УДК 517.968.519.6

Ю.М. Бахмат

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ ДИФРАКЦІЇ НА СИСТЕМІ ЗАМКНЕНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ПОВЕРХОНЬ (ВИПАДОК Е-ПОЛЯРИЗАЦІЇ)

Ціль статті

Ціллю даної роботи є побудова дискретної математичної моделі дифракції Е-поляризованої електромагнітної хвилі на скінченній системі замкнених циліндричних поверхонь (у роботі розглядається система кругових циліндрів), використовуючи метод дискретних особливостей, для того, щоб потім провести чисельний експеримент. У роботі використовується зазначений вище метод, бо він ефективно працює, коли виникають інтегральні рівняння з особливостями.

Постановка задачі

Нехай

$$L = \bigcup_{q=0}^{l} L_q \qquad (1)$$

це система, що складається з простих гладких замкнених кривих, L_q - направляючі циліндричної поверхні (у даному випадку система кругових циліндрів), твірні якої паралельні OZ. Розглядається перетин площиною, паралельною площині ХОУ, тобто задача двовимірна. Розглядається прямокутна система координат, тоді параметричні рівняння направляючих циліндричних поверхонь будуть мати вигляд:

$$L_q : \begin{cases} x_q = x(\varphi) + q \cdot a, \\ y_q = y(\varphi), \qquad \varphi \in [0, 2\pi). \end{cases} \qquad (2)$$

Позначимо

$$\Omega = \bigcup_{q=0}^{l} \operatorname{int} L_q \,. \qquad (3)$$

Розсіяне поле будемо шукати у вигляді потенціалу простого прошарку [2]:

$$u(y) = \frac{1}{2\pi} \int_L G(x, y) \cdot v(x) \cdot ds_x, \quad y \in C\overline{\Omega}, \qquad (4)$$

де

$$G(x, y) = \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(\chi \cdot |\, x - y \,|). \qquad (5)$$

Позначимо $u_0(x)$ - падаюче поле, u(x) - розсіяне поле. Оскільки розглядається випадок Е-поляризації, то на поверхні виконується гранична умова Діріхле:

$$u(x) = -u_0(x), \quad x \in L, \qquad (6)$$

тоді отримали інтегральне рівняння з невідомою функцією v(x) [2]:

$$u_0(y) = -\frac{1}{2\pi} \int_L G(x, y) \cdot v(x) \cdot ds_x, \quad y \in L. \qquad (7)$$

У роботі падаюче поле будемо брати у вигляді:

$$u_0(x, y) = e^{i\chi(\sin\alpha \cdot x - \cos\alpha \cdot y)}, \qquad \alpha \in [0, 2\pi). \qquad (8)$$

Дискретна математична модель у випадку Е-поляризації

Інтегральне рівняння (7) містить сингулярну особливість. Перейдемо від криволінійного інтегралу першого роду до визначеного інтегралу. Беручи до уваги те, на якому контурі міститься особливість, отримаємо систему інтегральних рівнянь:

$$u_0\left(x_{q_0}(\varphi_0),y_{q_0}(\varphi_0)\right)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi}{2i}H_0^{(1)}\left(\chi\sqrt{(x_{q_0}(\varphi)-x_{q_0}(\varphi_0))^2+(y_{q_0}(\varphi)-y_{q_0}(\varphi_0))^2}\right)\cdot$$
$$\cdot v\left(x_{q_0}(\varphi),y_{q_0}(\varphi)\right)\cdot\sqrt{(x'(\varphi))^2+(y'(\varphi))^2}\,d\varphi-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{q=0\\q\neq q_0}}^{l}\int_0^{2\pi}\frac{\pi}{2i}H_0^{(1)}\left(\chi\sqrt{(x_q(\varphi)-x_{q_0}(\varphi_0))^2+(y_q(\varphi)-y_{q_0}(\varphi_0))^2}\right)\cdot\sqrt{(x'(\varphi))^2+(y'(\varphi))^2}\,\cdot \qquad (9)$$
$$\cdot v\left(x_q(\varphi),y_q(\varphi)\right)d\varphi,\qquad q_0=0,1,...,l,\quad \varphi_0\in[0,2\pi).$$

У цій системі виписані окремо інтеграли з логарифмічною особливістю. Виділимо зазначену особливість.

Оскільки

$$H_0^{(1)}(z)=\frac{2i}{\pi}\ln z+\frac{2i}{\pi}[(\gamma-\ln 2)+(\ln\frac{z}{2}+\gamma)(I_0(z)-1)+\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{(1!)^2}-(1+\frac{1}{2})\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^4}{(2!)^2}+...]+I_0(z),\text{ то}$$

$$\frac{\pi}{2i}H_0^{(1)}(z)=\ln z+h(z),\qquad h(z)=\frac{\pi}{2i}H_0^{(1)}(z)-\ln z.$$

Тоді матимемо наступну систему інтегральних рівнянь:

$$-u_{0q_0}(\varphi_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right|\cdot v^*_{q_0}(\varphi)d\varphi+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Q_{q_0q_0}(\varphi,\varphi_0)\cdot v^*_{q_0}(\varphi)d\varphi+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{q=0\\q\neq q_0}}^{l}\int_0^{2\pi}Q_{q_0q}(\varphi,\varphi_0)\cdot v^*_q(\varphi)d\varphi, \qquad (10)$$
$$q_0=0,1,...,l,\quad \varphi_0\in[0,2\pi),$$

де

$$v^*_q(\varphi)=v(x_q(\varphi),y_q(\varphi))\cdot\sqrt{(x'(\varphi))^2+(y'(\varphi))^2},\quad q=0,1,...,l,$$
$$u_{0q_0}(\varphi_0)=u_0(x_{q_0}(\varphi_0),y_{q_0}(\varphi_0)),\quad q_0=0,.1,..,l.$$
$$Q_{q_0q_0}(\varphi,\varphi_0)=\frac{\pi}{2i}H_0^{(1)}\left(\chi\sqrt{(x_{q_0}(\varphi)-x_{q_0}(\varphi_0))^2+(y_{q_0}(\varphi)-y_{q_0}(\varphi_0))^2}\right)-\ln\left|\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right|,$$
$$q_0=0,1,...,l.$$
$$Q_{q_0q}(\varphi,\varphi_0)=\frac{\pi}{2i}H_0^{(1)}\left(\chi\sqrt{(x_q(\varphi)-x_{q_0}(\varphi_0))^2+(y_q(\varphi)-y_{q_0}(\varphi_0))^2}\right),$$
$$q\neq q_0,\quad q=0,1,...,l.$$

Тепер побудуємо дискретну математичну модель даної задачі. Спочатку перейдемо до задачі для наближеного розв‘язку. Замінимо усі гладкі функції у (10) відповідними інтерполяційними тригонометричними поліномами [3]:

$$
\begin{gathered}
-\left(P_n^{(2)}u_{0q_0}\right)(\varphi_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right|\cdot\left(P_n^{(1)}v_{q_0}^*\right)(\varphi)d\varphi+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(P_n^{(2)}P_n^{(1)}Q_{q_0q_0}\right)(\varphi,\varphi_0)\cdot \\
\cdot\left(P_n^{(1)}v_{q_0}^*\right)(\varphi)d\varphi+ \\
+\frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{q=0\\q\neq q_0}}^{l}\int_0^{2\pi}\left(P_n^{(2)}P_n^{(1)}Q_{q_0q}\right)(\varphi,\varphi_0)\cdot\left(P_n^{(1)}v_q^*\right)(\varphi)d\varphi, \\
q_0=0,1,\ldots,l,\quad \varphi_0\in[0,2\pi),
\end{gathered}
\tag{11}
$$

де

$$
(P_n^{(i)}g)(\varphi)=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}g\left(\varphi_k^{(i,n)}\right)\cdot\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\left(\varphi-\varphi_k^{(i,n)}\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(\varphi-\varphi_k^{(i,n)}\right)},
$$

$$
\varphi_k^{(1,n)}=\varphi_k^n=\frac{2\pi k}{2n+1},\quad k=0,1,\ldots,2n,
$$

$$
\varphi_j^{(1,n)}=\varphi_{0j}^n=\frac{2j+1}{2n+1}\pi,\quad j=0,1,\ldots,2n.
$$

Скориставшись інтерполяційними квадратурними формулами [3], взявши у якості точок колокації другий набір точок, маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$
\begin{gathered}
-u_{0q_0}\left(\varphi_{0j}^n\right)=\frac{-2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}\left\{\ln 2+\sum_{p=1}^{n}\frac{\cos\left(p\left(\varphi_{0k}^n-\varphi_{0j}^n\right)\right)}{p}\right\}\cdot v_{q_0}^*(\varphi_k^n)+ \\
+\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}Q_{q_0q_0}\left(\varphi_k^n,\varphi_{0j}^n\right)\cdot v_{q_0}^*(\varphi_k^n)+ \\
+\frac{1}{2n+1}\sum_{\substack{q=0\\q\neq q_0}}^{l}\sum_{k=0}^{2n}\frac{\pi}{2i}H_0^{(1)}\left(\chi\sqrt{(x_q(\varphi_k^n)-x_{q_0}(\varphi_{0j}^n))^2+(y_q(\varphi_k^n)-y_{q_0}(\varphi_{0j}^n))^2}\right)\cdot v_q^*\left(\varphi_k^n\right), \\
q_0=0,1,\ldots,l,\quad j=0,1,\ldots,2n.
\end{gathered}
\tag{12}
$$

Амплітуда розсіяного поля

Розсіяне поле виражається у вигляді потенціалу

$$
u(y)=\frac{1}{2\pi}\int_L G(x,y)\cdot v(x)\cdot ds_x,\quad y\in C\overline{\Omega}.
$$

Перейшовши від криволінійного інтегралу першого роду до визначеного, маємо

$$
u\left(x,y\right)=\frac{1}{2\pi}\sum_{q=0}^{l}\int_0^{2\pi}Q_{1q}\left(\phi,x,y\right)\cdot v_q^*\left(\phi\right)d\phi,\quad \left(x,y\right)\in C\overline{\Omega},
\tag{13}
$$

де

$$
Q_{1q}\left(\phi,x,y\right)=\frac{\pi}{2i}H_0^{(1)}\left(\chi\sqrt{(x_q(\phi)-x)^2+(y_q(\phi)-y)^2}\right),\quad q=0,1,\ldots,l,
$$

$$
v_q^*(\varphi)=v\left(x_q(\varphi),y_q(\varphi)\right)\cdot\sqrt{\left(x'(\varphi)\right)^2+\left(y'(\varphi)\right)^2},\quad q=0,1,\ldots,l.
$$

Потім, замінивши усі гладкі функції відповідними інтерполяційними тригонометричними поліномами і використавши квадратурні формули [3], остаточно маємо

$$
u\left(x,y\right)=\frac{1}{2n+1}\sum_{q=0}^{l}\sum_{k=0}^{2n}Q_1\left(\phi_k^n,x,y\right)\cdot v_q^*\left(\phi_k^n\right),\qquad \left(x,y\right)\in C\overline{\Omega}\ .
\tag{14}
$$

$|u(x,y)|$ - амплітуда розсіяного поля.

Розглядаємо вектори електромагнітного поля, що представляються у вигляді

$$E(x,y,t) = E(x,y)\cdot e^{i\cdot\omega\cdot t}.$$

Чисельний експеримент

По побудованій дискретній математичній моделі був проведений чисельний експеримент, а саме досліджена амплітуда розсіяного поля, а також побудована діаграма направленості.

Висновки

Отже, у роботі приведена математична модель задачі дифракції Е-поляризованої електромагнітної хвилі на скінченній системі замкнених циліндричних поверхонь, а також побудована дискретна математична модель поставленої задачі. У роботі був застосований метод дискретних особливостей.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Гандель Ю.В. Математические вопросы метода дискретных токов / Ю.В. Гандель, С.В. Еременко, Т.М. Полянская // Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн: Учебное пособие.Часть 2. - Харьков: ХГУ, 1992. - 145с.
2. Панасюк В.В. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, З.Т. Назарчук. - Киев: Наук. думка, 1984. - 344с.
3. Гандель Ю.В. Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов / Ю.В. Гандель. – Учебное пособие. – Харьков: ХНУ.– 2002. - 92 с.
4. Колтон Д. Методы интегральных уравнений в теории рассеивания / Д. Колтон, Р. Кресс ; [пер. с англ.] – М.: Мир. – 1987. – 311с.
5. Лифанов И.К. Метод сингулярних интегральных уравнений и численный експеримент / И.К. Лифанов. – М.: ТОО «Янус». – 1995. – 520с.
6. Шестопалов В.П. Дифракция волн на решетках / В.П. Шестопалов, Л.П. Литвиненко, В.Г. Сологуб. – Харьков: из-во Харьковского университета, 1973. – 287с.
7. Гандель Ю.В. Математические модели двумерных задач дифракции: сингулярные интегральные уравнения и численные методы дискретных особенностей: Монография / Ю.В. Гандель, В.Д. Душкін - Х. : Акад. ВВ МВД Украины, 2012. - 544 с.

БАХМАТ Юлія Миколаївна – аспірант кафедри математичної фізики та обчислювальної математики Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна, спеціалізація – 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи.

Наукові інтереси:

– сингулярні та гіперсингулярні інтегральні рівняння, математичне моделювання дифракції електромагнітних хвиль, метод дискретних особливостей.