядов Фурье по синусам:

$$\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{(1)} \sin(k\pi\theta / \theta_p) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta^{(k)}; \quad (19)$$

$$(A(\theta), B(\theta), \theta^{(m)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{\beta_k^{(1)}}, \frac{b_k}{\beta_k^{(1)}}, \frac{\beta_k^{(m)}}{\beta_k^{(1)}} \right) \theta^{(k)}. \quad (20)$$

где $\theta^{(k)} = \beta_k^{(1)} \sin(k\pi\theta / \theta_p)$, $(a_k, b_k, \beta_k^{(m)}) =$
 $= \frac{2}{\theta_p} \int_0^{\theta_p} (A(\theta), B(\theta), \theta^{(m)}) \sin(k\pi\theta / \theta_p) d\theta, \quad (21)$

Подставляя разложения (19), (20) и $1 = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-1}/(k-1)!$

в (18), применяя обобщенный принцип суперпозиции [9], получим совокупность линеаризованных задач теплопроводности относительно $\theta^{(k)}(\rho, Fo_k)$:

$$\circ \theta_{,Fo_k}^{(k)} = \theta_{,\rho\rho}^{(k)} + \rho^{-1} \theta_{,\rho}^{(k)}; \quad \theta^{(k)}(\rho, Fo_k)|_{Fo_k=0} = 0;$$

$$\theta_{,\rho}^{(k)}|_{\rho=0} = 0; \quad \left\{ \theta_{,\rho}^{(k)} + Bi_k \theta^{(k)} \right\}_{\rho=1} = M_k, \quad k = 1, 2, \dots, \bullet \quad (22)$$

где

$$\circ Fo_k = \alpha_k Fo, \quad \alpha_k = b_k/a_k, \quad M_k = Q \beta_k^{(1)} / (e b_k (k-1)!), \\ Bi_k = (G \cdot \beta_k^{(1)} + Sk \cdot (\beta_k^{(4)} + 4S \beta_k^{(3)} + 6S \beta_k^{(2)})) / b_k, \bullet \quad (23)$$

Используя преобразование Лапласа, решение системы (22) для любого k получим в виде [10]

$$\theta^{(k)}(\rho, Fo_k) = \\ = (M_k / Bi_k) \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} A_{ki} J_0(\mu_{ki} \rho) \cdot \exp(-\mu_{ki}^2 Fo_k) \right), \quad (24)$$

где $A_{ki} = 2Bi_k / ((\mu_{ki}^2 + Bi_k^2) J_0(\mu_{ki}))$, а μ_{ki} – корни следующего характеристического уравнения:

$$\mu_k J_1(\mu_k) - Bi_k J_0(\mu_k) = 0. \quad (25)$$

Суммируя (24) по k , согласно (19), получим решение краевой задачи теплопроводности $\theta(\rho, Fo_k) =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (M_k / Bi_k) \left(1 - \sum_{i=1}^{\infty} A_{ki} J_0(\mu_{ki} \rho) \exp(-\mu_{ki}^2 Fo_k) \right), \quad (26)$$

в котором θ_p определим из уравнения, полученного из (26) при $Fo_k \rightarrow \infty$, т. е.

$$\theta_p = \sum_{k=1}^{\infty} (M_k / Bi_k). \quad (27)$$

Определяя θ_p из уравнения (27), а по нему коэффициенты рядов Фурье (21), M_k и Bi_k из (23), A_{ki} и корни μ_{ki} характеристического уравнения (25), решение (26) будет полностью определено.

Используя (26) определим теперь соответствующее термонапряженное состояние цилиндра. Как известно, осесимметричное плоскодеформированное состояние цилиндра описывается системой уравнений, записанной в безразмерной форме:

$$\circ \bar{\sigma}_{rr,\rho} + \rho^{-1} \cdot (\bar{\sigma}_{rr} - \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}) = 0; \quad \bar{\varepsilon}_{rr} = \bar{u}_{,\rho}; \quad \bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = \rho^{-1} \cdot \bar{u}; \\ \bar{\varepsilon}_{rr} = (1/E^*(\theta)) [\bar{\sigma}_{rr} - \nu(\bar{\sigma}_{\varphi\varphi} + \bar{\sigma}_{zz})] + F^*(\theta); \\ \bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = (1/E^*(\theta)) [\bar{\sigma}_{\varphi\varphi} - \nu(\bar{\sigma}_{rr} + \bar{\sigma}_{zz})] + F^*(\theta); \\ \bar{C}_0 = (1/E^*(\theta)) [\bar{\sigma}_{zz} - \nu(\bar{\sigma}_{\varphi\varphi} + \bar{\sigma}_{rr})] + F^*(\theta); \\ \bar{\sigma}_{rr}|_{\rho=1} = 0; \quad \int_0^1 \rho \bar{\sigma}_{zz} d\rho = 0, \bullet \quad (28)$$

где $\bar{u} = (\alpha_{t0} T_z R)^{-1} u$, $\bar{\varepsilon}_{zz} = const$, $E(T) = E_0 E^*(\theta)$,
 $F(T) = \alpha_{t0} T_z F^*(\theta)$, $\alpha(T) = \alpha_{t0} \alpha_t^*(\theta)$,

$$F^*(\theta) = \int_0^\theta \alpha_t^*(\theta') d\theta',$$

$$(\bar{\sigma}_{rr}, \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}, \bar{\sigma}_{zz}) = (E_0 \alpha_{t0} T_z)^{-1} (\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{zz}),$$

$$(\bar{\varepsilon}_{rr}, \bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi}, \bar{C}_0) = (\alpha_{t0} T_z)^{-1} (\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, C_0).$$

Разлагая единицу и функции $1/E^*(\theta)$ в ряд Фурье-Бесселя, а $F^*(\theta)$ в ряд Фурье на интервале $(0, \theta_p)$

$$\circ 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(0)} J_0\left(\frac{v_k \theta}{\theta_p}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k, \quad V_k = \alpha_k^{(0)} J_0\left(\frac{v_k \theta}{\theta_p}\right),$$

$$1/E^*(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{\alpha_k^{(0)}} V_k, \quad F^*(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\beta_k^{(1)}} \theta^{(k)}, \bullet \quad (29)$$

где

$$(\alpha_k^{(0)}, g_k) = 2\theta_p^{-2} J_1^{-2}(v_k) \int_0^{\theta_p} \theta (1, 1/E^*(\theta)) J_0\left(\frac{v_k \theta}{\theta_p}\right) d\theta,$$

$$f_k = \frac{2}{\theta_p} \int_0^{\theta_p} F^*(\theta) \sin(k\pi\theta / \theta_p) d\theta$$

и подставляя (29) в (28), преобразуем ее к виду:

$$\circ \left(\bar{\sigma}_{rr} \sum_{k=1}^{\infty} V_k \right)_{,\rho} + \rho^{-1} \cdot \left(\bar{\sigma}_{rr} \sum_{k=1}^{\infty} V_k - \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} \sum_{k=1}^{\infty} V_k \right) = 0;$$

$$\bar{\varepsilon}_{rr} \sum_{k=1}^{\infty} V_k = \left(\bar{u} \sum_{k=1}^{\infty} V_k \right)_{,\rho}; \quad \bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi} \sum_{k=1}^{\infty} V_k = \rho^{-1} \cdot \bar{u} \sum_{k=1}^{\infty} V_k;$$

$$\circ \bar{\varepsilon}_{rr} \sum_{k=1}^{\infty} V_k = \bar{\sigma}_{rr} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{\alpha_k^{(0)}} V_k - \nu \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{\alpha_k^{(0)}} V_k -$$

$$- \nu \bar{\sigma}_{zz} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{\alpha_k^{(0)}} V_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\beta_k^{(1)}} \theta^{(k)};$$

$$\bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi} \sum_{k=1}^{\infty} V_k = \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{\alpha_k^{(0)}} V_k - \nu \bar{\sigma}_{rr} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{\alpha_k^{(0)}} V_k -$$

$$- \nu \bar{\sigma}_{zz} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{\alpha_k^{(0)}} V_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\beta_k^{(1)}} \theta^{(k)};$$

$$\bar{C}_0 \sum_{k=1}^{\infty} V_k = \bar{\sigma}_{zz} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{\alpha_k^{(0)}} V_k - \nu \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{\alpha_k^{(0)}} V_k -$$

$$- \nu \bar{\sigma}_{rr} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{\alpha_k^{(0)}} V_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\beta_k^{(1)}} \theta^{(k)};$$

$$\bar{\sigma}_{rr} \sum_{k=1}^{\infty} V_k \Big|_{\rho=1} = 0; \quad \int_0^1 \rho \bar{\sigma}_{zz} \sum_{k=1}^{\infty} V_k d\rho = 0, \quad \bullet \quad (30)$$

Вводя в систему (30) не зависящие от k компоненты напряжений, деформаций и перемещений под знаки сумм, используя обозначения

$$\left(\bar{\sigma}_{rr}^{(k)}, \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(k)}, \bar{\sigma}_{zz}^{(k)}, \bar{\varepsilon}_{rr}^{(k)}, \bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^{(k)}, \bar{C}_0^{(k)}, \bar{u}^{(k)} \right) =$$

$$= \left(\bar{\sigma}_{rr}, \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}, \bar{\sigma}_{zz}, \bar{\varepsilon}_{rr}, \bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi}, \bar{C}_0, \bar{u} \right) V_k,$$

$$E_k = \alpha_k^{(0)} / g_k, \quad \alpha_{tk} = f_k / \beta_k^{(1)}$$

и применяя обобщенный принцип суперпозиции, получим совокупность краевых задач термоупругости с постоянными характеристиками $E^{(k)}, \alpha_k$:

$$\circ \bar{\sigma}_{rr,\rho}^{(k)} + \rho^{-1} (\bar{\sigma}_{rr}^{(k)} - \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(k)}) = 0; \quad \bar{\varepsilon}_{rr}^{(k)} = \bar{u}_{,\rho}^{(k)}; \quad \bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^{(k)} = \rho^{-1} \bar{u}^{(k)};$$

$$\bar{\varepsilon}_{rr}^{(k)} = (1/E_k) \left[\bar{\sigma}_{rr}^{(k)} - \nu (\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(k)} + \bar{\sigma}_{zz}^{(k)}) \right] + \alpha_{tk} \theta^{(k)};$$

$$\bar{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^{(k)} = (1/E_k) \left[\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(k)} - \nu (\bar{\sigma}_{rr}^{(k)} + \bar{\sigma}_{zz}^{(k)}) \right] + \alpha_{tk} \theta^{(k)};$$

$$\bar{C}_0^{(k)} = (1/E_k) \left[\bar{\sigma}_{zz}^{(k)} - \nu (\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}^{(k)} + \bar{\sigma}_{rr}^{(k)}) \right] + \alpha_{tk} \theta^{(k)};$$

$$\bar{\sigma}_{rr}^{(k)} \Big|_{\rho=1} = 0; \quad \int_0^1 \rho \bar{\sigma}_{zz}^{(k)} d\rho = 0, \quad \bullet \quad (31)$$

Решение системы (31), полученное в [8, 10, 11], после суммирования по k , дает окончательно аналитическое решение поставленной задачи:

$$\circ \bar{u} = \rho \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k}{Bi_k} \alpha_{tk} \left\{ 1 - \frac{1+\nu}{1-\nu} \sum_{i=1}^{\infty} A_{ki} \left[\frac{J_1(\mu_{ki}\rho)}{\mu_{ki}\rho} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1-3\nu}{1+\nu} \frac{J_1(\mu_{ki})}{\mu_{ki}} \right] \exp(-\mu_{ki}^2 Fo_k) \right\};$$

$$\bar{\sigma}_{rr} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k}{Bi_k} \frac{f_k \alpha_k^{(0)}}{g_k \beta_k^{(1)}} \sum_{i=1}^{\infty} A_{ki} \left[\frac{J_1(\mu_{ki}\rho)}{\mu_{ki}\rho} - \frac{J_1(\mu_{ki})}{\mu_{ki}} \right] e^{-\mu_{ki}^2 Fo_k};$$

$$\bar{\sigma}_{zz} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k}{Bi_k} \frac{f_k \alpha_k^{(0)}}{g_k \beta_k^{(1)}} \sum_{i=1}^{\infty} A_{ki} \left[J_0(\mu_{ki}\rho) - \frac{2J_1(\mu_{ki})}{\mu_{ki}} \right] e^{-\mu_{ki}^2 Fo_k};$$

$$\bar{\sigma}_{\varphi\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k}{Bi_k} \frac{f_k \alpha_k^{(0)}}{g_k \beta_k^{(1)}} \sum_{i=1}^{\infty} A_{ki} \left[J_0(\mu_{ki}\rho) - \frac{J_1(\mu_{ki}\rho)}{\mu_{ki}\rho} - \right.$$

$$\left. - \frac{J_1(\mu_{ki})}{\mu_{ki}} \right] \exp(-\mu_{ki}^2 Fo_k); \quad \bullet \quad (32)$$

где в (32) выражение $(1-\nu)$ отнесено к $\bar{\sigma}_{rr}, \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}, \bar{\sigma}_{zz}$. Частный случай (32), без учета термочувствительности материала и лучистого теплообмена с окружающей средой, совпадает с точным решением.

Числовые расчеты по определению $\theta, \bar{\sigma}_{rr}, \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}, \bar{\sigma}_{zz}$ и \bar{u} , проделаны для решений (26) и (32) в среде MATLAB [12], для таких зависимостей физико-механических характеристик материала от температуры и значений входных числовых параметров:

$$R = 0, 2 m; \quad R = 0, 3 m; \quad \varepsilon = 0, 8;$$

$$\lambda(T) = \lambda_0 - \delta_\lambda T = 50, 24 - 0, 0293 \cdot T;$$

$$C_v(T) = C_{v0} + \delta_c T = 3392840 + 3882, 8 \cdot T;$$

$$E(T) = E_0 - \delta_E T = 20, 4 \cdot 10^{10} - 112, 19 \cdot 10^6 T, \quad Pa;$$

$$\alpha_t(T) = \alpha_{t0} + \delta_\alpha T = 1, 2 \cdot 10^{-5} + 0, 1 \cdot 10^{-7} T, \quad 1/^\circ C.$$

Экспериментально установлено, что теплообмен излучением является основным способом передачи тепла с температурой выше $800^\circ C$; около 85–95% тепла в печах передается на поверхность нагреваемых предметов излучением и лишь 5–15% конвекцией. Как известно, сталь, за исключением некоторых специальных марок, обладает упругими свойствами только до 400–500 $^\circ C$, а выше этой температуры переходит в пластическое состояние. Поэтому температурные напряжения при температуре больше чем $500^\circ C$ вызовут ее пластическое деформирование и исчезнут. Следовательно, температурные напряжения стали должны учитываться только в интервале температур от 0 до $500^\circ C$.

На графиках введены такие обозначения для параметров и линий: $\theta \div TET$; $\rho \div Ro$; $\bar{\sigma}_{rr} \div SRR$;

$\bar{\sigma}_{\varphi\varphi} \div SFF$; $\bar{\sigma}_{zz} \div SZZ$; $\bar{u} \div UR$; 1 – пунктирная линия обозначает линейное решение; 2 – штрихпунктирная, – нелинейность 1-го рода; 3 – сплошная, – решение с двойной нелинейностью в задаче теплопроводности. Влияние нелинейностей анализируются на графиках по направлению снизу вверх.

Как известно, максимальное значение коэффициента теплоотдачи при вынужденной конвекции в газе равна $\alpha = 502$, что соответствует для приведенных выше данных значению критерия $Bi = 2$.

На рис. 1–5 приведены графики $\theta, \bar{\sigma}_{rr}, \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}, \bar{\sigma}_{zz}$ и \bar{u} при двух значениях относительного радиуса ($\rho = 0; 1$) и ($R = 0, 2 m$), для $T_c = 600^\circ C$, что соответствует критерию $Sk = 0, 04$, в зависимости от критерия Fo при трех значениях $\alpha = 50, 2; 125, 5; 251$ ($Bi = 0, 2; 0, 5; 1$), что соответствует 10%, 25% и 50% от максимального $Bi = 2$.

На рис. 1 показано, що при збільшенні α , починаючи з $\alpha = 50,2$, розташування графіків, θ якісно змінюється з (2-1-3) на (2-3-1). Приведемо наступні значення критерія Fo , для подвійної нелінійності, до яких справедливі рівняння термопружності:

$Fo_1 > 3,5$; $Fo_2 = 2,31$; $Fo_3 = 1,29$, де Fo_1 відповідає $\alpha = 50,2$, $Fo_2 \rightarrow \alpha = 125,5$ і $Fo_3 \rightarrow \alpha = 251$. Такий аналіз будемо проводити тільки на поверхні циліндра, так як в центрі, критерії Фур'є, до яких справедливі рівняння термопружності, збільшуються. При ($\rho = 0$), як показано на рисунку 2, розташування графіків зберігається (2-3-1).

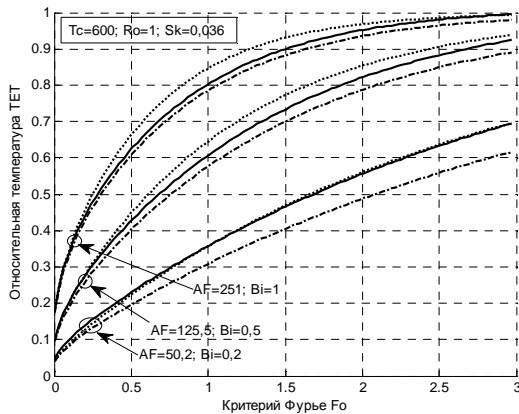


Рисунок 1 – Зависимость θ ($\rho = 1$) от критерия Fo при различных Bi и фиксированной T_c

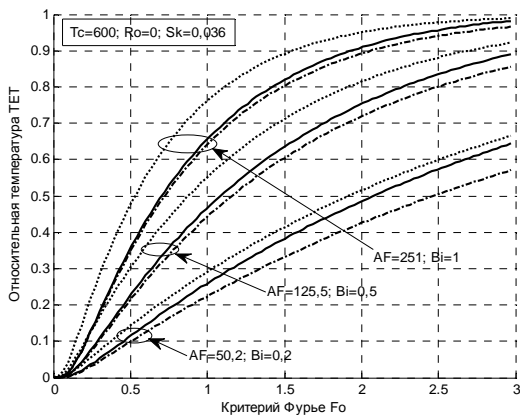


Рисунок 2 – Зависимость θ ($\rho = 0$) от критерия Fo при различных Bi и фиксированной T_c

На рис. 3 при возрастании линий до максимума, расположение графиков будет (2-3-1), а после прохождения максимума, качественно меняется на (1-2-3). Кроме того, с увеличением α , разности между максимумами сплошной и штрихпунктирной линиями уменьшаются в сторону увеличения α .

Так как $\bar{\sigma}_{zz} = \bar{\sigma}_{rr} + \bar{\sigma}_{\phi\phi}$, то $\bar{\sigma}_{zz}$ при ($\rho = 0$) будет иметь максимальное напряжение, а вид графиков не изменяется по сравнению с рис. 3.

На рис. 4 при убывании линий до минимума, расположение графиков, в направлении вниз от временной оси, будет (2-1-3), а после прохождения минимума, качественно меняется на (1-2-3). Также как и в предыдущем случае, разности по модулю между минимумами сплошной и штрихпунктирной линиями уменьшаются при увеличении α .

На рис. 5 видно, что влияния нелинейностей 1-го рода и двойной нелинейности в задаче теплопроводности на распределения \bar{u} до значения $Fo = 0,5$ проявляются незначительно, а с увеличением критерия Fo и α существенно возрастают.

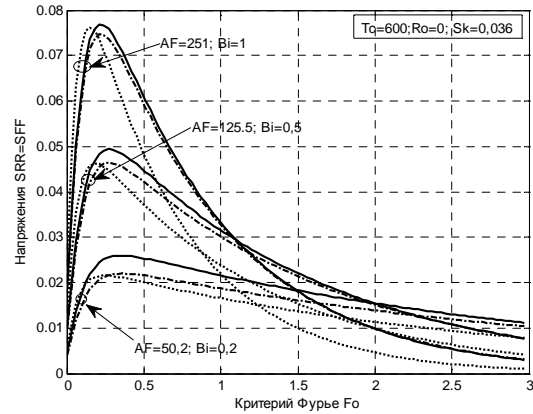


Рисунок 3 – Зависимость $\bar{\sigma}_{rr}$ и $\bar{\sigma}_{\phi\phi}$ ($\rho = 0$) от критерия Fo при различных Bi и фиксированной T_c

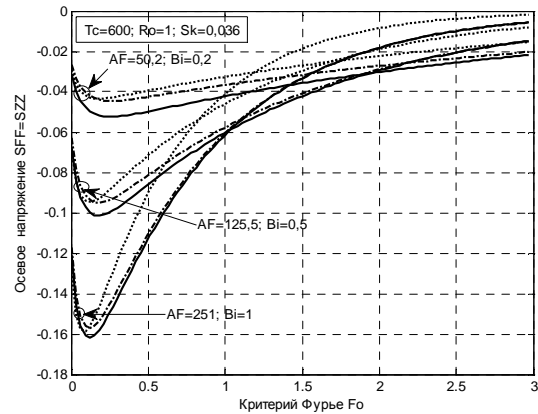


Рисунок 4 – Зависимость $\bar{\sigma}_{\phi\phi}$ и $\bar{\sigma}_{zz}$ ($\rho = 1$) от критерия Fo при различных Bi и фиксированной T_c

На рис. 6-9 приведены графики θ , $\bar{\sigma}_{rr}$, $\bar{\sigma}_{\phi\phi}$ и $\bar{\sigma}_{zz}$ при ($\rho = 0; 1$), ($R = 0,3 m$), для $\alpha = 50,2$ ($Bi = 0,3$), в зависимости от Fo при значениях $T_c = 600; 820; 1250^\circ C$ ($Sk = 0,053; 0,14; 0,5$).

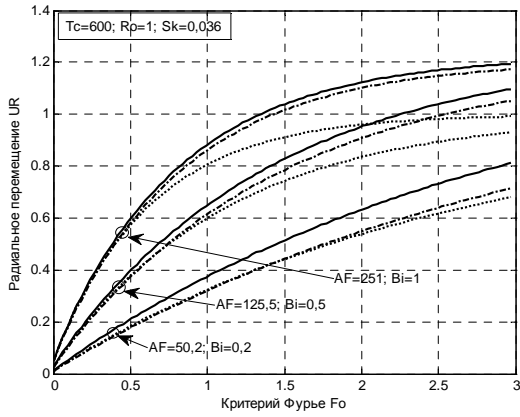


Рисунок 5 – Зависимость \bar{u} ($\rho = 1$) от критерия Fo при различных Bi и фиксированной T_c

На рис. 6 видно, что качественный переход расположения графиков θ с (2–3–1) на (2–1–3) происходит при $T_c = 600^\circ C$, а значения Fo до которых справедливы уравнения термоупругости будут такими: $Fo_1 > 3$; $Fo_2 = 1,35$; $Fo_3 = 0,27$.

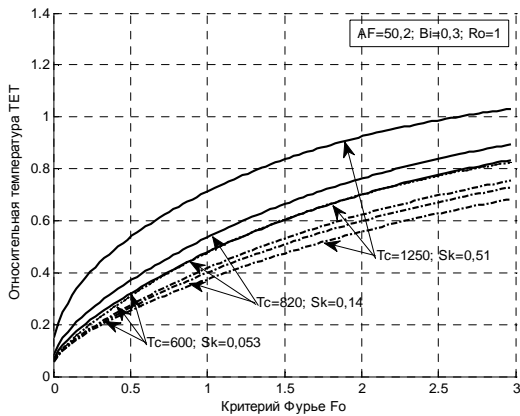


Рисунок 6 – Зависимость θ ($\rho = 1$) от критерия Fo при различных Sk и фиксированном α

На рис. 7 при увеличении T_c , сплошная и штрихпунктирные линии также расширяются относительно линейного решения. Однако качественный переход расположения графиков с (2–3–1) на (2–1–3) происходит при $T_c > 820^\circ C$.

На рис. 8 напряжения $\bar{\sigma}_{rr}$ и $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}$ качественно меняют расположение графиков с (2–1–3) на (1–2–3) при увеличении Fo и T_c . В отличие от рисунка 3, с увеличением T_c , разности между максимумами аналогичных линий увеличиваются.

На рис. 9 с увеличением T_c , разности по модулю между сплошной и штрихпунктирной линиями для экстремальных точек также увеличиваются по сравнению с рис. 8.

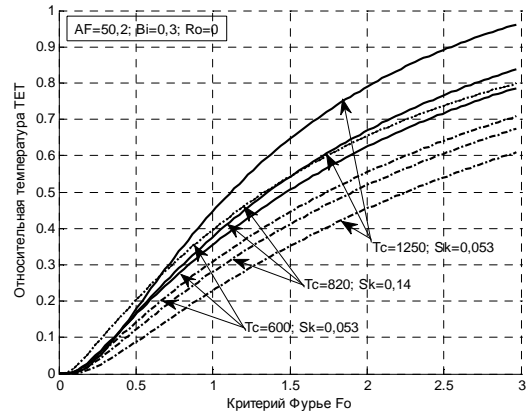


Рисунок 7 – Зависимость θ ($\rho = 0$) от критерия Fo при различных Sk и фиксированном α

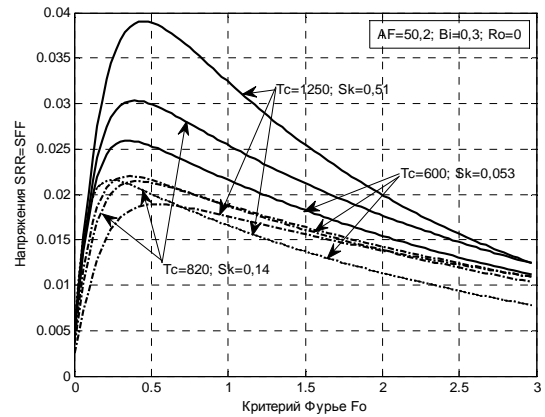


Рисунок 8 – Зависимость $\bar{\sigma}_{rr}$ и $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}$ ($\rho = 0$) от критерия Fo при различных Sk и фиксированном α

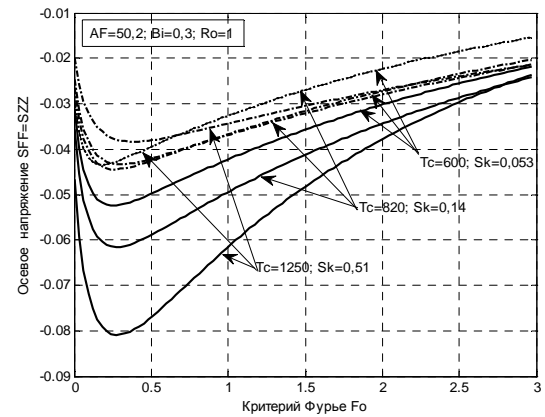


Рисунок 9 – Зависимость $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}$ и $\bar{\sigma}_{zz}$ ($\rho = 1$) от критерия Fo при различных Sk и фиксированном α

На рис. 10 и 11 приведены графики $\bar{\sigma}_{rr}$, $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}$ и $\bar{\sigma}_{zz}$ при ($\rho = 0; 1$), ($R = 0,3 i$), для $\alpha = 13$ ($Bi = 0,08$), в зависимости от Fo при тех же значениях температуры среды.

Сравнивая рис. 8 и 10 видно, что при увеличении α , увеличиваются и $\bar{\sigma}_{rr} = \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}$. Однако разности между максимумами сплошной и штрихпунктирной линиями уменьшаются.

Сравнивая рис. 9 и 11 видно, что при увеличении α также увеличиваются по модулю $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi} = \bar{\sigma}_{zz}$. Однако разности между экстремумами сплошной и штрихпунктирной линий также уменьшаются по модулю. Значения Fo достижения пределов использования уравнений термоупругости будут такими: $Fo_1 > 4,8$; $Fo_2 = 2,73$; $Fo_3 = 0,45$.

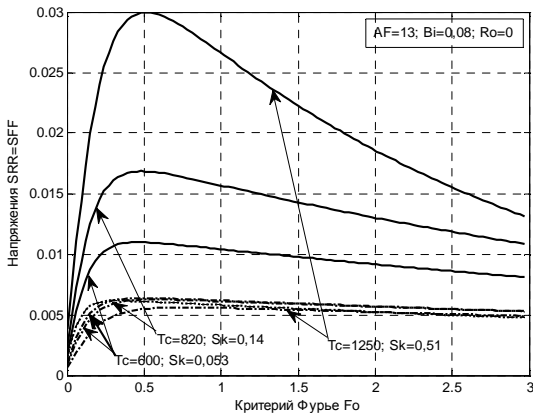


Рисунок 10 – Зависимость $\bar{\sigma}_{rr}$ и $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}$ ($\rho = 0$) от критерия Fo при различных Sk и фиксированном α

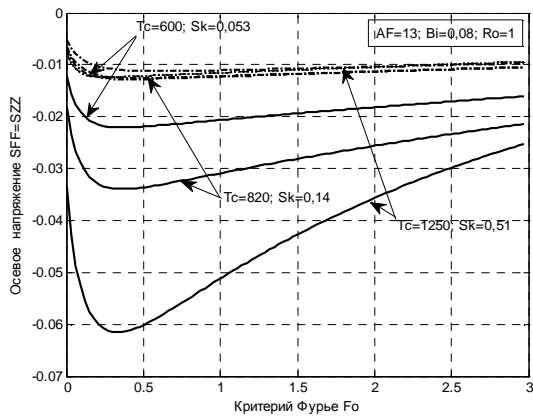


Рисунок 11 – Зависимость $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}$ и $\bar{\sigma}_{zz}$ ($\rho = 1$) от критерия Fo при различных Sk и фиксированном α

На рис. 12 видно, что $(\bar{\sigma}_{zz})_{\max} ((\bar{\sigma}_{zz})_{\min})$ достигается при $Fo_{\max} = 0,5$ ($Fo_{\min} = 0,28$), причем, температура ($\rho = 0$) ($\rho = 1$), до которой справедливы уравнения термоупругости, достигается при $Fo = 0,81 > Fo_{\max}$ ($Fo = 0,12 < Fo_{\min}$).

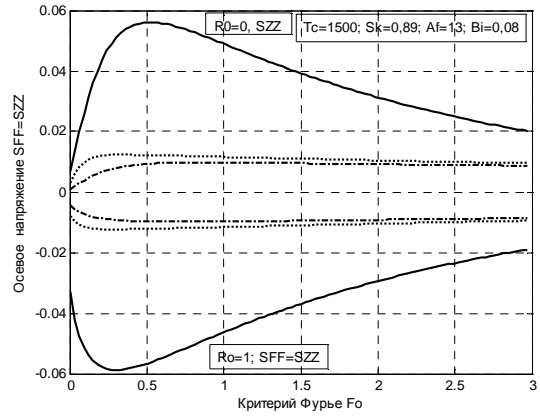


Рисунок 12 – Зависимость $\bar{\sigma}_{zz}$ ($\rho = 0; 1$) от Fo при скоростном нагреве $T_c = 1500^\circ C$ и $\alpha = 13$

ВЫВОДЫ. 1. При увеличении α для $\rho = 1$, начиная с $\alpha = 50,2$, расположение графиков θ качественно меняется с (2 – 1 – 3) на (2 – 3 – 1), а при $\rho = 0$ - сохраняется (2 – 3 – 1).

2. Для двойной нелинейности и $\alpha = 251$, уравнения термоупругости для $\rho = 1$ справедливы до значения критерия Фурье $Fo_3 = 1,29$.

3. При возрастании графиков растягивающих напряжений $\bar{\sigma}_{rr} = \bar{\sigma}_{\varphi\varphi}$ до максимальных значений, расположение графиков будет (2 – 3 – 1), а после прохождения максимума, качественно меняется на (1 – 2 – 3). Кроме того, с увеличением α , разности между максимумами сплошной и штрихпунктирной линиями уменьшаются в сторону увеличения α .

4. При убывании графиков $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi} = \bar{\sigma}_{zz}$ до минимальных значений, расположение графиков, в направлении вниз от временной оси, будет (2 – 1 – 3), а после прохождения минимума, качественно меняется на (1 – 2 – 3). Разности, по абсолютной величине, между минимумами сплошной и штрихпунктирной линиями также уменьшаются при увеличении α .

5. Влияние нелинейностей 1-го рода и двойной нелинейности в задаче теплопроводности на распределения \bar{u} до значения $Fo = 0,5$ проявляются незначительно, а с увеличением критерия Фурье и коэффициента теплоотдачи существенно возрастают.

6. Качественный переход расположения графиков θ с (2 – 3 – 1) на (2 – 1 – 3), при фиксированном $\alpha = 50,2$ и изменяющейся температуре среды происходит при $T_c = 600^\circ C$, а значение Fo , для двойной нелинейности и $T_c = 1250^\circ C$, при котором достигается предел использования уравнений термоупругости будет $Fo_3 = 0,27$. При увеличении T_c , сплошная и штрихпунктирная линии графиков θ

центре и поверхности цилиндра, расширяются относительно линейного решения.

7. С увеличением T_c , разности между максимальными значениями напряжений сплошной и штрихпунктирной линий, при постоянном α , увеличиваются.

8. С увеличением T_c , напряжения $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi} = \bar{\sigma}_{zz}$ ($\rho = 1$) цилиндра, учитывающие двойную нелинейность в задаче теплопроводности, увеличиваются по абсолютной величине, а учитывающие термочувствительность – уменьшаются.

9. При увеличении α с $\alpha = 13$ до $\alpha = 50, 2$, для тех же изменений $T_c = 600; 820; 1250^\circ C$, $\bar{\sigma}_{rr}$ и $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}$ ($\rho = 0$) увеличиваются. Однако разности между максимумами сплошной и штрихпунктирной линиями уменьшаются.

10. При увеличении α с $\alpha = 13$ до $\alpha = 50, 2$, для $T_c = 600; 820; 1250^\circ C$, $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}$ и $\bar{\sigma}_{zz}$ ($\rho = 1$) увеличиваются по модулю. Однако разности по модулю между экстремальными значениями сплошной и штрихпунктирной линий также уменьшаются.

11. Для скоростного нагрева $T_c = 1500^\circ C$, $(\bar{\sigma}_{zz})_{\max}$ ($\rho = 0$) достигается при $Fo_{\max} = 0,5$.

12. Для скоростного нагрева $T_c = 1500^\circ C$, $(\bar{\sigma}_{zz})_{\max}$ ($\rho = 1$) по модулю достигается при $Fo_{\min} = 0,28$, причем, значение Fo достижения предела использования уравнений термоупругости будет таким: $Fo = 0,12 < Fo_{\min}$.

Дальнейшая научная работа будет направлена на аналогичные исследования для трансверсально-изотропного цилиндра, сделанного из графита.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зайцев Е.П. Суперпозиция уравнений трехмерной нелинейной нестационарной теплопроводности анизотропных термочувствительных тел // Вісник Кременчуцького національного університету

імені Михайла Остроградського. – Кременчук: КрНУ. – 2010. – Вип. 5(64). Част. 1. – С. 44–48.

2. Зайцев Е.П. Влияние тепловой анизотропии и двойной нелинейности на температурное поле сплошного бесконечного трансверсально-изотропного цилиндра // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук: КрНУ, 2016. – Вип. 4 (99). – С. 23–29.

3. Кушнір Р.М., Попович В.С. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під ред. Я.Й. Бурака, Р.М. Кушніра: Термопружність термочувливих тіл. – Львів: СПОЛОМ, 2009. – 409 с.

4. Термопружний стан безмежного кругового термочувливого циліндра за умови конвективно – променевого теплообміну з довкіллям / В. Попович, Г. Гарматій, Р. Кушнір // Вісн. Донецьк. ун – ту. Сер. А. Природничі науки. – 2008. – Вип. 1. – С. 113–120.

5. Моделювання і дослідження термомеханічної поведінки термочувливих тіл за врахування впливу теплового випромінювання / Р.Ф. Терлецький, М.Б. Брухаль, Ю. В. Немировський // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – 56, № 2. – С. 212–224.

6. Аналитические решения квазистатических задач термоупругости с переменными физическими свойствами среды / В. А. Кудинов, А. Э. Кузнецова, А. В. Еремін // Вест. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2014. – №2 (35). – С. 130–135.

7. Noda N. Thermal Stresses in Materials with Temperature-Dependent Properties, App. Mech. Review, Vol. 44, 1991. – pp. 383–397.

8. Noda N. Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties // In: Thermal Stresses I. – Amsterdam: Elsevier, 1986. – pp. 391–483.

9. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Изд. МГУ, 1999. – 799 с.

10. Карташов Э.М., Кудинов В. А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. – М.: «Либроком», 2012. – 656 с.

11. Noda N., Hetnarski R.B. and Tanigawa Y. (2003), Thermal Stresses, 2nd edition. Taylor and Francis, New York.

12. MATLAB 7: программирование, численные методы / Ю.Л. Кетков, А.Ю. Кетков, М.М. Шульц. – СПб.: БХВ – Петербург, 2005. – 752с.

SUPERPOSITION OF THE MAIN EQUATIONS OF QUASISTATIC THERMOELASTICITY OF ANISOTROPIC THERMOSENSITIVE BODIES

Y. Zaytsev

Kirovograd Flight Academy of National Aviation University

vul. Dobrovolskiy, 1, Kirovohrad, 25005, Ukraine. E-mail: zaytsev-knu@mail.ru

Purpose. To develop and test a new approach to solving the problems of quasi-static thermal elasticity of anisotropic thermo-sensitive bodies, which are exposed to high-temperature heat exchange with the environment. **Methodology.** A new approach to solving the problem of anisotropic thermo-sensitive bodies nonlinear transient heat conduction problems has been applied to the thermal elasticity corresponding quasi-static problem superposition. For this purpose, physical and mechanical characteristics depending on the temperature, and the unit is expanded in the 1st type Fourier-Bessel on the relative temperature variations interval, enter them in each system equation and applying a generalized superposition, it has been obtained a set of boundary value problems of the linear thermal elasticity with constant given thermal elastic characteristics of the material. Determining the k-th solution components of the system and then summing them according to k, the approximate analytical solution of the problem has been gained. **Results.** The 1st type nonlinearity and the double nonlinearity on the temperature distribution, stresses and displacements for cases of convec-

tion change at a constant temperature environment and the temperature changes of the medium, up to high-speed heating, with constant convection change on a large number of numerical calculations applied to infinite isotropic solid cylinder, the qualitative effect has been demonstrated. **Originality.** The proposed approach allows to obtain analytical solutions to thermal elasticity complex problems and analyze the processes that have been studied in a wide range of material physics-mechanical characteristics and heat exchange conditions with the environment. **Practical value.** The developed approach to the solution of quasi-static thermal elasticity problems allows take into account most fully and adequately the anisotropy, the sensitivity of the material and high temperature heat exchange with the environment in the temperature, stresses and structural elements displacements determination, working in a wide range of temperatures. In addition, this method allows use it as a receipt of test solutions in the complex structural elements calculations.

Key words: thermal conductivity, thermal elasticity, thermal sensitivity, superposition, high temperature heat transfer, Goodman and Kirchhoff conversion, Fourier and Fourier-Bessel series.

REFERENCES

1. Zaytsev, Y. P. (2010), "Superimposition of 3-dimensional nonlinear transient heat conduction levels of anisotropic thermosensitive bodies", *Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University*, iss 5 (64), part 1, pp. 44 – 48.
2. Zaytsev, Y. P. (2016), "Influence of the double nonlinearity on the infinite cylinder temperature field at zonal high-temperature heat exchange", *Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University*, iss 3 (98), part 1, – pp. 33 – 40.
3. Kushnir, R. M., Popovych, V. S. (2009) *Modelyuvannya ta optymizatsiya v termomehanitsi elektroprovodnyh neodnorodnyh til. Termoprujnitsi termoshytluvuh til* [Modelling and optimization in thermomechanics of electrically conductive heterogeneous bodies. Thermoelasticity of temperature-dependent bodies], Lviv, Ukraine.
4. Popovych, V., Harmatiy, H, Kushnir, R. (2008), "Thermoelastic state of infinite thermosensitive circular cylinder conditioned upon the convective-radial heat exchange with surrounding air". *Newsletter of Donetsk university. Natural sciences.* –iss. 1. – pp. 113-120.
5. Terletsy, R. F., Bruhal, M. B., Nemirovsky, Y. V. (2013) "Simulation and research of thermomechanical behavior of thermosensitive bodies in terms of influence of thermal radiation", *Mathematical methods and physico-mechanical fields.* 2013. – iss 2(56), – pp. 212-224.
6. Kudinov, V., Kuznetsova, A., Eremin, A. (2014) "Analytical decisions of quasistatic tasks of thermoelasticity with variable physical properties of the environment", *Journal of Samara State Techical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, iss 2(35), pp. 130–135.
7. Noda, N., (1991), "Thermal Stresses in Materials with Temperature-Dependent Properties", *App. Mech. Review*, Vol. 44, pp 383-397.
8. Noda, N. (1986) "Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties" *In: Thermal Stresses I. – Amsterdam: Elsevier.* – pp. 391 – 483.
9. Tikhonov, A.N., Samarsky, A.A. (1999) *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. – Publ. house MGU, Moscow, Russia.
10. Kartashov, E. M. (2012), *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel* [Analytical methods in solid bodies thermal conduction theory], Higher school, Moscow, Russia.
11. Noda, N., Hetnarski, R. B. and Tanigawa, Y. (2003), *Thermal Stresses*, 2nd edition. Taylor and Francis, New York.
12. Ketkov, Y. L., Ketkov, A. Y., Shults, M. M. (2005), *MATLAB 7: programmirovaniye, chislennyye metody* [MATLAB 7: programming, numerical methods], Science, Sankt-Petersburg, Russia.

Стаття надійшла 30.01.2017.