

ОБ ИЗГИБНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ ПОРОД КРОВЛИ УГОЛЬНОГО ПЛАСТА ПРИ ДЕЙСТВИИ УДАРНЫХ НАГРУЗОК

С. В. Подкопаев, Е. И. Конопелько, И. В. Иорданов, Д. А. Чепига, А. В. Положий

Государственное высшее учебное заведение «Донецкий национальный технический университет»
пл. Шибанкова, 2, г.Покровск, Донецкая обл., 85300, Украина. E-mail: daria.chepiha@donntu.edu.ua

Для анализа напряженно-деформированного состояния боковых пород при поддержании горных выработок и способе управления горным давлением закладкой выработанного пространства, породы кровли разрабатываемого угольного пласта можно представить в виде консольной балки, а закладочный массив – податливой опоры. В дискретных моделях, при изгибных колебаниях системы, состоящей из податливой опоры - пружины постоянной жесткости и консольной балки, которая опирается на эту опору, в результате обрушения на балку породного блока, последняя перемещается и деформируется. Деформации, вызванные соответствующими перемещениями, достигают своего наибольшего значения не одновременно с окончанием действия внешней силы, обеспечивающей максимальный прогиб консоли, а через некоторый промежуток времени одно после другого, из-за сдвига фазы во времени. В результате этого, максимальное количество энергии, затрачиваемой для деформации балки определенной длины, зависит от массы падающего на балку породного блока и расстояния от места соударения тел относительно податливой опоры, с учетом ее демпфирующих свойств. В конечном итоге, при исследовании соотношений между действием внешней силы и откликом осциллятора, когда место соударения падающего породного блока с балкой ближе к податливой опоре, жесткость которой постоянна и не зависит от величины внешней нагрузки, отклик опоры во времени будет отставать от воздействия, на максимальную величину.

Ключевые слова: консоль, обрушения, колебания, давление, нагрузки, моделирование, закладка.

ПРО ЗГИНАЛЬНІ ДЕФОРМАЦІЇ ПОРІД ПОКРІВЛІ ВУГІЛЬНОГО ПЛАСТА В РЕЗУЛЬТАТІ ДІЇ УДАРНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

С. В. Подкопасв, Є. І. Конопелько, І. В. Іорданов, Д. А. Чепіга, А. В. Положий

Державний вищий навчальний заклад «Донецький національний технічний університет»
пл. Шибанкова, 2, м. Покровськ, Донецька обл., 85300, Україна. E-mail: daria.chepiha@donntu.edu.ua

Для аналізу напружено-деформованого стану бічних порід при підтриманні гірничих виробок та способу управління гірничим тиском закладкою виробленого простору, породи покрівлі вугільного пласта, який розробляється, можна представити у вигляді консольних балок, а закладний масив - піддатливої опори. У дискретних моделях при згинальних коливаннях системи, що складається з піддатливої опори - пружини постійної жорсткості та консольної балки, яка спирається на цю опору, в результаті обвалення на балку породного блоку, остання переміщається і деформується. Деформації, викликані відповідними пересуваннями, досягають своєї найбільшої величини не одночасно із закінченням дії зовнішньої сили, що забезпечує максимальний прогин породної консоли, а через деякий проміжок часу одно після іншого, через переміщення фаз у часі. В результаті цього максимальна кількість енергії, що витрачається на деформацію балок певної довжини, залежить від маси падаючого на балку породного блоку та відстані від місця зіткнення з відносно піддатливою опорою, з урахуванням її демпфуючих властивостей. У кінцевому підсумку, при дослідженні співвідношення між дією зовнішньої сили та реакцією осцилятора, коли місце зіткнення падаючого породного блоку з балкою ближче до податливої опори, жорсткість якої постійна і не залежить від величини зовнішнього навантаження, відклик опор в часі буде відставати від впливу на максимальну величину. Застосування піддатливої опори з постійним значенням жорсткості, забезпечує стійкість бічних порід в околицях підтримуваних виробок при раптових обваленнях розширеної товщі або посадках основної покрівлі. При цьому необхідно брати до уваги параметри породної консоли, ширину привибійного простору і масу порід, які обвалилися. Але застосування в моделях пружини постійної жорсткості не відображає реальної поведінки закладного масиву, тому важливо в майбутніх дослідженнях виявити залежність впливу зміни жорсткості піддатливої опори на експлуатаційний стан гірничих виробок, що підтримуються.

Ключові слова: консоль, обвалення, коливання, тиск, навантаження, моделювання, закладка.

АКТУАЛЬНОСТЬ РАБОТЫ. Добыча полезных ископаемых в подземных условиях сопровождается целым рядом факторов, приводящих к повышенной опасности для людей и негативному воздействию на окружающую среду. В реальных условиях разработки месторождений полезных ископаемых, породы междупластья в углепородном массиве представляют собой чередующиеся слои угольных пластов, прослоев из самых различных пород. Отличительная особенность такого массива заключается в том, что во всех случаях, контакт между слоями представлен глинистыми разностями. В зонах разгрузки, глини-

стые породы, увеличиваясь в объеме, отрывают слои более прочных пород и формируют условия обрушения. Расслоившиеся боковые породы представляют собой блочный массив, состоящий из балок различной длины. Причем породы кровли, представленные в виде породной консоли, одновременно изгибаются и неконтролируемо обрушаются позади очистного забоя, создавая неблагоприятную геомеханическую обстановку в окрестности поддерживаемых горных выработок [1]. При отработке угольных пластов с труднообрушаемыми кровлями нередко возникают ситуации, в процессе которых

происходят вторичные осадки пород кровли с динамическими проявлениями горного давления со стороны боковых пород [2].

Внезапность возникновения таких ситуаций является одной из особенностей разработки угольных пластов в сложных горно-геологических условиях. Вместе с тем, это обуславливается не только горно-геологическими, но и горно-техническими факторами. К последним следует относить несоответствие применяемых способов управления кровлей, средств и способов крепления горных выработок конкретным условиям их эксплуатации. Изучение природы и особенностей обрушений, как разновидности динамических нагрузок при проявлении горного давления, их влияние на состояние боковых пород и, на основе этого, разработка мероприятий, направленных на повышение устойчивости пород кровли, как основного грузонесущего элемента угленосного массива, вмещающего выработки, будет способствовать повышению безопасности труда горнорабочих и сохранению горных выработок в эксплуатационном состоянии.

Характерной особенностью динамических нагрузок является то, что в результате их воздействия на породы кровли, в последних возникают колебания. Меняющаяся по величине нагрузка, имеющая место при обрушениях боковых пород, если точка ее приложения перемещается, вызывает нестационарные колебания [3]. Во многих случаях, представляющих не только научный, но и практический интерес, скорости соударения при обрушении расслоившейся толщи таковы, что материал – боковые породы, испытывает значительные необратимые деформации и разрушается. В связи с этим, проблема описания основных характеристик такого процесса и прогноза его последствий, сводится к начально-краевой задаче динамической теории упругости. В результате этого, количественное описание изучаемого процесса значительно усложняется, и для корректного решения задачи требуются, с одной стороны, сведения о свойствах материала при его неупругом деформировании и разрушении, а с другой – модельные построения для адекватной ее математической формулировки [4].

В динамических задачах, в частности в задачах о колебаниях, положение точек системы изменяется с течением времени и установленные координаты являются функциями времени [5]. Основная задача такого динамического исследования состоит в нахождении этих функций, т.е. в определении закона движения рассматриваемой системы. Очевидно, понятие устойчивости боковых пород и горных выработок, тесно связано с учением о колебаниях, имеющих место при проявлении динамических (ударных) нагрузок. Именно поэтому проблема соударения твердых тел и возникающих при этом колебаний представляет собой целое научно-техническое направление исследований, в т.ч. и для повышения безопасности труда на угольных шахтах, где имеют место обрушения расслоившейся породной толщи и посадки пород кровли.

Исследованиями ДонУГИ и ДонНТУ [6, 7] ранее было установлено, что закладочный массив предот-

вращает развитие сдвижений горных пород в окрестности выработок и создает зоны устойчивых пород позади очистного забоя. По всей видимости, закладочный массив или податливые опоры, на которые опираются породы кровли, устраняют негативные явления, проявляющиеся в угленосном массиве при внезапных обрушениях расслоившейся толщи или посадках основной кровли.

С целью изучения состояния боковых пород при действии на них динамических нагрузок, в виде внезапных обрушений расслоившейся толщи, на дискретных моделях из эквивалентных материалов, когда породы кровли разрабатываемого угольного пласта рассматривали в виде консольной балки, определенной длины, которая опирается на податливую опору – пружину постоянной жесткости, необходимо установить влияние на них ударных нагрузок и возникающих при этом изгибных деформаций.

МАТЕРИАЛ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ. В реальных условиях разработки угольных пластов при изучении изгибных колебаний пород кровли, которые поддерживаются податливой опорой, в результате внезапных посадок основной кровли или обрушений расслоившейся толщи, из-за труднодоступности к месту выполнения замеров и, в соответствии с этим, получения экспериментальных данных, исследуемые объекты заменяются соответствующими моделями.

Исследования на моделях из эквивалентных материалов были проведены на специальном стенде (рис. 1), в лаборатории горного давления ДонНТУ*), когда породы кровли угольного пласта были представлены в виде породной консольной балки длиной $L_0=0,6$ м, толщиной $h=0,04$ м и шириной $B=0,04$ м. Масса балки соответствовала $m_0=2,29$ кг, модуль упругости $E=8747$ МПа, плотность $\rho=2095$ кг/м³. Балка была изготовлена из песчано-цементной смеси, согласно рекомендаций [8] и нагружалась внешней силой F , (Н) и собственным весом G , (Н). Один конец балки был жестко зашпелен, другой опирался на податливую опору – пружину постоянной жесткости C , (Н/м).

Число наблюдений n , которое необходимо выполнить для получения надежных и достоверных результатов исследований, с показателем точности $\varepsilon=5\%$, было установлено по выражению

$$n = \frac{V_c^2 t_{ct}^2}{\varepsilon^2}, \quad (1)$$

где V_c – коэффициент вариации, принимаем равным $V_c = 8\%$; t_{ct} – критерий Стьюдента, $t=1,96$.

и соответствовало $n \approx 10$.

Известно [9, 10], что пружины имеют свои собственные константы, которые определяют их жесткость. Существует зависимость, которая подчиняется закону Гука и связывает силу и жесткость пружины, а также смещение пружины от своего первоначального положения. Для определения жесткости пружины, был рассмотрен пружинный маятник [9], состоящий из металлической пружины и груза массой m , (кг). При проведении исследований пружину рассматривали как тело начальной длины l_n , (м),

подвергающееся сжатию. В состоянии равновесия, вес груза, находящегося на пружине, уравновешивался силой ее упругости, т.е. выполнялось соотношение

$$mg = C_n \Delta l_n, \quad (2)$$

где C_n – жесткость пружины, Н/м; Δl_n – величина сжатия пружины под действием груза, м.

Исходя из этого, при определении жесткости пружины в лабораторных условиях были отобраны три груза, имеющие различные массы m , (кг). Для каждого груза соответствующей массы, было выполнено по 10 измерений определения величины сжатия пружины. Экспериментальные данные по определению жесткости пружины представлены в табл. 1.

Таблица 1 – Определение жесткости пружины C_n , (Н/м) в лабораторных условиях

Масса груза, m , кг	Вес груза, mg , Н	Величина сжатия, Δl , м	Жесткость, C_n , Н/м	Среднее значение жесткости, C_n , Н/м
1,227	12,044	0,0148	813,79	816,04
1,127	11,058	0,0134	825,25	
0,956	9,385	0,0116	809,07	

В реальных условиях, закладочный массив обладает коэффициентом жесткости – модулем упругости, равным образом, как и пружины, у которой этот коэффициент характеризует величину дополнительной нагрузки. Считается, что при действии на пружину нагрузки, ее статическая и динамическая жесткость одинакова [11]. В данной модели, пружина представляет элемент рассматриваемой системы, как и податливая опора, поддерживающая породы кровли угольного пласта.

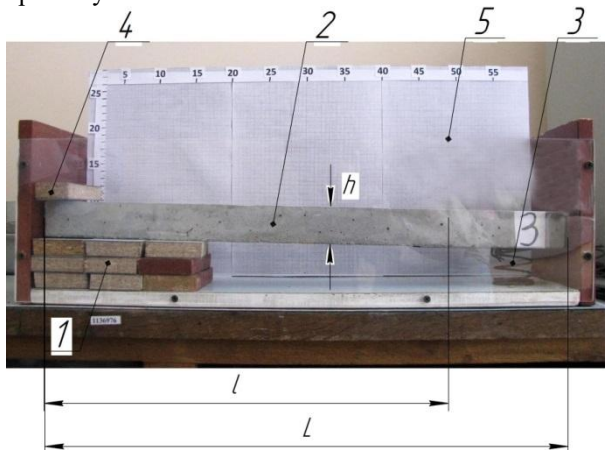


Рисунок 1 – Общий вид модели из эквивалентных материалов для изучения изгибных деформаций пород кровли угольного пласта при обрушении породного блока: 1 – угольный пласт; 2 – непосредственная кровля мощностью h , м; 3 – пружина с жесткостью C_n , Н/м; 4 – жесткое закрепление консольной балки; 5 – стенд с координатными сетками; L – длина балки, м; l – расстояние от жесткой опоры до места падения породного блока, м

Изгибные деформации пород кровли угольного пласта определяют устойчивость балки, а безразмерная величина y , в рассматриваемой системе, является ее прочностной характеристикой и зависит от основных параметров, т.е.

$$y = f(h, B, L_6, G, F, E). \quad (3)$$

Используя π -теорему и значимость каждого из перечисленных в (3) параметров, когда в качестве независимых размерностей выбраны (н) и (м) [12], параметрическое уравнение в безразмерном виде можно представить как

$$y = f\left(\frac{B}{L_6}; \frac{h}{L_6}; \frac{E}{\rho g L_6}; \frac{F}{EL^2}\right), \quad (4)$$

из чего следует, что в рассматриваемой модели, определяющим является линейный масштаб. Остальные масштабы вычислялись через линейный масштаб на основе известных физических закономерностей [12].

При изготовлении и испытании моделей все критерии подобия были выбраны с учетом рекомендаций [12]. Масштаб моделирования соответствовал 1:100. Всего было отработано 60 моделей.

Особенностью ударных нагрузок является то, что при их действии, рассматриваемая модель переходит в состояние движения. Исходя из этого, для моделирования удара на консольную породную балку, с высоты $H=0,3$ м однократно сбрасывали груз массой m , (кг) на различном расстоянии l , (м) от жесткой опоры, в результате чего балка перемещалась. Масса падающего груза соответствовала $m_1=0,04$ кг, $m_2=0,192$ кг и $m_3=0,63$ кг. Расстояние l , (м) от жесткой опоры до места соударения породного блока с балкой изменялось и соответствовало $l_1=0,3$ м, $l_2=0,35$ м, $l_3=0,4$ м, $l_4=0,45$ м, $l_5=0,5$ м, $l_6=0,55$ м.

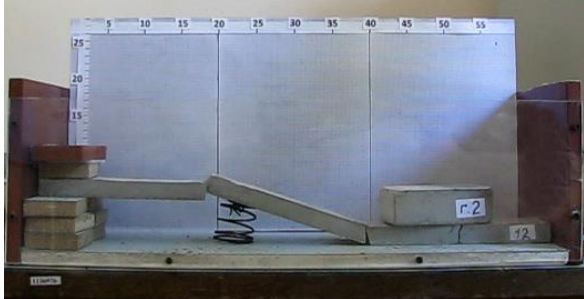
Все перемещения балки регистрировались цифровой фотокамерой на специальном стенде. По фотографическим изображениям, с помощью пиксельных координат точек, используя основные принципы фотограмметрии [13], определялись форма, размеры и положение исследуемой модели в пространстве до и после падения породного блока.

При изучении изгибных деформаций на дискретных моделях, рассматривались и другие варианты расположения податливой опоры – пружины, относительно жесткого защемления балки, когда изменялась ее высота – мощность пород непосредственной кровли h , (м) и ширина призабойного пространства a , (м). Так, при увеличении массы падающего породного блока до $m=0,92$ кг, при высоте балки $h=0,02$ м и ширине призабойного пространства $a=0,2$ м, в результате падения блока произошло нарушение целостности породной консоли. Однако при этом, в пределах призабойного пространства над очистной выработкой, образовался устойчивый свод (рис. 2,а).

В результате падения породного блока массой $m=0,92$ кг на балку, высота которой была увеличена в 2 раза, т.е. $h=0,04$ м, когда ширина призабойного пространства соответствовала $a=0,2$ м, устойчивость рассматриваемой системы была нарушена и даль-

нейшие исследования изгибных колебаний, не представлялись возможным (рис. 2,б).

Очевидно, основными параметрами, влияющими на устойчивость рассматриваемой системы, являются высоты балки – мощность пород непосредственной кровли, ее длина и масса падающего породного блока, но с учетом жесткости податливой опоры.



а)



б)

Рисунок 2 – Характер взаимодействия на моделях из эквивалентных материалов падающего породного блока массой m , (кг) с балкой на упругом основании – пружине, жесткостью C_n , (Н/м) при различной высоте балки – мощности пород непосредственной кровли h , (м) и ширине призабойного пространства $a=0,2$ м, когда $m=0,92$ кг, $C_n=816,04$ Н/м:

а) $h=0,02$ м; б) $h=0,04$ м

На следующем этапе исследований при испытании моделей, в результате действия внешней силы, экспериментально была установлена величина прогиба балки x_0 , (м), которая опиралась на пружину, жесткость которой равна $C_n=816,04$ Н/м. Породный блок массы m , (кг) одноразово падал на балку в точку, удаленную на расстоянии l , (м) от места жесткого заземления консоли. Коэффициент восстановления при ударе соответствовал $k_b=1$, т.е. рассматривался упругий удар. Зависимости, отражающие изменение прогиба балки x_0 , (м) длиной L , (м), при проведении таких исследований, представлено на рис. 3.

Из приведенных зависимостей (рис. 3) видно, чем ближе место соударения породного блока с балкой к податливой опоре – пружине, тем величина смещений больше. С увеличением массы падающего блока, величина смещений балки так же увеличивается. Установлено, что для породного блока массой $m=0,63$ кг, величина прогиба балки изменяется от $x_0=0,0012$ м при расстоянии $l_1=0,3$ м, до $x_0=0,0088$ м при $l_1=0,55$ м, т.е. увеличивается приблизительно в 7 раз (рис. 3).

При решении задач о действии динамических нагрузок на систему с податливой опорой, возникает необходимость в определении не только перемещений балки и самой податливой опоры, но и определении амплитуды и частоты собственных колебаний моделируемой системы.

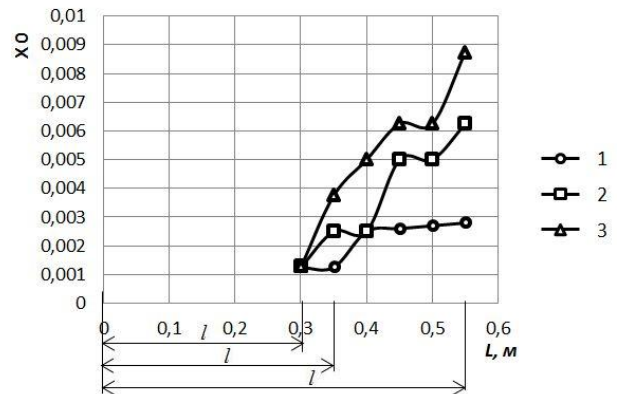


Рисунок 3 – Зависимости величины смещения балки x_0 , (м) длиной L , (м), свободный конец которой опирается на пружину постоянной жесткости $C=816,04$ Н/м при падении породного блока массы m , (кг) на различном расстоянии l , (м):
1 – $m=0,04$ кг, 2 – $m=0,192$ кг, 3 – $m=0,63$ кг

Амплитуда собственных колебаний моделируемой системы, в таких случаях, определяется как в [10] по выражению

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}, \quad (5)$$

где k – круговая частота собственных колебаний системы с учетом затухания, 1/с.

и зависит от величины смещения балки x_0 , (м), скорости падения породного блока $v_0 = \sqrt{2gH}$ и частоты колебаний k , (1/с).

На рис. 4 представлены зависимости, отражающие изменение амплитуды колебаний A , (м) балки длиной $L=0,6$ м при падении на нее блока массы m , (кг) на различном расстоянии l , (м) от жесткой опоры.

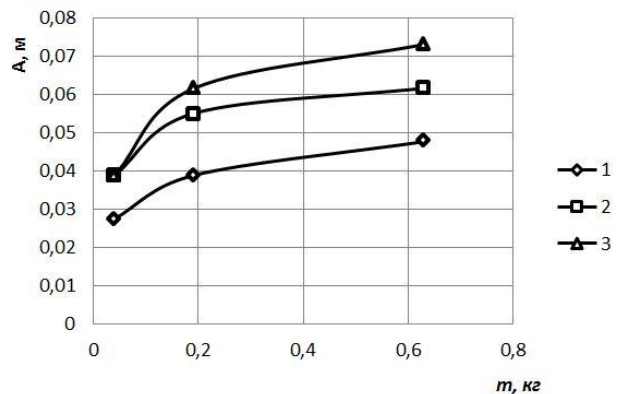


Рисунок 4 – Зависимости амплитуды колебаний балки A , (м) длиной $L=0,6$ м при падении блока массы m , (кг) на расстоянии l , (м):
1 – $l=0,35$ м, 2 – $l=0,45$ м, 3 – $l=0,55$ м

При проведенні експериментів встановлено, що при $k_b=1$, з увеличением массы падающего блока m , (кг), амплитуда колебаний A , (м) увеличивается с $A=0,048$ м при $l=0,35$ м, до $A=0,072$ м при $l=0,55$ м, т.е. 1,5 раза (рис. 4). Причем, во всех случаях, наибольшее значение амплитуды A , (м), зарегистрировано на расстоянии $l=0,55$ м, т.е. ближе к пружине (рис. 4).

Круговая частота собственных колебаний k , (1/с) такой системы, с увеличением массы m , (кг) падающего блока уменьшается. Чем ближе место соударения породного блока с балкой к податливой опоре, т.е. больше расстояние l , (м) в модели, тем меньше исследуемая величина k , (1/с) (рис. 5).

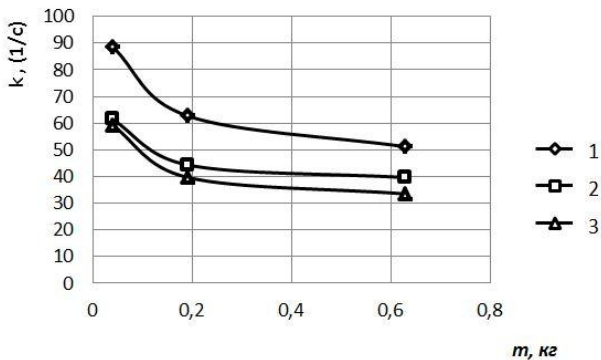


Рисунок 5 – Зависимости круговой частоты k , (1/с) моделируемой системы при падении на балку длиной $L=0,6$ м блока массы m , (кг) на расстоянии l , (м): 1 – $l=0,35$ м, 2 – $l=0,45$ м, 3 – $l=0,55$ м.

С учетом затухания колебаний, когда коэффициент затухания $\beta < k$, их период можно определить как в [9, 14] по выражению

$$T = \frac{2\pi}{k}, \quad (6)$$

а их количество в единицу времени

$$\nu = \frac{k}{2\pi}. \quad (7)$$

В результате выполненных исследований установлено, что в рассматриваемой системе с увеличением массы породного блока m , (кг), период колебаний T , (с) увеличивается, а количество колебаний в единицу времени ν , (1/с), наоборот – уменьшается (рис. 6). Чем ближе к пружине место соударения породного блока с балкой, тем больше период колебаний T , (с) и меньше их количество в единицу времени ν , (1/с) (рис. 6).

В таких условиях, число полных колебаний N_e , совершаемых системой за время, в течение которого продолжают собственные колебания, уменьшается (рис. 7). Так, при падении на балку блока массой $m=0,63$ кг при $l=0,3$ м число заметных колебаний соответствует $N_e=198$. При увеличении расстояния до $l=0,5$ м их число уменьшается до $N_e=75$ (рис. 7). Очевидно, чем ближе удар к податливой опоре, в нашем случае к пружине, тем быстрее происходит затухание колебаний.

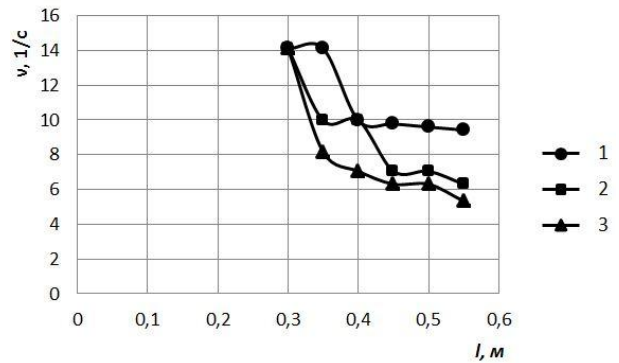


Рисунок 6 – Уменьшение количества колебаний в единицу времени ν , (1/с) (б) для балки длиной $L=0,6$ м при падении блока различной массы m , (кг) на расстоянии l , (м): 1 – $m=0,04$ кг, 2 – $m=0,192$ кг, 3 – $m=0,63$ кг

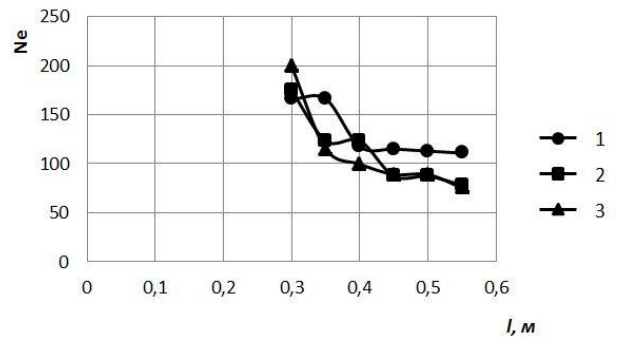


Рисунок 7 – Изменение числа полных колебаний N_e , совершаемых системой за время, в течение которого продолжают собственные колебания от места падения блока массой m , (кг) по длине консольной балки L , (м): 1 – $m=0,04$ кг, 2 – $m=0,192$ кг, 3 – $m=0,63$ кг

Физический процесс собственных колебаний системы характеризуется ее добротностью D , величина которой определяется по выражению [9, 15]

$$D = \pi N_e, \quad (8)$$

где N_e – число полных колебаний, совершаемых системой за время, в течение которого продолжают собственные колебания.

На рис. 8 приведены зависимости, отражающие изменение добротности D рассматриваемой системы, при соударении породного блока различной массы m , (кг) с балкой, на различном расстоянии l , (м).

Установлено, чем ближе место соударения породного блока с балкой к пружине, тем добротность системы D меньше (рис. 8). Так, при соударении с балкой на расстоянии $l=0,55$ м, в одном случае блока массой $m=0,192$ кг и, в другом – $m=0,63$ кг, величина добротности системы D практически одинаковая. Однако, на расстоянии $l=0,3$ м от жесткой опоры, разница в определении величины добротности D , составляла 18-20 % (рис. 8). Как показали проведенные лабораторные исследования изучения колебательного процесса, при увеличении добротности колебательной системы, последняя становится более чувствительной к воздействию возмущающей силы и разрушению и, чем больше величина внешней

силы, тем величина добротности D больше. В связи с тем, что податливая опора служит демпфером колебаний системы, важнейшим ее свойством должно быть уменьшение величины добротности. Тем не менее, при добротности системы $D < 100$, она считается неэффективной, с точки зрения изучения колебаний, а при $D \leq 0,5$ в ней вообще нет колебательно процесса [9].

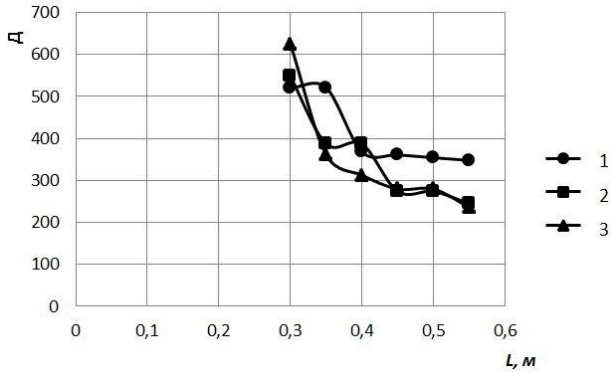


Рисунок 8 – Изменение добротности D рассматриваемой системы в зависимости от места падения блока массой m , (кг) по длине балки L , (м):
1 – $m=0,04$ кг, 2 – $m=0,192$ кг, 3 – $m=0,63$ кг

В качестве количественного показателя для оценки демпфирующей способности любой колебательной системы, обычно применяют коэффициент диссипации ψ , который определяется как в [9, 16]

$$\psi = \frac{W}{E_p}, \quad (9)$$

где W - рассеянная за цикл колебаний энергия, Дж; E_p - наибольшее значение потенциальной энергии системы, Дж.

На рис. 9 а, б представлены зависимости, отражающие изменение рассеянной за цикл колебаний энергии W , (Дж) и коэффициента диссипации ψ , с учетом места соударения породного блока различной массы m , (кг) с консольной балкой.

Ранее было установлено [16], что количество рассеянной за цикл колебаний энергии зависит от амплитуды колебаний, жесткости пружины и логарифмического декремента затухания. Исходя из этого, при испытании моделей было установлено, чем больше масса блока m , (кг) падающего на балку и ближе место его соударения с балкой относительно пружины, тем больше величина рассеянной за цикл колебаний энергии W (рис. 9 а), а, следовательно, больше значение коэффициента диссипации ψ , (рис. 9 б).

Логарифмический декремент δ представляет количественную характеристику затухания колебаний [9, 16]. Этот показатель описывает уменьшение амплитуды колебательного процесса в рассматриваемой системе.

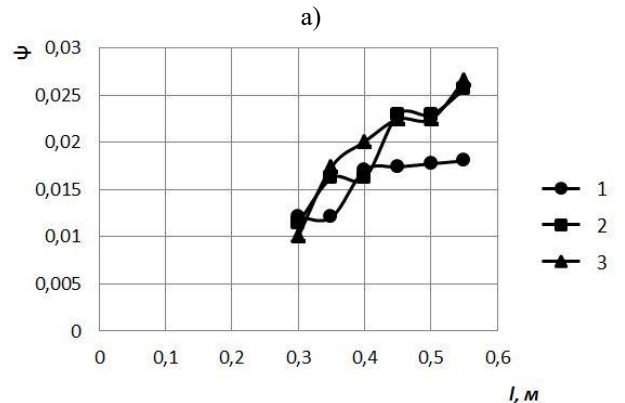
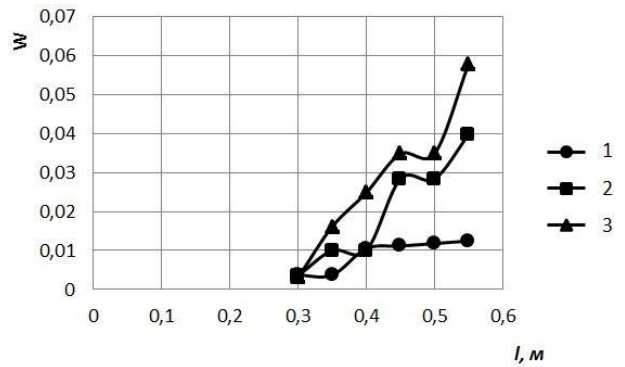


Рисунок 9 – Изменение рассеянной за цикл колебаний энергии W , (Дж) (а) и коэффициента диссипации ψ (б) в зависимости от места падения блока массы m , (кг) по длине балки L , (м):
1,4 – $m=0,04$ кг, 2,5 – $m=0,192$ кг, 3,6 – $m=0,63$ кг

На рис. 10 представлены зависимости, отражающие изменение логарифмического декремента затухания колебаний δ , в зависимости от места соударения породного блока с балкой и его массы m , (кг) в исследуемой колебательной системе.

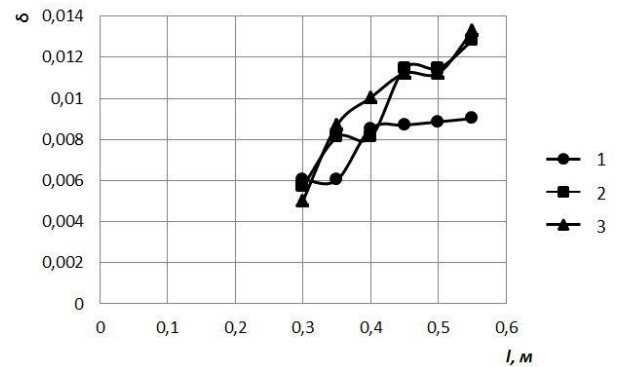


Рисунок 10 – Изменение логарифмического декремента δ затухания колебаний рассматриваемой системы в зависимости от места соударения породного блока массой m , (кг) с балкой на различном расстоянии l , (м): 1 – $m=0,04$ кг, 2 – $m=0,192$ кг, 3 – $m=0,63$ кг

Из приведенных зависимостей видно, что с увеличением массы блока m , (кг), а так же увеличении расстояния l , (м), т.е. когда блок соударяется с балкой ближе к пружине, значение δ увеличивается (рис. 10). Тем не менее, чем меньше декремент зату-

хання δ , тем менше втрається енергії з кожним коливанням і тем більше коливань совершає система перед повною зупинкою.

Фізическою величиною, визначающею характер коливань при демпфуванні, являється коефіцієнт демпфування, визначаємый как в [17]

$$\xi = \frac{r}{2mk}, \quad (10)$$

где r - коефіцієнт сили спротивлення руху, $r=0,3-0,5$ кг/с; m – маса системи, кг.

Модальний коефіцієнт демпфування ξ характеризує роль демпфування в моделюємой системі, подверженно́й коливанням с первоначальным перемещением. Считается [18], что чем меньше будет значение коэффициента демпфування ξ , тем дольше будут длиться колебания, а при $\xi \geq 1$ никаких колебаний система не испытывает.

На рис. 11 представлены зависимости, отражающие изменение величины коэффициента демпфування ξ при падении на балку породного блока массы m , (кг) от места соударения тел, относительно жесткой опоры.

Из рис. 11 видно, что с увеличением массы падающего на балку породного блока m , (кг) и расстояния l , (м), значение коэффициента демпфування ξ увеличивается. Однако во всех рассмотренных случаях, его значение $\xi < 1$, что свидетельствует о плавном затухании колебаний в моделируемой колебательной системе. При таких значениях коэффициента демпфування ξ , колебания массы за весь период наблюдений, продолжались с уменьшающейся амплитудой до их полного прекращения.

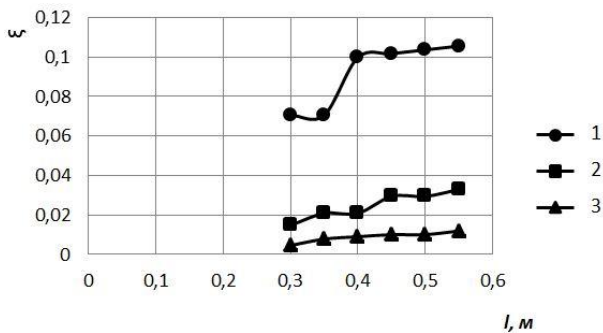


Рисунок 11 – Изменение коэффициента демпфування ξ при падении породного блока массой m , (кг) на консольную балку, в зависимости от расстояния l , (м): 1 – $m=0,04$ кг, 2 – $m=0,192$ кг, 3 – $m=0,63$ кг

На рис. 12 представлены зависимости, отражающие изменение числа n заметных колебаний консольной балки относительно места соударения породного блока с балкой, т.е. в зависимости от величины l , (м) в модели.

С учетом рекомендаций, изложенных в [9, 19], было установлено время существования заметных колебаний. Следует отметить, что эта величина зависит от массы падающего породного блока и, с ее увеличением от $m=0,04$ кг до $m=0,63$ кг, время существования заметных колебаний в испытываемых

моделях увеличивается с $t=27$ с до $t=32$ с. Вместе с тем, в модели за этот период времени, число заметных колебаний n , с увеличением расстояния l , (м), уменьшается. Однако, чем меньше масса падающего породного блока m , (кг), тем больше число n , при приближении места соударения к податливой опоре – пружине (рис. 12).

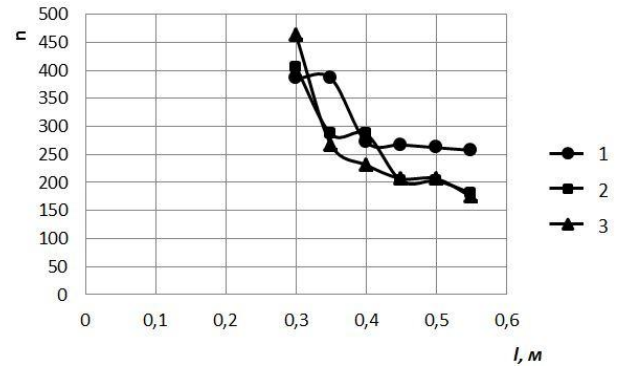


Рисунок 12 – Изменение числа заметных колебаний n моделируемой системы при соударении породного блока массой m , (кг) с балкой на различном расстоянии l , (м): 1 – $m=0,04$ кг, 2 – $m=0,192$ кг, 3 – $m=0,63$ кг

Движение моделируемой системы, при испытании моделей, происходило при относительно малой силе сопротивления, которой соответствовал коэффициент затухания колебаний $\beta < k$.

После обработки пиксельных координат точек, с учетом фотографических изображений и координатной сетки, нанесенной на специальном стенде, были построены зависимости, отражающие изменение координаты точки тела x , (м) при колебаниях консольной балки, в результате действия на нее внешней силы различной величины (рис. 13 а, б, в). При проведении экспериментов учитывалось положение консольной балки в пространстве до и после воздействия внешней силы, когда на консоль одно-разово для каждого моделируемого варианта сбрасывали с высоты $H=0,3$ м породный блок массой $m=0,04$ кг и $m=0,63$ кг. Место соударения породного блока с балкой относительно жесткой опоры изменялось и составляло, в одном случае, $l=0,4$ м и в другом $l=0,5$ м. Во всех случаях рассматривался упругий удар.

Из приведенных зависимостей (рис. 13 а, б, в) видно, что система, состоящая из консольной балки длиной $L=0,6$ м и пружины жесткостью $C_{\pi}=816,04$ Н/м, возбужденная начальным толчком, а затем представленная самой себе, совершает затухающие колебания с частотой, зависящей от массы системы. При этом, геометрический параметр x_0 , (м) определяет напряженно-деформированное состояние балки.

Время фиксированных колебаний в рассматриваемой модели, при проведении экспериментов, изменялось от $t=0,6$ с при падении на балку породного блока массы $m=0,04$ кг на расстоянии $l=0,4$ м от жесткой опоры, до $t=0,8$ с при увеличении массы до $m=0,63$ кг (рис. 13 а, б). В случае, когда расстояние l , (м) увеличилось до $l=0,5$ м, а масса па-

даючого блока соответствовала $m=0,63$ кг, время фиксированных колебаний составило до $t=0,92$ с (рис. 13 в).

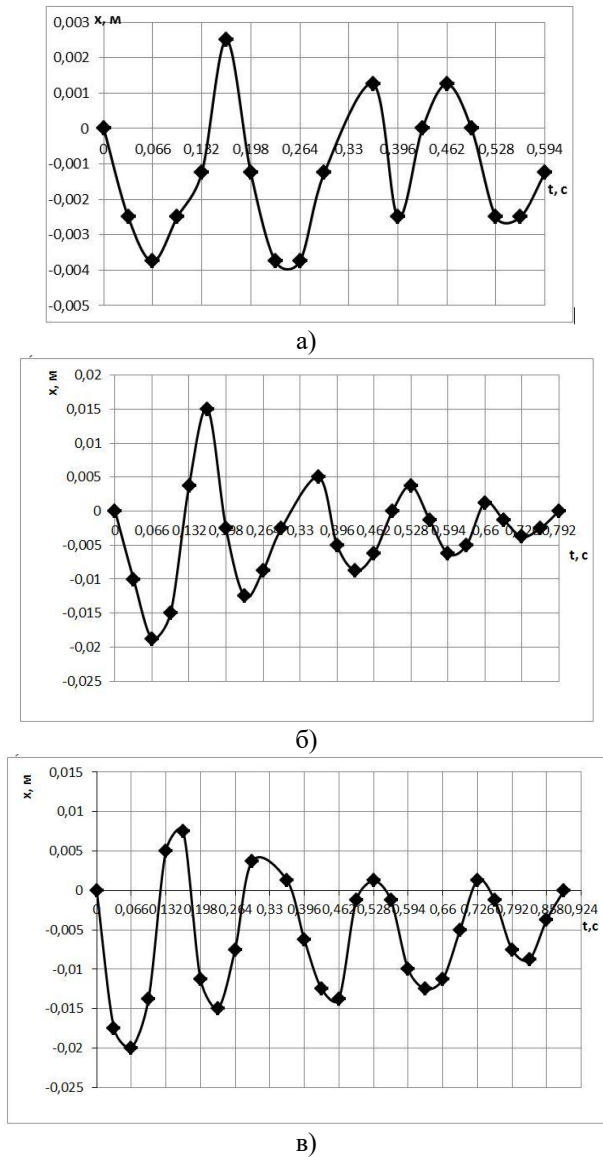


Рисунок 13 – Изменение координаты точки тела x , (м) при соударении породного блока массы m , (кг) с консольной балкой длиной $L=0,6$ м, свободный конец которой опирался на пружину постоянной жесткости $C=816,04$ Н/м на различном расстоянии l , (м) от жесткой опоры: а) $m=0,04$ кг, $l=0,4$ м; б) $m=0,63$ кг, $l=0,4$ м; в) $m=0,63$ кг, $l=0,5$ м

В теории колебаний, при анализе собственных колебаний моделируемой системы, часто применяют спектральные методы, сущность которых заключается в замене исследуемых переменных физических величин, таких как внешняя сила и жесткость, их спектрами. Знание динамической жесткости упругого основания, в нашем случае, пружины, позволяет определить плотность амплитудного спектра движений, возникающих в системе после удара. Однако от момента удара зависит не плотность амплитудного спектра, а фазовый спектр [9, 19]. Поэтому, в случае воздействия на балку внешней силы,

при затухающих колебаниях моделируемой системы, когда тело одновременно совершает два одинаковых по направлению движения, сравниваемые спектры должны отличаться друг от друга только сдвигом [9, 20]. При действии внешней силы, консольная балка, которая опирается на податливую опору – пружину, одновременно совершает два движения. Одно из них, это движение, вызванное собственным весом балки, другое – характером действия внешней силы.

Согласно [21, 22], между существующими характеристиками, описывающими колебательные свойства рассматриваемой системы существует взаимосвязь, которая позволяет определить величину сдвига фазы $tg\varphi$ по выражению

$$tg\varphi = \frac{x_0 \cdot k}{v_0} \quad (11)$$

Действительно, из-за неоднородности материала породной консольной балки, деформация будет отставать от перемещения по фазе на величину сдвига фазы $tg\varphi$, которая является характеристикой внутреннего трения, т.е. зависит от физико-механических свойств породной консоли.

В результате исследования фазовых соотношений между действием внешней силы и откликом опоры ранее было установлено, что отклик последней всегда отстает от воздействия внешней силы [21].

Исходя из этого, деформации, вызванные соответствующими перемещениями, достигнут своего наибольшего значения не одновременно с окончанием действия внешней силы, а через некоторую величину $tg\varphi$, одно после другого. Именно за счет сдвига фазы во времени совершается работа A , (Дж) по деформированию балки.

Промежуток времени, между окончанием действия внешней силы и деформацией консольной балки, когда последние достигают наибольшего значения, определяется по выражению [22]

$$t_n = \frac{tg\varphi T}{2\pi} \quad (12)$$

На рис.14 а, б представлены зависимости, отражающие изменение величины сдвига фазы $tg\varphi$ и промежутка времени t_n , (с) для консольной балки при падении на нее породного блока массы m , (кг) на различном расстоянии l , (м).

При проведении исследований установлено, что с увеличением массы падающего породного блока m , (кг) и уменьшении расстояния до податливой опоры от места его соударения с балкой, величины сдвига фазы $tg\varphi$, увеличивается. Минимальные значения величины сдвига фазы, когда $tg\varphi=0,042$ отмечены на расстоянии $l=0,3$ м до жесткой опоры, максимальные – когда $tg\varphi=0,12$ при $l=0,55$ м, т.е. ближе к податливой опоре, при массе породного блока $m=0,63$ кг. Очевидно, с уменьшением массы породного блока, значения величины сдвига фазы $tg\varphi$ уменьшается (рис. 14 а). Промежуток времени, между окончанием действия внешней силы и де-

формацией консольной балки, когда величина последней достигает наибольших значений, с увеличением массы падающего породного блока m , (кг) и расстояния l , (м), увеличивается. По всем видимостям, при исследовании фазовых соотношений между внешней силой и откликом осциллятора, когда место соударения ближе к податливой опоре, отклик последней всегда будет отставать от воздействия на максимальную величину t_n , (с) (рис. 14 б).

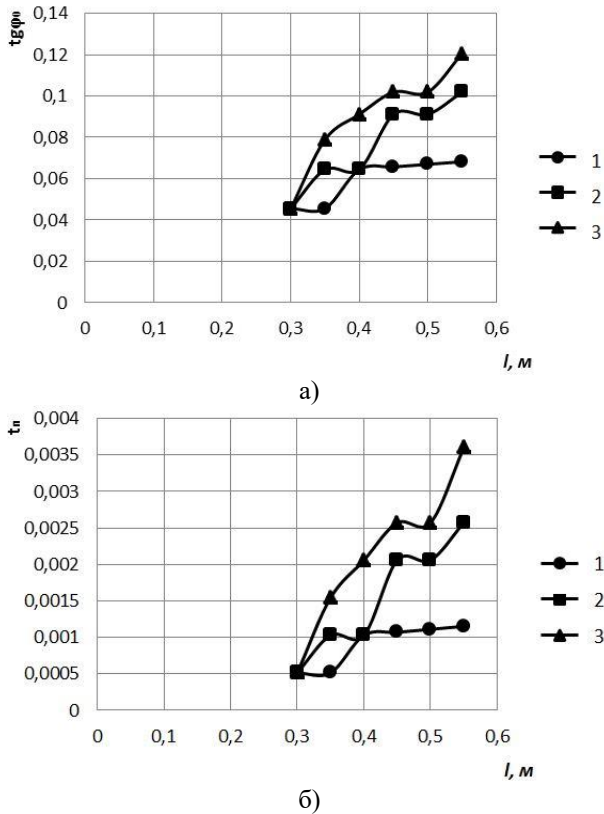


Рисунок 14 – Изменение величины сдвига фазы $tg\varphi$ (а) и промежутка времени t_n , (с) (б) между окончанием действия внешней силы и деформацией консольной балки, при падении блока массой m , (кг) на различном расстоянии l , (м): 1 - $m=0,04$ кг; 2 - $m=0,192$ кг; 3 - $m=0,63$ кг

В сопротивлении материалов [16], при расчете напряжений и деформаций, возникающих при ударном нагружении, используется понятие коэффициента динамичности, показывающего во сколько раз динамические напряжения при ударе больше статических. Для рассматриваемых моделей, значение этого коэффициента определяется по выражению

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2hm}{x_0(m + m_0)}} \quad (13)$$

В выражении (13), при расчетах вводится допущение о том, что перемещение точки тела x_0 , (м) в любой момент действия динамической нагрузки такие же, как при статической нагрузке [23].

В результате испытания моделей установлено, чем ближе место соударения породного блока с балкой к податливой опоре, тем меньше значение коэффициента динамичности k_d . В случае, когда

масса падающего породного блока составляет $m=0,192$ кг, а место его соударения с балкой изменится от $l=0,3$ м до $l=0,55$ м, значение k_d уменьшается в 1,8 раза. Для породного блока массой $m=0,63$ кг, с учетом изменения места соударения, уменьшение составляет 2,2 раза (рис. 15).

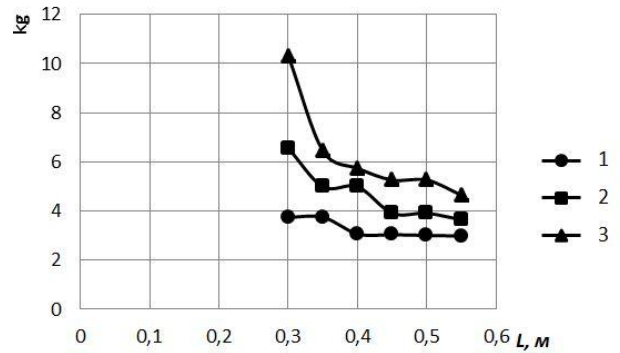


Рисунок 15 – Изменение коэффициента динамичности k_d при падении на консольную балку породного блока массы m , (кг) на различном расстоянии l , (м): 1 – $m=0,04$ кг, 2 – $m=0,192$ кг, 3 – $m=0,63$ кг

Рассмотрим воздействие внешней силы на нагруженную собственным весом систему. В результате этого, внутренние силы и изгибающие моменты в деформированном состоянии не будут находиться в равновесии с внешними нагрузками. В рассматриваемой системе, работа силы тяжести и силы упругости пружины постоянной жесткости, при перемещении балки после удара из начального положения в конечное определяется по выражению

$$A = -\frac{C}{2}x_0^2 + \frac{m\delta}{2}x_0 \quad (14)$$

Считается, что при опускании балки работа сил упругости пружины отрицательная, а работа силы тяжести положительная.

Для того, чтобы оценить мощность силы N , (Вт) за время, в течение которого консольная балка максимально прогибается и деформируется, с момента приложения внешней силы, используем выражение как в [24], когда

$$N = \frac{A}{t_{yo} + t_n} \quad (15)$$

где $t_{yo} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{x_0}{g}}$, время продолжительности удара,

(с), определяется как в [25].

На рис.16 а, б представлены зависимости изменения работы A , (Дж) по перемещению и мощности силы N , (Вт) по деформированию консольной балки при падении на нее породного блока.

Из приведенных зависимостей видно, что при падении породного блока различной массы m , (кг) на балку, в случае, когда $l=0,55$ м, работа по перемещению A , (Дж) увеличивается (рис. 16 а). При этом также увеличивается и мощность силы N , (Вт)

(рис. 16 б). Очевидно, максимальное количество энергии, затрачиваемой для перемещения и деформирования балки, зависит от массы падающего на балку породного блока и расстояния от места соударения тел относительно податливой опоры.

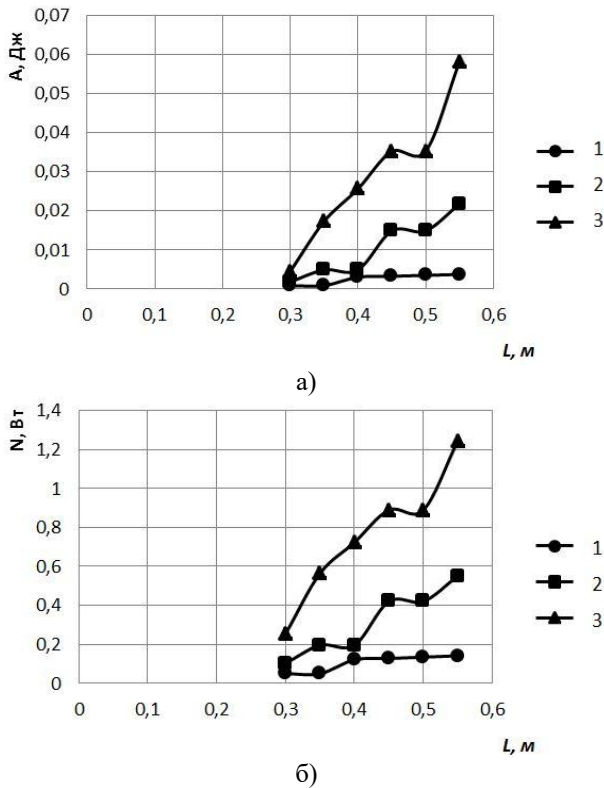


Рисунок 16 – Изменение работы A , (Дж) (а) и мощности силы N , (Вт) (б) по перемещению и деформированию балки при падении породного блока массы m , (кг) на различном расстоянии l , (м): 1 - $m=0,04$ кг; 2 - $m=0,192$ кг; 3 - $m=0,63$ кг

Таким образом, в результате выполненных лабораторных исследований устойчивости кровли угольного пласта, представленной в виде консольной балки с податливой опорой постоянной жесткости $C_{п}$, (Н/м), при внезапных обрушениях расслоившейся толщи, установленный экспериментально геометрический параметр x_0 , (м), характеризующий перемещение консоли от действия ударной нагрузки, определяет напряженно-деформированное состояние (НДС) боковых пород. В зависимости от места соударения породного блока с балкой, относительно податливой опоры, величина этого параметра изменяется, а, следовательно, изменяется НДС пород кровли. При этом изменяется величина добротности рассматриваемой системы и количество энергии, затрачиваемой на деформирование балки. С приближением места соударения породного блока с балкой к податливой опоре, деформации, вызванные соответствующими перемещениями, достигают своего наибольшего значения. Однако, это происходит не в момент соударения породного блока с балкой, а через некоторый промежуток времени одно после другого, величина которого зависит от физико-механических свойств породной консоли, массы породного блока, падающего на балку,

логарифмического декремента затухания колебаний в системе и демпфирующих свойств податливой опоры.

ВЫВОДЫ. Применение податливой опоры с постоянной величиной жесткости, обеспечивает устойчивость боковых пород в окрестности поддерживаемых горных выработок при внезапных обрушениях расслоившейся толщи или посадках основной кровли. При этом необходимо учитывать параметры породной консоли, ширину призабойного пространства и массу обрушившихся пород. Применение в исследуемых моделях пружины постоянной жесткости не отражает реального поведения закладочного массива, поэтому научный и практический интерес при дальнейшем изучении влияния ударных нагрузок на устойчивость боковых пород и возникающих при этом изгибных деформаций кровли разрабатываемого угольного пласта, представляет изменение жесткости податливой опоры и влияние этого параметра на эксплуатационное состояние поддерживаемых горных выработок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Викторов С. Д., Иофис М. А., Гончаров С. А. Сдвигение и разрушение горных пород. М.: Наука, 2005. 277 с.
2. Буялич Г. Д., Буялич К. Г., Умрихина В. Ю. Расчет колебаний кровли при вторичных осадках. *Горный информационно-аналитический бюллетень*. 2016. № 6. С. 115–121. – ISSN0236-1493.
3. Discrete Oscillation Theory / Agarwal R. P., Bohner M., Grace S. R., O'Regan P. Hindwai Publishing Corporation, 2005. 961 p. ISBN: 9775945194.
4. Лапшин В. В., Юрин Е. А. Нелинейная упругопластическая модель коллинеарного удара. *Вестник МГТУ им Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. 2016. № 1. С. 90–99. DOI:10.18698/1812-3368-2016-1-90-99.
5. Pippard A. B. The Physics of Vibration. Cambridge University Press, 2007. 656 p. ISBN: 0521033330.
6. Снижение травматизма от проявлений горного давления / В. И. Николин, С. В. Подкопаев, А. В. Агафонов, Н. В. Малеев. Донецк: Норд-Пресс, 2005. 332 с.
7. Малоотходная технология добычи угля / Жуков В. Е., Выстороп В. В., Колчин А. М. и др. Киев: Техника, 1984. 144 с.
8. ДСТУ EN196-1:2007. Національний стандарт України. Методи випробування цементу. Частина 1. Визначення міцності (EN 196-1:2005, IDT) Київ, Мінбуд України, 2007. 30 с.
9. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2005. 440 с. ISBN5-8114-0614-2.
10. Трофимова Т.И. Курс физики. Москва: Издательский центр «Академия», 2006. 560 с. ISBN5-7695-2629-7.
11. Якоби О. Практика управления горным давлением. Москва: Недра, 1987. 566 с.
12. Бриджмен П. В. Анализ размерностей. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 148 с.

13. Обиралов А. И., Лимонов А. Н., Гаврилова Н. А. Фотограмметрия. Москва: Колос С, 2004. 240 с.
14. Ebrahimi F. Advances in Vibration Analysis Research. In Tech, 2011. 456 p. ISBN 9789533072098
15. Vibration and Shock Handbook. L.; Hutchinson, 2000. 240 p.
16. Шакирзянов Р. А., Шакирзянов Ф. Р. Динамика и устойчивость сооружений. Казань: Изд-во Казанс. гос. архит-стр. ун-та, 2005. 120 с.
17. Ковалева Н. В., Рутман Ю. Л., Давыдова Г. В. Определение оптимальных параметров демпфирования в системах сейсмоизоляции. *Инженерно-строительный Журнал. Magazine of Civil Engineering*. 2013. № 5. С. 107–115.
18. Зотеев В. Е. Параметрическая идентификация диссипативных механических систем на основе разностных уравнений. Москва: Машиностроение, 2009. 344 с. ISBN978-5-94275-450-1.
19. Bottega W. J. Engineering Vibrations. CRC Press, Taylor&Francis Group, 2006. 727 p. ISBN 0849334209.
20. Kelly S. G. Advanced Vibration Analysis. CRC Press, Taylor&Francis Group, 2007. 650. ISBN: 978-1-4200-1532-4.
21. Бродский В. М. Расчет балки на прочность при вибрационной нагрузке. Северск: СГИ НИЯУ-МИФИ, 2016. 46 с.
22. Водопьянов В. И., Белов А. А. Исследование демпфирующих свойств материалов. Волгоград, ВолгГТУ, 2001. 12 с.
23. Русаков А. И. Корректный расчет приведенных масс при ударе. Вестник РГУПС, 2003. № 2. С. 134–137.
24. Теоретическая механика. Динамика. В 2ч. Ч 2. Динамика материальной точки / Акимов В.А. и др.; Под общ. ред. проф. А.В. Чигарева. Минск: Новое знание, 2010. 863 с. ISBN978-985-475-368-3.
25. Кильчевский Н. А. Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар. Киев: Наукова думка, 1986. 311 с.

ABOUT FLEXURAL DEFORMATIONS OF THE ROOF ROCKS OF A COAL SEAM UNDER THE ACTION OF SHOCK LOADS

S. Podkopaev, E. Konopel'ko, I. Iordanov, D. Chepiga, A. Polozhij

Public higher education institution «Donetsk National Technical University»

pl. Shibankova, 2, Pokrovsk, Donetsk region, 85300, Ukraine. E-mail: daria.chepiha@donntu.edu.ua

Purpose. To study the state of enclosing roof rocks under the action of dynamic loads on them, in the form of sudden collapses of the flake off stratum, on discrete models of equivalent materials. The rocks of the roof of the coal seam which is being developed were considered in the form of a cantilever beam, of a certain length, which rests on a supple support which is a spring of constant rigidity. It is necessary to establish the impact on them of shock loads and the resulting flexural deformations. **Methodology.** A comprehensive research method using the basic concepts of theoretical mechanics, impact theory and modeling from equivalent materials have been used. **Results.** The use of a flexible support with a constant value of rigidity ensures stability of the side rocks in the vicinity of the supported mine workings with sudden collapse of the stratified strata or plantings of the main roof are researched. **Originality.** With the approach of the place of impact of the rock block with the beam to the flexible support, the deformations caused by the corresponding displacements reach their greatest value. This occurs not at the moment of the impact of the rock block with the beam, but after a certain time interval one after another, the magnitude of which depends on the physical and mechanical properties of the rock console, the mass of the rock block falling on the beam, the logarithmic decrement of the oscillations in the system and the damping properties of the compliant support. **Practical value.** Development of measures aimed at increasing the stability of mine workings in the development of coal seams in difficult mining and geological conditions. The use of a flexible support with a constant value of rigidity ensures stability of the side rocks in the vicinity of the supported mine workings with sudden collapse of the stratified strata or plantings of the main roof. But it is necessary to take into account the parameters of the rock console, the width of the face space and the mass of the collapsed rocks. **Conclusions.** In order to prevent sudden collapses of lateral rocks in the development of steep coal seams, one should be guided by the use of a universal method for controlling rock pressure and protecting mine workings has been proved. References 37, figures 16.

Key words: pedegree console, caving, oscillation, rock pressure, dynamic effects, imitation, filling mass.

REFERENCES

1. Viktorov, S. D., Iofis, M. A., Goncharov, S. A. (2005), *Sdvizhenie i razrushenie gorniyh porod* [Shift and destruction of rocks], Nauka, Moscow, Russia.
2. Bujalich, G. D., Bujalich, K. G., Umrihina, V. Ju. (2016), "Calculation of the vibrations of the roof during secondary sediments", *Gornyj informacionno-analiticheskij bjulleten'*, No. 6., pp.115-121, ISSN0236-1493
3. Agarwal, R. P., Bohner, M., Grace, S. R., O'Regan, P. (2005), *Discrete Oscillation Theory*, Hindwai Publishing Corporation. ISBN: 9775945194
4. Lapshin, V. V., Yurin, E. A. (2016), "The nonlinear elastic-plastic model of the collinear shock", *Bulletin Bauman MSTU, series Natural Sciences*, no. 1, pp.90-99. DOI:10.18698/1812-3368-2016-1-90-99
5. Pippard, A. B. (2007), *The Physics of Vibration*, Cambridge University Press. ISBN: 0521033330.
6. Nikolin, V. I., Podkopaev, S. V., Agafonov, A. V., Maleev, N. V. (2005), *Snizhenie travmatizma ot pojavlenij gornogo davlenija* [Injury Reduction of manifestations of rock pressure], Nord-Press, Donetsk, Ukraine.
7. Zhukov, V. Y. Vystorop V. V., Kolchin, A. M. (1984), *Malootkhodnaya tekhnologiya dobychi uglya*

[Low-waste coal mining technology] Tekhnika, Kiev, Ukraine.

8. Natsional'niy standart Ukraine. Metodi viprobuvannya tseментu. Chastina 1. Vznachennya mitsnosti [National standard of Ukraine [Methods of test of cement. Part 1. Determination of strength] (2007), (EN 196-1:2005, IDT) DSTU EN196-1:2007 Kyiv, Ministry of Internal Affairs of Ukraine.

9. Strelkov, S. P. (2005), *Vvedeniye v teoriyu kolebaniy* [Introduction to the theory of oscillations] Izd-vo «Lan», SPb, Russia. ISBN5-8114-0614-2

10. Trofimova, T. I. (2006), *Kurs fiziki* [Course of Physics], Izdatel'skij centr «Akademija», Moscow, Russia.

11. Yakobi, O. (1987), *Praktika upravleniya gornym davleniyem* [Practice of mining pressure control], Nedra, Moscow, Russia.

12. Bridzhmen, P. V. (2001), *Analiz razmernostey* [Analysis of dimensions], NITS «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika, Izhevsk, Russia.

13. Obiralov, A. I. Limonov, A. N., Gavrilova, N. A. (2004), *Fotogrammetriya* [Photogrammetry], Kolos, Moscow, Russia.

14. Ebrahimi, F. (2011), *Advances in Vibration Analisic Research In Tech.* ISBN 9789533072098

15. *Vibration and Shock Handbook* (2000), L. Hutchinson, 240 p.

16. Shakirzyanov, R. A. Shakirzyanov, F. R. (2005), *Dinamika i ustoychivost' sooruzheniy* [Dynamics and stability of structures], Izd-vo Kazans. gos. arkhitekt-str. un-ta, Kazan', Russia.

17. Kovaleva, N. V., Rutman, Y. L., Davydova, G. V. (2013), "Determination of optimal damping parameters in seismic isolation systems", *Inzhenerno-stroitel'nyy Zhurnal. Magazine of Civil Engineering*, No.5, pp.107-115.

18. Zoteyev, V. Y. (2009), *Parametricheskaya identifikatsiya dissipativnykh mekhanicheskikh sistem na osnove raznostnykh uravneniy* [Parametric identification of dissipative mechanical systems based on difference equations], Mashinostroyeniye, Moscow, Russia. ISBN978-5-94275-450-1.

19. Bottega, W. I. (2006), *Engineering Vibration*, CRC Press, Taylor & Francis Group. ISBN: 0849334209

20. Kelly, S. G. (2007), *Advanced Vibration Analysis*, CRC Press, Taylor Francis Group, ISBN: 978-1-4200-1532-4.

21. Brodskiy, V. M. (2016), *Raschet balki na prochnost' pri vibratsionnoy nagruzke* [Calculation of the beam for durability under vibration load], SGI NIYAUMIFI. Seversk, Russia.

22. Vodop'yanov, V. I., Belov, A. A. (2001), *Issledovaniye dempfirmuyushchikh svoystv materialov* [Investigation of the damping properties of materials], VolgGTU, Volgograd, Russia.

23. Rusakov, A. I. (2016), "Correct calculation of the reduced masses at impact", *Vestnik RGUPS*, No. 2, pp. 134-137.

24. Akimov, V. A., Chigareva, A. V. (2010), *Teoreticheskaya mekhanika. Dinamika. V 2ch. CH2. Dinamika material'noy tochki* [Theoretical mechanics. Dynamics. In 2 hours. Q2. Dynamics of a material point], Novoye znaniye, Minsk, Belarus. ISBN978-985-475-368-3.

25. Kil'chevskiy, N. A. (1986), *Dinamicheskoye kontaktnoye szhatiye tverdykh tel. Udar.* [Dynamic contact compression of solids. Strike], Naukova dumka, Kiev, Ukraine.

Стаття надійшла 21.05.2018.