ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАУКИ

УДК 519.95

А.В. Богданов

ВЕРОЯТНОСТНАЯ АКСИОМАТИКА УПОРЯДОЧЕННЫХ ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ

У роботі продовжено аксіоматичну побудову математики на основі чотирьох незалежних змінних для випадку упорядкованих числових множин, уточнено ряд визначень і усунено наявні протиріччя. Трьома незалежними змінними (двома, які визначають еталон, і однієї, яка є мірою) описуються числа, як елементи впорядкованих числових множин. Показано, що різні види числових множин визначаються вибором еталону виміру числа. Ірраціональні числа не мають еталону виміру, і вони не відображаються на числовій прямій. Цією обставиною пояснюються нерозв'язність задачі про квадратуру кола, протиріччя у трактуванні аксіоми Кантора та в інших аналогічних задачах. Побудовано нову модель нескінченно малих величин (чисел і відрізків) і обґрунтовано їх включення в множину дійсних чисел, як нового виду числової множини.

Введение. Актуальность исследований. Использование аксиом вероятностной геометрии [1] позволило в работах [2-6] устранить противоречия и предложить новые более простые и наглядные модели в геометрии Лобачевского, комплексной и обычной прямоугольной системах координат, бухгалтерском учёте, социальной модели государства, экономической модели судовых энергетических установок и т. д.

Аналогичные задачи могут быть решены при использовании предложенных методик в теории упорядоченных числовых множеств, что обусловливает **актуальность** проведения таких исследований.

Постановка задачи. Среди вопросов, требующих устранения противоречий и решения в теории действительных чисел, можно выделить следующие:

– разграничение между рациональными и иррациональными числами, выражающееся, в частности, в неразрешимости задачи о квадратуре круга, т.е. невозможности построения квадрата, площадь которого равна площади данного круга и других аналогичных задачах;

– неоднозначность в определении количества точек, принадлежащих одновременно всем вложенным отрезкам на числовой прямой в принципе вложенных отрезков (аксиома Кантора);

– неопределённости в определении бесконечно малых величин, играющих определяющую роль в математическом анализе.

Целями настоящей работы являются: разграничение между рациональными и иррациональными числами; уточнение количества точек, одновременно принадлежащих всем вложенным отрезкам на числовой прямой (аксиома Кантора); выделение в отдельное числовое множество и построение модели бесконечно малых величин.

Решение задачи. Согласно Евклиду, каждому числу соответствует отрезок определенной длины и, наоборот, каждой длине отрезка соответствует число. Понятие числа, как длины отрезка, легло в основу построения числовой (координатной) оси (рис.1) и всего дальнейшего развития математики.

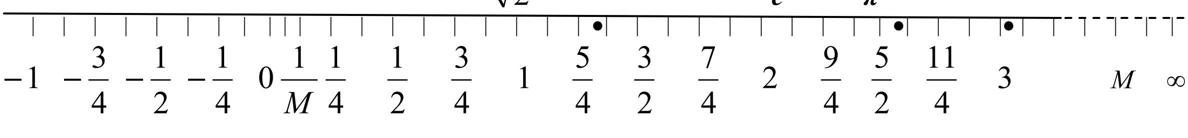

Рис. 1. Числовая ось

Число определяется тремя независимыми переменными: двумя, определяющими эталон числа, и одной, являющейся мерой числа. Длина отрезка в вероятностной геометрии определяется произведением эталона длины на численную меру длины. Выбор эталона длины на числовой оси определяет вид числового множества.

Основным числовым множеством, на основании которого построены все другие множества, является натуральный ряд чисел, который можно определить тремя независимыми переменными: 1, 2 и ∞ (бесконечность). Натуральные числа определяются эталоном длины (единичным отрезком), равным расстоянию на числовой прямой от «1» до «2». Расстояние от «1» до «0», являющегося «точкой отсчёта» для ряда числовых множеств, принимается равным эталону длины во множестве натуральных чисел, что делает возможным их использование в качестве основы для образования других числовых множеств.

Числа, в которых эталоном длины выступает только единичный отрезок, а мерой сами эти числа, называются **простыми**. Числа, в качестве эталона длины которых можно выбрать отрезки, отличные от единичного отрезка, называются **составными**. Например, число шесть является составным, так как для его образования эталоном можно выбрать число два, а мерой – число три.

Число "1", используется как эталон длины, определяемый двумя переменными, а поэтому не относится к простым числам [7, с.21]. Представление натурального составного числа n в виде произведения простых чисел называется **разложением на простые множители**. Изменение эталона длины с единичного отрезка для простых чисел на эталон длины, соответствующий простому множителю, не должен изменять само это число, так как в обоих случаях число представляется в виде трёх независимых переменных.

Этот вывод закреплён в **основной теореме арифметики**:

Для каждого натурального числа n > 1 существует единственное разложение на простые множители, отличающееся только порядком расположения множителей.

Четыре арифметические операции следуют из соответствующих операций над множествами и определения, что действительные числа могут определяться только тремя независимыми переменными. Для получения в результате сложения или вычитания числа, имеющего эталон и меру, необходимо, чтобы исходные числа имели одинаковый эталон. Результирующее число содержит общий эталон исходных чисел и сумму (разницу) их мер. Отсюда **универсальное правило размерностей**: отнимать или складывать можно только величины, имеющие одинаковую мерность.

При умножении и делении чисел складываются или вычитаются множители исходных чисел. Множители чисел выступают как соответствующие меры простых чисел, а мерой результирующего числа может служить как единица, так и любое из простых чисел. Множество положительных (натуральных) чисел, ноль и множество отрицательных чисел образуют **множество целых чисел**

$$Z = \{-\infty, -2, -1, 0, +1, +2, +\infty\}. \tag{1}$$

Отличием нового вида числового множества (множества целых чисел) от множества натуральных чисел является наличие знака плюс или минус в их эталоне (направления в пространстве в эталонном отрезке), т. е. изменение свойств эталона, и добавление числа «0» относительно которого рассматриваются два множества: множества положительных и отрицательных чисел.

Множество **рациональных чисел Q** в общем случае представляет собой **несокращаемую рациональную дробь** (от латинского слова *ratio* – отношение) $\frac{a}{b}$, числитель которой целое (*a*), а знаменатель натуральное (*b*) числа, за исключением чисел "0", "∞" и "- ∞", входящих в эти числовые множества. Если числитель и знаменатель дроби представляют собой составные числа, то при делении общие делители (эталоны) сокращаются. Отсюда **основное свойство дроби** – неизменность её величины при умножении или делении числителя и знаменателя на одно и то же число.

Эталоном обыкновенной дроби $\frac{a}{b}$ является величина обратная её знаменателю. Так как операцию сложения или вычитания можно производить только над множествами, имеющими одинаковый эталон, то для выполнения данных операций рациональные дроби приводят к общему знаменателю, обратная величина которого является общим эталоном измерения.

Из правила выделения целой части из неправильной дроби следует, что число точек между "0" и "1", соответствующих правильным дробям, равно числу точек между любыми двумя целыми соседними числами на числовой прямой.

Рациональные дроби, включающие в себя "0" , "∞" и "- ∞" нельзя однозначно определить, то есть нарушается аксиома порядка для упорядоченных числовых множеств, например:

$$\frac{0}{5} = \frac{0}{7} = 0; \quad \frac{5}{0} = \frac{7}{0} = \infty; \quad \frac{\infty}{5} = \frac{\infty}{7} = \infty; \quad \frac{3}{\infty} = \frac{4}{\infty} = 0; \quad \frac{-\infty}{5} = \frac{-\infty}{7} = -\infty.$$

Эталоном таких дробей не могут быть величины, обратные их знаменателям, а поэтому они составляют новое числовое множество **бесконечно малых** или **бесконечно больших чисел.**

Для определения чисел в данной области значений воспользуемся понятиями наименьшей верхней и наибольшей нижней границ числового множества [8]. Пусть число M – самое большое из используемых целых чисел (бесконечно большое число), а соответствующее ему расстояние до точки "0" наибольшее из всех рассматриваемых расстояний на числовой прямой (рис.1). Причём предполагается, что для целых чисел n справедливо неравенство $n \ll M$.

Величину, обратную числу M и соответствующий ему отрезок $\Delta = 1/M$, назовём **бесконечно малым числом ε** и **бесконечно малым расстоянием Δx**, соответственно. Бесконечно малые величины (числа и отрезки на числовой прямой) – это величины, использующие в качестве эталона величину

$$\varepsilon = \frac{1}{M}, \qquad (2)$$

где ε намного меньше любого с используемых натуральных или целых чисел ε « *n*.

Арифметические действия с участием бесконечно малых (больших) чисел отличаются от аналогичных действий между рациональными числами. Например, добавление или вычитание бесконечно малых чисел к рациональным числам не изменяет их величин. Умножение рациональных чисел на бесконечно малое число равно бесконечно малому числу, а деление – бесконечно большому числу. Произведение двух бесконечно малых чисел называется бесконечно малой величиной второго порядка, трёх – третьего порядка и т.д. Приведённые особенности бесконечно малых величин позволяют выделить их в отдельный вид числового множества.

Бесконечно большое число ***M*** и определяемое им бесконечно малое число ***ε*** играют ключевую роль во всей современной математике. Арифметические операции с участием бесконечно малых величин приводят к новым математическим и физическим понятиям (площади, объёма и т.д.) и являются основой математического анализа и теории вероятности.

Иррациональными числами называют числа, которые нельзя представить в виде дроби, то есть в виде рациональных чисел, и к которым нельзя поставить в соответствие точное расстояние до точки "0" на числовой прямой.

Иррациональные числа в 5-й книге "Начал" Евклида представлялись исключительно в виде квадратных радикалов от числа, и им не ставилась в соответствие длина отрезка на числовой прямой.

Примерами иррациональных чисел могут быть (рис.1):

– числа, образуемые при обратной к возведению в степень операции – нахождении корня с положительных чисел, которые нельзя разложить на соответствующее количество одинаковых сомножителей, например $\sqrt{2}$ = 1,41421…;

– число ***π*** = 3,142592… – отношение длины окружности к её диаметру;

– число ***e*** = 2,71828… – основание натурального логарифма и т.д.

Множество иррациональных чисел, как и множество рациональных дробей, является упорядоченным множеством, но их эталоном не является бесконечно малая величина .

Не существует отрезка на числовой прямой, длина которого соответствовала бы иррациональному числу, то есть на числовой прямой нет точек, соответствующих иррациональным числам.

На числовой прямой можно указать только интервал между двумя рациональными точками, внутри которого находится иррациональное число (1,41421 < $\sqrt{2}$ < 1,41422; 3,1425 < ***π*** < 3,1426; 2,7182 < ***e*** < 2,7183 и т. д). Данный интервал на числовой прямой соответствует бесконечно малой величине, принятой в данном вычислении. Однако иррациональное число по определению не может равняться одному из двух рациональных чисел, определяющих границы интервала для иррационального числа. Иррациональные числа используются для связи независимых (имеющих разные эталоны измерения) числовых множеств.

Невозможность построения квадрата, площадь которого равна площади данного круга (задача о квадратуре круга), объясняется следующим образом. Сторона квадрата и его площадь – рациональные числа, имеющие эталон измерения. Площадь круга, получаемая умножением квадрата его радиуса на иррациональное число ***π***, – иррациональное число, не имеющее эталона измерения. Сравнивать между собой можно только числа, имеющие одинаковый эталон измерения.

В работе [9, с.10] аксиома Кантора для числовой прямой трактуется следующим образом: «Если имеем последовательность вложенных отрезков, т.е. $[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \ldots \supset [a_n; b_n] \supset \ldots$, причём с возрастанием длина отрезка $[a_n; b_n]$ стремится к нулю, то существует *единственная* точка *C*, общая для всех отрезков $[a_n; b_n]$ (*n* = 1, 2, 3,…)». В **принципе вложенных отрезков** [7, с. 49] непрерывность действительных чисел трактуется следующим образом: «Для всякой системы вложенных отрезков $[a_1; b_1] \supseteq [a_2; b_2] \supseteq \ldots \supseteq [a_n; b_n] \supseteq \ldots$ существует хотя бы одно число, которое принадлежит всем отрезкам данной системы».

Однако, по определению [1], отрезки однозначно определяются только двумя своими конечными точками на числовой прямой. Отрезок $[a_n; b_n]$ в данной системе вложенных отрезков всегда будет принадлежать всем другим отрезкам. Поэтому, принцип вложенных отрезков правильнее сформулировать следующим образом.

Для всякой системы вложенных отрезков $[a_1; b_1] \supseteq [a_2; b_2] \supseteq \ldots \supseteq [a_n; b_n] \supseteq \ldots$ существуют две и только две точки на числовой прямой, которые принадлежат всем отрезкам данной системы. Все точки числовой прямой принадлежат рациональным дробям. Отрезков на числовой прямой, длины которых соответствуют иррациональным числам, не существует. Иррациональные числа определяются двумя конечными точками отрезка $[a_n; b_n]$ на числовой прямой.

Множество бесконечно малых величин (ε) имеют отличительные свойства как от множеств рациональных (Q), так и от иррациональных (I) чисел, а поэтому их в состав множества **действительных чисел** (***R***) необходимо вносить отдельно:

$$Q + I + \varepsilon = R.. \tag{3}$$

Выводы. В работе продолжено аксиоматическое построение математики на основе четырёх независимых переменных для случая упорядоченных числовых множеств, уточнено ряд определений и устранено имеющиеся противоречия. Тремя независимыми переменными (двумя, определяющими эталон и одной, являющейся мерой) описываются числа, как элементы упорядоченных числовых множеств. Показано, что различные виды числовых множеств определяются выбором эталона измерения числа. Иррациональные числа не имеют эталона измерения, и они не отображаются на числовой прямой. Этим обстоятельством объясняются неразрешимость задачи о квадратуре круга, противоречия в трактовке аксиомы Кантора и в других аналогичных задачах.

Построено новую модель бесконечно малых величин (чисел и отрезков) и обосновано их включение во множество действительных чисел, как нового вида числового множества.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Богданов А.В. Вероятностная аксиоматика геометрии // Науковий вісник ХДМІ. – Херсон: ХДМІ, 2010. – С.131-138.
2. Богданов А.В. Вероятностная модель геометрии Лобачевского // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон: ХНТУ, 2010. – № 2. – С. 12-16.
3. Богданов А.В. Вероятностная плоская прямоугольная система координат // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон: ХНТУ, 2010. – № 2. – С. 8-11.
4. Богданов А.В. Обобщённая математическая модель бухгалтерского учёта предприятия // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон: ХНТУ, 2011. – № 2 (41)
5. Богданов А.В. Социально-экономично-информационная модель государства // Вестник Херсонского национального технического университета. – Херсон: ХНТУ, 2012. – № 2 (45). – С. 187-190.
6. Богданов А.В., Радин В.К. Формальная вероятностная модель технического потенциала судовой энергетической установки. – Науковий вісник ХДМІ, 2012. – № 1(6). – С.191-197.
7. Кожухов И.Б., Прокофьев А.А. Универсальный справочник по математике. – М.: Лист Нью, 2003. – 544 с.
8. Богданов Ю. С., Кастрица О. А., Сыроид Ю. Б. Математический анализ: Учебное пособие для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. – С. 11-14.
9. Боровик В.Н., Яковець В.П. Курс вищої геометрії: Навчальний посібник – Суми: ВТД "Університетська книга", 2004. – 464 с.

БОГДАНОВ Александр Васильевич – к.ф.-м.н., доцент Херсонской государственной морской академии.

Научные интересы:

– математика, математические модели в экономике;

– физика, физика твёрдого тела.